

گزینه ۲

۱

از نمای راست، گزینه ۲ دیده می‌شود.

گزینه ۳

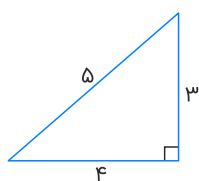
۲

تعداد یال‌های یک منشور n پهلو برابر با $3n$ است.

$15 = 3 \times 5 =$ تعداد یال‌ها : در منشور ۵ پهلو

گزینه ۴

۳



ارتفاع $\times$ محیط قاعده = مساحت جانبی

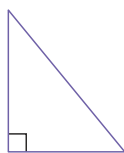
محیط : $3 + 4 + 5 = 12$

$72 = 12 \times 6 =$ مساحت جانبی

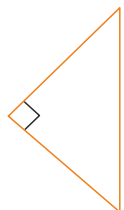
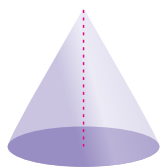
گزینه ۱

۴

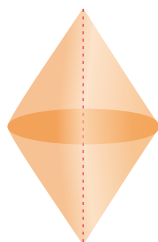
وجه ۱ روبروی وجه ۵ قرار می‌گیرد.



دوران حول ضلع
قائمه



دوران حول وتر



تعداد رأس‌های منشور n پهلو $2n =$

تعداد یال‌های منشور n پهلو $3n =$

در نتیجه مجموع یال‌ها و راس‌های منشور n پهلو برابر است با:

$$3n + 2n = 5n \Rightarrow 5n = 30 \Rightarrow n = 6$$

$$\text{حجم مکعب} = 40 \times 40 \times 40 = 64000, \quad \text{شعاع} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi \times r \times r \times h = 3/14 \times 20 \times 20 \times 40 = 50240$$

$$64000 - 50240 = 13760 : \text{حجم فضای خالی بین استوانه و مکعب}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$\text{محیط قاعده} = 3 \times 3 = 9 \text{ cm}$$

$$\text{سانتی‌متر مربع} = 118/8 = 9 \times 13/2 = \text{مساحت جانبی}$$

هنگامی که تعداد اضلاع زیاد شود، شکل قاعده به دایره نزدیک می‌شود و در نتیجه شکل منشور شبیه استوانه خواهد شد.

باید مساحت کل یک نیم‌استوانه را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \text{مساحت کل استوانه کامل} &= (2 \times 3 \times 4 \times 10) + 2(4 \times 4 \times 3) = 240 + 96 = 336 \\ \Rightarrow \text{مساحت کل شکل} &= \frac{336}{2} = 168 \end{aligned}$$

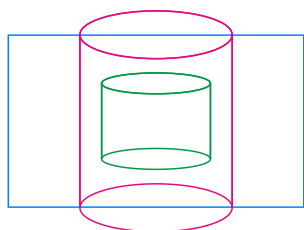
۱۶۸ واحد سطح پارچه لازم است.

شکل داده شده گسترده منشور است.

گزینه ۲ صحیح است.

از دوران یک مستطیل حول یک ضلع آن، استوانه به دست می‌آید.

بعد از دوران یک استوانه تو خالی داریم که نصف شده است.



$$\text{حجم استوانه بزرگ} = (10 \times 10 \times 3) \times 20 = 300 \times 20 = 6000$$

$$\text{حجم استوانه کوچک} = (5 \times 5 \times 3) \times 10 = 75 \times 10 = 750$$

$$\text{حجم شکل} = \frac{1}{3} \times (6000 - 750) = \frac{1}{3} (5250) = 1750$$

حجم‌های هندسی به سه دسته کلی هرمی، منشوری و کره تقسیم می‌شوند و سایر حجم‌ها غیرهندسی محسوب می‌شوند.

پاسخ سؤالات ۱۶ تا ۱۹

$$a \text{ مساحت کل مکعب به ضلع } a = 6 \times a \times a$$

$$\Rightarrow 150 = 6 \times a \times a \Rightarrow a \times a = \frac{150}{6} = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{حجم مکعب} = a \times a \times a = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$a \text{ مساحت کل مکعب به ضلع } a = 6 \times a \times a$$

$$3a \text{ مساحت کل مکعب به ضلع } 3a = 6 \times 3a \times 3a$$

$$\Rightarrow \frac{6 \times 3a \times 3a}{6 \times a \times a} = 9$$

(با مثال هم می‌توان ۹ را به دست آورد.)

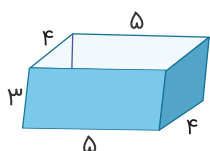
مربع‌های آزاد (یعنی وجه‌هایی که به مکعب‌های دیگر چسبیده نباشند) را می‌شماریم.

$$\underset{\text{جلو}}{5} + \underset{\text{پشت}}{5} + \underset{\text{چپ}}{2} + \underset{\text{راست}}{2} + \underset{\text{بالا}}{3} + \underset{\text{پایین}}{3} = 20$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی} \Rightarrow (2 \times 6) \times 5 = 60$$

هرم با قاعده مثلث این ویژگی را دارد که از چهار وجه تشکیل شده است.

جعبه روباز دارای ۴ وجه جانبی و ۱ قاعده می‌باشد.



$$2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$$

$$2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$$

$$5 \times 4 = 20$$

$$S \text{ کل} = 30 + 24 + 20 = 74$$

مساحت جانبی استوانه با مساحت مربع برابر است. مساحت مربع ۱۴۴ واحد مربع است، پس ضلع آن برابر ۱۲ واحد است. محیط دایره با ضلع مربع برابر است، در نتیجه داریم:

$$2 \times \pi \times r = 12 \Rightarrow 2 \times 3 \times r = 12 \Rightarrow r = \frac{12}{6} = 2$$

$$\text{قطر} : d = 2 \times r = 2 \times 2 = 4$$

باید مجموع طول یال‌ها را محاسبه کرد:

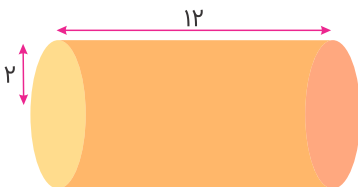
$$\text{مجموع یال‌ها} : (5 \times 2) + \underbrace{2}_{\text{تعداد قاعده}} \times \underbrace{(2 + 3 + 1 + 2 + 2)}_{\text{محیط قاعده}} = 10 + 2 \times 10 = 30$$

۳۰ واحد طول میله لازم داریم.

$$S_{\text{جانبی}} = Ph \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = 4x^2$$

$$x \rightarrow 2x \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = 4(2x)^2 = 4 \times 4x^2$$

باید سطح جانبی را حساب کرد:



$$\frac{4}{2} = 2$$

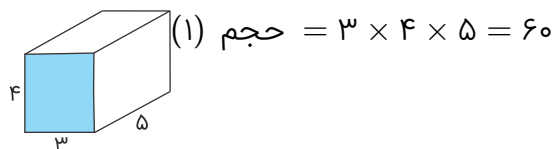
$$\text{مساحت جانبی} = 2\pi rh = 2 \times 3 \times 2 \times 12 = 144$$

$$AB \text{ حول } \Rightarrow \text{حجم} = 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$$

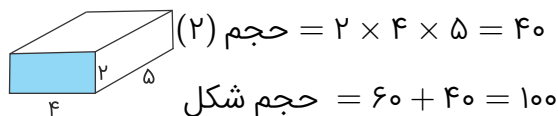
$$AC \text{ حول } \Rightarrow \text{حجم} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف} = 54 - 36 = 18$$

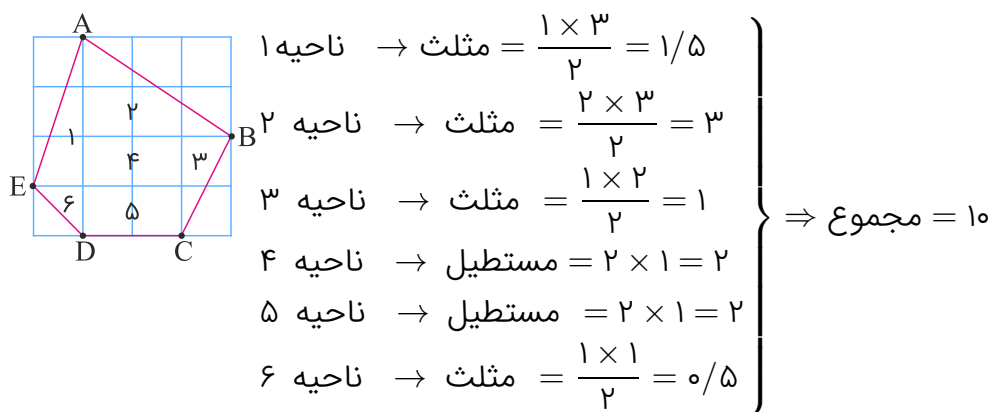
بهتر است شکل را به ۲ مکعب مستطیل تفکیک کنیم:
مکعب مستطیل شماره (۱) به ابعاد ۴، ۳ و ۵:



مکعب شماره (۲) به ابعاد ۴، ۲ و ۵:



اگر شکل را تقسیم کنیم:

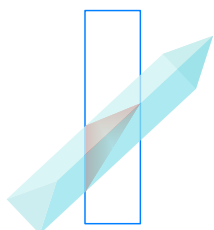


$$1x + 2x + 3x = 6x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{6} = 6$$

اضلاع مکعب مستطیل: $1 \times 6 = 6$, $2 \times 6 = 12$, $3 \times 6 = 18$

$$\text{حجم} = 6 \times 12 \times 18 = 1296$$

باتوجه به شکل مثلث ایجادشده غیرمشخص است؛ در واقع هرکدام از گزینه‌های ۱ و ۳ ممکن است ایجاد شود، پس مثلث غیرمشخص جواب خواهد بود.



$$\text{حجم استخر} = ۴ \times ۶ \times ۳۰ = ۷۲۰ \text{ m}^3$$

$$۷۲۰ \times ۱۰۰۰ = ۷۲۰۰۰۰ \text{ لیتر}$$

$$۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{حجم باقی مانده} = \frac{۱}{۴} \times ۷۲۰۰۰۰ = ۱۸۰۰۰۰$$

پاسخ سؤالات ۳۲ تا ۳۵

$$\text{تعداد پهلوها} = \frac{۱۲}{۲} = ۶ \Rightarrow \text{تعداد رأس‌ها} = ۲ \times \text{تعداد پهلوها}$$

$$\text{عرض} = ۳$$

$$\text{طول} = ۲ \times ۳ = ۶ \Rightarrow \text{برابر عرض} = ۲$$

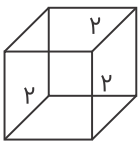
$$\text{ارتفاع} = ۲ \times ۶ = ۱۲ \Rightarrow \text{برابر طول} = ۲$$

$$\text{حجم} = ۶ \times ۳ \times ۱۲ = ۲۱۶$$

$$\text{سانتی‌متر مربع} = ۴ = \text{مساحت یک وجه}$$

$$\text{طول ضلع} = ۲ \Rightarrow \text{مساحت} = ۴$$

$$\text{حجم} = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$$



$$\begin{aligned} ۳ \times \text{تعداد پهلوهایی منشور} &= \text{تعداد یال‌های منشور} \\ &= ۵ \times ۳ = ۱۵ \end{aligned}$$

یک وجه از این ۱۵ وجه قاعده هرم است بنابراین این هرم یک قاعده ۱۴ ضلعی دارد پس ۱۴ یال از رأس هرم به رأس‌های این ۱۴ ضلعی وصل می‌کند و ۱۴ یال دیگر هم ضلع‌های قاعده‌اند: $۱۴ + ۱۴ = ۲۸$

یال: محل برخورد سطوح
قاعده ۷ ضلعی منشور دارای ۷ وجه جانبی می‌باشد که هر وجه با وجه کناری خود و قاعده‌ها برخورد دارد یعنی با ۳ سطح برخورد می‌کند. پس: $۳ \times ۷ = ۲۱$

سطح مقطع یک مخروط اگر موازی قاعده برش زده شود، دایره خواهد بود که این سطح مقطع در کره همواره دایره و در استوانه نیز اگر موازی قاعده انجام شود هم دایره خواهد بود.

تعداد وجه‌های یک منشور n ضلعی برابر n و دارای ۲ قاعده نیز می‌باشد.

باید حجم هریک از شکل‌ها را حساب کرد:

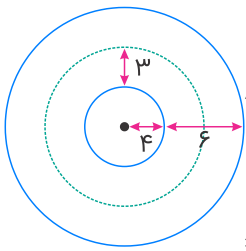
$$\text{شکل الف : حجم} = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۶۰$$

$$\text{شکل ب : حجم} = ((۱ \times ۲) + (۰/۵ \times ۲) + (۱ \times ۲)) \times ۱ = ۵ \Rightarrow ۶۰ - ۵ = ۵۵$$

۵۵ واحد حجم بیرون می‌ریزد.

$$\begin{aligned} \text{تعداد رأس‌ها } ۲ \times ۶ = ۱۲ \quad \text{تعداد یال‌ها } ۳ \times ۶ = ۱۸ \\ ۱۸ + ۱۲ = ۳۰ \end{aligned}$$

برای حل این سؤال ما شعاع میانگین یعنی دایره خطچین را در نظر می‌گیریم.
 ضخامت کل نوار چسب ۶ سانتی‌متر است، پس در کل $\frac{۶۰ \text{ میلی‌متر}}{۵/۰ \text{ میلی‌متر}} = ۱۲۰$ دور نوار چسب داریم.



$$\text{شعاع متوسط} = \frac{۴ + ۱۰}{۲} = ۷ \text{ cm}$$

$$\text{محیط یک دور نوار چسب} = ۲ \times ۳ \times ۷ = ۴۲$$

$$\Rightarrow \text{طول چسب} = ۱۲۰ \times ۴۲ = ۵۰۴۰ \text{ cm} = ۵۰/۴۰ \text{ m}$$

تعداد یال‌ها، سه برابر تعداد اضلاع قاعده است که ۲۱ یال می‌شود.
 تعداد کل وجه‌ها شامل ۷ وجه جانبی و ۲ قاعده است که ۹ وجه می‌شود.

$$۱۲ = ۲۱ - ۹ : \text{اختلاف}$$

$$S_1 = ۲\pi r h$$

$$S_2 = ۲\pi(2r)h = ۴\pi r h = ۲(۲\pi r h) = ۲S_1$$

$$V_1 = \pi \cdot r \cdot r \cdot h$$

$$V_2 = \pi(2r)(2r)h = ۴\pi \cdot r \cdot r \cdot h = ۴V_1$$

$$۸^۳ = \text{حجم مکعب به ضلع } ۸$$

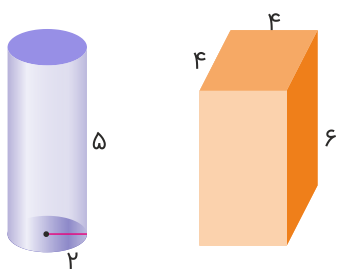
$$۴^۳ = \text{حجم مکعب به ضلع } ۴$$

$$\frac{۸^۳}{۴^۳} = ۲^۳ = ۸$$

$$\text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل}$$

$$\text{مساحت دو دوزنقه (قاعدوها)} + \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت کل}$$

$$= (۵ + ۳ + ۶ + ۲) \times ۵ + ۲ \left(\frac{(۵ + ۶) \times ۷}{۲} \right) = ۱۶ \times ۵ + ۲ \times ۱۱ = ۸۰ + ۲۲ = ۱۰۲$$



$۶ = \text{ارتفاع}$ ، $۱۶ = ۴ \times ۴ = \text{مساحت قاعده}$

$$\Rightarrow \text{حجم} = ۱۶ \times ۶ = ۹۶$$

$۵ = \text{ارتفاع}$ ، $۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳ = \text{مساحت قاعده}$

$$\Rightarrow \text{حجم} = ۱۲ \times ۵ = ۶۰$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حجم منشور}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{۹۶}{۶۰} = \frac{۸}{۵}$$

تعداد یال‌ها: ۶ یال قاعده پایین + ۶ یال قاعده بالا + ۶ یال متصل از قاعده پایین به بالا

$$۱۸ = ۳ \times ۶ : \text{مجموع یال‌ها}$$

تعداد وجه‌ها: ۶ وجه جانبی + ۲ قاعده

$$۸ = ۶ + ۲ : \text{مجموع وجه‌ها}$$

$$۲۶ = ۱۸ + ۸ : \text{مجموع یال‌ها و وجه‌ها}$$

تعداد رأس‌های منشور n پهلوی برابر با $۲n$ است، بنابراین منشور ۱۱ پهلوی $۲۲ = ۲ \times ۱۱$ رأس دارد.

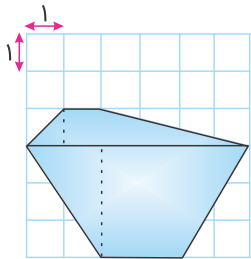
تعداد یال‌های منشور n پهلوی برابر با $۳n$ است، بنابراین منشور ۱۱ پهلوی $۳۳ = ۳ \times ۱۱$ یال دارد.

$$\Rightarrow ۳۳ + ۲۲ = ۵۵$$

$$\text{حجم مکعب} = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸ \text{ cm}^3$$

$$\frac{\text{حجم مکعب}}{\text{حجم مکعب مستطیل}} = \frac{۲}{۵} = \frac{۸}{x} \Rightarrow x = ۲۰ \text{ cm}^3$$

فقط مکعب مستطیلی با ابعاد گزینه "۲" دارای حجم ۲۰ سانتی‌متر مکعب است.



$$\text{مساحت قاعده} = \frac{1}{۲}((۱ + ۳) \times ۱) + \frac{1}{۲}((۳ + ۳) \times ۳) = \frac{1}{۲}(۳۱) = ۱۵/۵$$

$$\text{حجم} = ۱۵/۵ \times ۸ = ۱۲۴$$

طبق متن کتاب درسی گزینه "۲" پاسخ صحیح است.

محل برخورد سطح‌ها یال می‌باشد و هر سطح با ۳ سطح دیگر برخورد داشته است.

$$۳ \times ۱۰ = ۳۰$$

هر مکعب ۸ رأس، ۶ وجه و ۱۲ یال دارد.

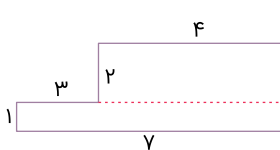
$$۸ + ۶ + ۱۲ = ۲۶$$

حجم‌های هندسی شامل حجم‌های منشوری، کروی و هرمی هستند.

$$\text{مساحت مستطیل بالایی} + \text{مساحت مستطیل پایینی} = \text{مساحت قاعده} = (۱ \times ۷) + (۲ \times ۴)$$

$$= ۷ + ۸ = ۱۵ \text{ متر مربع}$$

$$\text{حجم مکعب} = ۱۵ \times ۹ = ۱۳۵$$



۵۷

گزینه ۲

باتوجه به اشکال، گزینه ۲ صحیح خواهد بود.

۵۸

گزینه ۴

هر سطح دارای ۵ رأس است، پس در کل ۱۰ رأس دارد. هر سطح ۵ یال دارد و ۵ یال نیز آن‌ها را به هم وصل کرده که در کل ۱۵ یال دارد.

۵۹

گزینه ۳

حجم‌های منشوری دارای ۲ قاعده در ۲ صفحه موازی هستند ولی مخروط دارای ۱ قاعده می‌باشد.

۶۰

گزینه ۳

هر منشور دارای ۲ قاعده است.
چون هفت پهلو است، پس $۲۱ = ۳ \times ۷$ یال دارد.

$$۲۱ + ۲ = ۲۳$$

۶۱

گزینه ۲

$$\text{حجم منشور} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۶۲۸ \times ۴ = ۲۵۱۲ \text{ cm}^3$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{\text{حجم استوانه}}{\text{مساحت قاعده}}$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{۲۵۱۲}{۲۰ \times ۲۰ \times ۳/۱۴} = \frac{۲۵۱۲}{۱۲۵۶} = ۲ \text{ cm}$$

۶۲

گزینه ۱

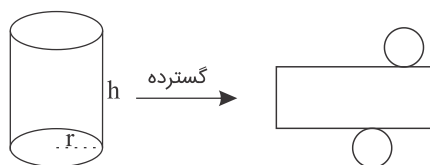
ابتدا می‌بایست مساحت جانبی ستون را حساب کنیم:

$$۲۰ \text{ cm} = ۰/۲ \text{ m}$$

$$۲ \text{ mm} = ۰/۰۰۲ \text{ m}$$

$$\text{مترمربع} = ۳ = ۱ \times ۳ = ۵ \times (۰/۲) \times ۳ = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$\text{مترمکعب} = ۰/۰۰۶ = ۰/۰۰۲ \times ۳ = \text{ضخامت رنگ} \times \text{مساحت جانبی} = \text{حجم رنگ مورد نیاز}$$



سطح جانبی استوانه از مستطیل تشکیل شده است.

$$\text{حجم} = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = (\pi \times 1 \times 1) \times 5 = 15$$

این منشور با قاعده ۶ ضلعی دارای ۶ وجه جانبی است و هر وجه با ۳ سطح برخورد دارد که این محل برخوردها یال می‌باشند:
 $3 \times 6 = 18$

$$\text{حجم ظرف (الف)} : \frac{4 \times 3}{2} \times 6 = 36$$

$$\text{حجم ظرف (ب)} : (2 \times 2 \times 3) \times 50 = 600 \Rightarrow 600 - 4 \times 36 = 600 - 144 = 456$$

حجم‌های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.

اگر ضلع مکعبی را a برابر کنیم، مساحت جانبی و کل آن $a \times a$ برابر و حجم آن $a \times a \times a$ خواهد شد.

$$\text{تعداد وجه‌های جانبی} = 6 - 2 = 4$$

تعداد وجه‌های جانبی با تعداد اضلاع قاعده برابر است، بنابراین منشور ۶ ضلعی است.

$$(3 \times a) \times (2 \times a) \times a = 6 \Rightarrow 6 \times a \times a \times a = 6 \Rightarrow a \times a \times a = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{حجم استوانه بزرگ} = \pi(3R).(3R)(2h) = 18\pi R R h$$

$$\text{حجم استوانه کوچک} = \pi(R.R)h$$

$$\text{حجم استوانه کوچک} - \text{حجم استوانه بزرگ} = \text{حجم شکل}$$

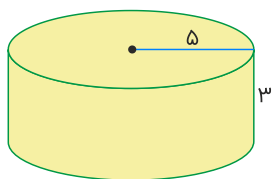
$$\Rightarrow 18\pi R R h - \pi R R h = 17\pi R R h$$

اگر زرد وجه جانبی مکعب باشد کنار سفید نمی‌تواند قرار گیرد.

هر مکعب از ۱۲ یال مساوی تشکیل شده است، پس:

$$\text{اندازه یک یال} = 36 \div 12 = 3 \text{ cm}$$

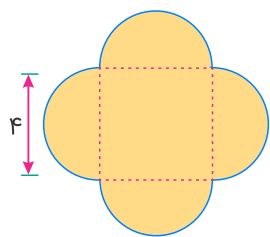
$$\text{سانتی‌متر مکعب} \quad 3 \times 3 \times 3 = 27 : \text{حجم مکعب}$$



اگر حول عرض دوران دهیم همیشه بیشترین حجم را خواهیم داشت.

$$\text{حجم} = 3 \times 5^2 \times 3 = 225$$

ابتدا مساحت قاعده را بدست می‌آوریم.



(مساحت نیم‌دایره) $4 + \text{مساحت مربع} = \text{مساحت قاعده}$

$$= 4 \times 4 + 4 \left(\frac{1}{4} \times 2 \times 2 \times \pi \right) = 16 + 24 = 40$$

$$\text{حجم} = 40 \times 5 = 200$$