اصلاحیه

✍ پاسخنامه کلیدی – فصل اول – سوال تستی بخش یک – سوال ۴۰: گزینه صحیح ۳

پاسخنامه
سؤالات تشریحی

بخش ۱

۱- آسان

آ) قطر　　　　ب) نزدیک‌تر

پ) نصف　　　　ت) نصف

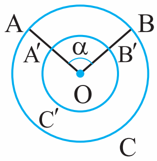
ث) 60°

۲- آسان

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha\pi R}{180} \Rightarrow 3\pi = \frac{\alpha\pi \times 6}{180} \Rightarrow 3 = \frac{\alpha}{30} \Rightarrow \alpha = 90$$

$$|\widehat{A'B'}| = \frac{\alpha\pi R'}{180} \Rightarrow 2\pi = \frac{90\pi R'}{180} \Rightarrow R' = 4$$

$$S' = \pi R'^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$$

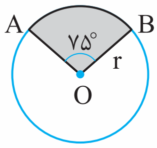


۳- آسان

محیط $= 2\pi r \Rightarrow 12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6$

$$S = \frac{\alpha\pi r^2}{360} = \frac{75\pi \times 36}{360} = 7/5\pi$$

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha\pi r}{180} = \frac{75\pi \times 6}{180} = \frac{5\pi}{2}$$



۴- متوسط

فرض: $AB = CD$　　　　حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

از **O** به **A** و **B** و **C** و **D** وصل می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ \text{فرض } AB = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

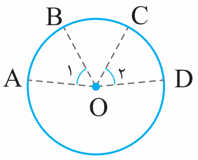
$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

عکس قضیه:

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$　　　　حکم: $AB = CD$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AB} \\ \text{مرکزی } \hat{O}_2 = \widehat{CD} \\ \text{فرض: } \widehat{AB} = \widehat{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC = R \\ \text{اثبات بالا } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \xrightarrow{\text{ا.م}} AB = CD$$



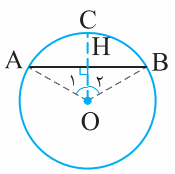
۵- متوسط

فرض: $\hat{H} = 90$　　　　حکم: $\begin{cases} AH = HB \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{cases}$

از **O** به **A** و **B** وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{وتر } OA = OB = R \\ \text{مشترک } OH = OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OHB} \xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ AH = HB \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AC} \\ \text{مرکزی } \hat{O}_2 = \widehat{BC} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

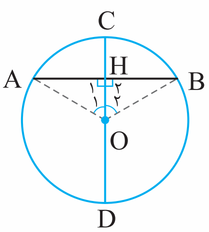


۶- متوسط

فرض: $AH = HB$　　　　حکم: $\begin{cases} \widehat{AC} = \widehat{BC} \\ \hat{H} = 90^\circ \end{cases}$

O را به **A** و **B** وصل می‌کنیم.

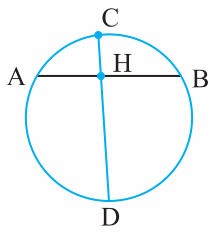
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \\ \text{مشترک } OH = OH \\ \text{فرض: } AH = HB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OHB} \xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AC} \\ \text{مرکزی } \hat{O}_2 = \widehat{BC} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$

۷- آسان

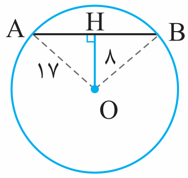
کافی است از نقطه **C** وسط کمان **AB** به نقطه **H** وسط وتر **BC** وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در نقطه **D** قطع کند، پاره‌خط **CD** قطر دایره است که بر **AB** عمود است.



۸- متوسط

از **O** به **A** وصل می‌کنیم $OA=R=۱۷$

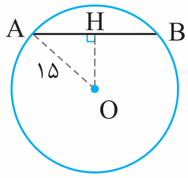
چون از **O** به وتر **AB** عمود کرده‌ایم $AH=HB$



$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲}=AH^{۲}+OH^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲۸۹=AH^{۲}+۶۴$$
$$\Rightarrow AH^{۲}=۲۲۵ \Rightarrow AH=۱۵$$
$$AB=۲AH=۲(۱۵)=۳۰$$

۹- آسان

از مرکز دایره به وسط **AB** عمود کرده‌ایم. پس $AH=HB=\frac{AB}{۲}=۱۲$

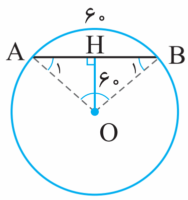


$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲}=AH^{۲}+OH^{۲}$$
$$\Rightarrow ۲۲۵=۱۴۴+OH^{۲}$$
$$\Rightarrow OH^{۲}=۸۱ \Rightarrow OH=۹$$

۱۰- متوسط

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A}_۱=\hat{B}_۱=\hat{O}=۶۰^\circ \\ \xrightarrow{\text{متساوی‌الاضلاع}} AB=OA=۱۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}_۱=۶۰^\circ$$

از **O** به **AB** عمود می‌کنیم $AH=HB=۵$



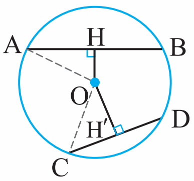
$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲}=AH^{۲}+OH^{۲}$$
$$\Rightarrow ۱۰۰=۲۵+OH^{۲} \Rightarrow OH^{۲}=۷۵$$
$$\Rightarrow OH=۵\sqrt{۳}$$

۱۱- دشوار

$$AB>CD \Leftrightarrow OH<OH'$$

O را به **A** و **C** وصل می‌کنیم

$$OH\perp AB \Rightarrow AH=HB=\frac{AB}{۲}$$
$$OH'\perp CD \Rightarrow CH'=H'D=\frac{CD}{۲}$$
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OAH}: R^{۲}=AH^{۲}+OH^{۲} \\ \overset{\triangle}{OH'C}: R^{۲}=CH'^{۲}+OH'^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow AH^{۲}+OH^{۲}=CH'^{۲}+OH'^{۲} \quad (۱)$$
$$\text{if } AB>CD \Rightarrow \frac{AB}{۲}>\frac{CD}{۲} \Rightarrow AH>CH' \Rightarrow AH^{۲}>CH'^{۲}$$
$$\xrightarrow{(۱)} OH^{۲}<OH'^{۲} \Rightarrow OH<OH'$$
$$\text{if } OH<OH' \Rightarrow OH^{۲}<OH'^{۲} \xrightarrow{(۱)} AH^{۲}>CH'^{۲}$$
$$\Rightarrow AH>CH' \Rightarrow ۲AH>۲CH' \Rightarrow AB>CD$$



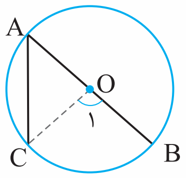
۱۲- دشوار

قضیه را در ۳ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت اول: یک ضلع زاویه قطر دایره باشد

O را به **C** وصل می‌کنیم

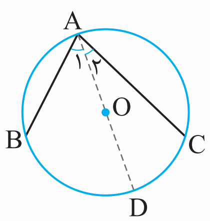
$$OA=OC \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{A}=\hat{C}$$
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OAC}: \text{خارجی } \hat{O}_۱=\hat{A}+\hat{C} \Rightarrow \hat{O}_۱=۲\hat{A} \\ \text{مرکزی } \hat{O}_۱=\overset{\frown}{BC} \end{array}\right| \Rightarrow ۲\hat{A}=\overset{\frown}{BC} \Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



حالت دوم: مرکز دایره بین دو ضلع زاویهٔ **A** باشد.

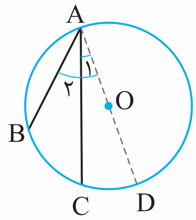
قطر گذرنده از **A** را رسم می‌کنیم تا دایره را در **D** قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l} \text{طبق حالت اول: } \hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \text{طبق حالت اول: } \hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



حالت سوم: مرکز دایره خارج اضلاع زاویه باشد:

$$\left.\begin{aligned} \text{طبق حالت اول}: \hat{A}_۲ &= \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \text{طبق حالت اول}: \hat{A}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{(-)} \hat{A}_۲ - \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$$

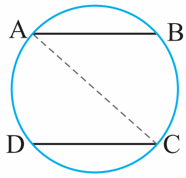


۱۳- آسان

فرض: $AB \parallel DC$ حکم: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

از **A** به **C** وصل می‌کنیم

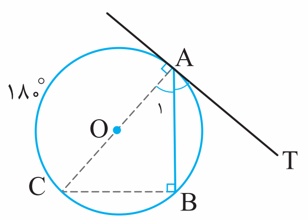
$$\left.\begin{aligned} &AB \parallel DC, \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{C} \\ &\text{محاطی } \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ &\text{محاطی } \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$$



۱۴- دشوار

حکم: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

قطر گذرنده از **A** را رسم می‌کنیم تا دایره را در **C** قطع کند، **C** را به **B** وصل می‌کنیم چون **B** زاویه محاطی رو به قطر است پس $\hat{B} = ۹۰$

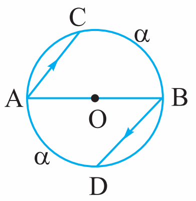


می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس به خط مماس عمود است

$$\left.\begin{aligned} &\hat{A}_۱ + \hat{A} = ۹۰ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰ - \hat{A}_۱ \\ &\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A}_۱ + ۹۰ + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{C} = ۹۰ - \hat{A}_۱\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} \\ &\text{محاطی } \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۱۵- آسان



$$AC \parallel BC \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰° \\ \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AD} = ۱۸۰°\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AD} \Rightarrow$$

$$\overset{\frown}{AC} + \alpha = \overset{\frown}{BD} + \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

می‌دانیم وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند. برابر $AC = BD$

۱۶- متوسط

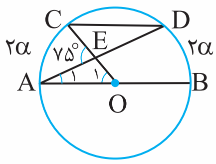
$$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = ۲\alpha$$

مرکزی: $\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AC} = ۲\alpha$ محاطی: $\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \alpha$

$$\overset{\triangle}{AOE}: \hat{E} = \hat{A}_۱ + \hat{O}_۱ \Rightarrow ۷۵ = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha \Rightarrow \alpha = ۲۵$$

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰ \Rightarrow ۲\alpha + \overset{\frown}{CD} + ۲\alpha = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰ - ۴\alpha = ۱۸۰ - ۴(۲۵) \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۸۰$$



۱۷- متوسط

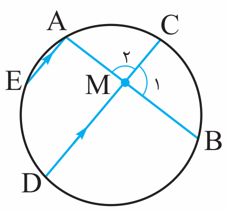
$$\text{حکم}: \left\{\begin{aligned} \hat{M}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \hat{M}_۲ &= \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}\end{aligned}\right.$$

از نقطه **A** موازی **DC** رسم می‌کنیم تا دایره را در **E** قطع کند.

$$AE \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{ED}$$

$$\left.\begin{aligned} &AE \parallel DC, \text{مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{M}_۲ = \hat{A} \\ &\text{محاطی } \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{EB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{DB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۲ = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

به همین ترتیب $\hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{۲}$



۱۸- متوسط

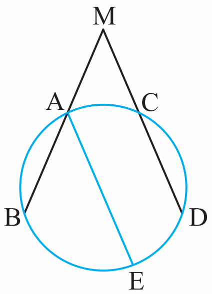
حکم: $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}$

از نقطه **A** موازی **CD** رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه **E** قطع کند.

$ME \parallel MD$, مورب BM $\xrightarrow{\text{خطوط موازی}}$ $\hat{A}=\hat{M}$ (۱)

$AE \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{ED}$ (۲)

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲}\xrightarrow{(۱)}\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{DE}}{۲}\xrightarrow{(۲)}\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲}$$



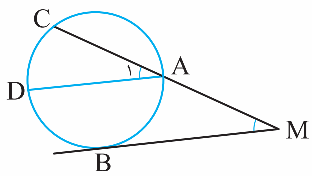
۱۹- دشوار

از **A** موازی **MB** رسم می‌کنیم تا دایره را در **D** قطع کند.

$AD \parallel MB \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DB}$ (۱)

$AD \parallel MB$, مورب AC $\xrightarrow{\text{خطوط موازی}}$ $\hat{M}=\hat{A}$ (۲)

محاطی $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}=\xrightarrow{(۲)}\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{CB}-\overset{\frown}{DB}}{۲}\xrightarrow{(۱)}\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{CB}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$



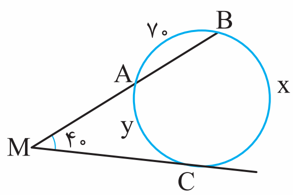
۲۰- متوسط

اگر $\overset{\frown}{BC}=x$ و $\overset{\frown}{AC}=y$ باشد:

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}=۳۶۰ \Rightarrow ۷۰+x+y=۳۶۰ \Rightarrow x+y=۲۹۰$

$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow ۴۰=\frac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y=۸۰$

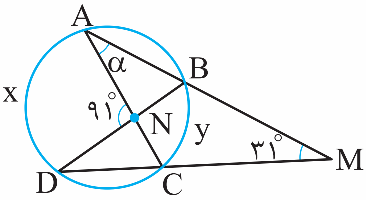
$\begin{cases}x+y=۲۹۰\\x-y=۸۰\end{cases} \Rightarrow ۲x=۳۷۰ \Rightarrow x=۱۸۵ \Rightarrow y=۱۰۵$



۲۱- متوسط

$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۳۱=\frac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y=۶۲$

$N=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۹۱=\frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y=۱۸۲$



$\begin{cases}x-y=۶۲\\x+y=۱۸۲\end{cases} \Rightarrow ۲x=۲۴۴ \Rightarrow x=۱۲۲, y=۶۰$

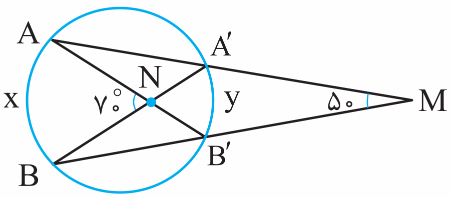
محاطی $\hat{\alpha}=\frac{y}{۲}=\frac{۶۰}{۲} \Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$

۲۲- متوسط

$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۵۰=\frac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y=۱۰۰$

$\hat{N}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۷۰=\frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y=۱۴۰$

$\begin{cases}x-y=۱۰۰\\x+y=۱۴۰\end{cases} \Rightarrow ۲x=۲۴۰ \Rightarrow x=۱۲۰, y=۲۰$

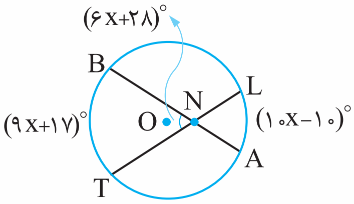


۲۳- آسان

$\hat{N}=\frac{\overset{\frown}{BT}+\overset{\frown}{AL}}{۲} \Rightarrow ۶x+۲۸=\frac{۹x+۱۷+۱۰x-۱۰}{۲}$

$\Rightarrow ۱۲x+۵۶=۱۹x+۷ \Rightarrow ۷x=۴۹ \Rightarrow x=۷$

$B\hat{N}T=۶x+۲۸=۶(۷)+۲۸=۴۲+۲۸ \Rightarrow B\hat{N}T=۷۰^\circ$



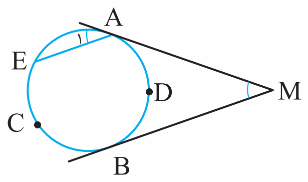
۲۴- متوسط

از نقطه A موازی MB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند:

$$\left.\begin{array}{l} ME \parallel MB, \text{مورب } MA \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{M}=\hat{A}_1 \\ \text{ظلی } \hat{A}_1=\dfrac{\overset{\frown}{AE}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$$

$$AE \parallel MB \Rightarrow \overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{ECB} \quad (۱)$$

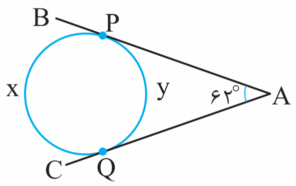
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ECB}}{۲} \xrightarrow{(۱)} \hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{۲}$$



۲۵- آسان

$$\hat{A}=\frac{x-y}{۲} \Rightarrow ۶۲=\frac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y=۱۲۴$$

$$\begin{cases} x-y=۱۲۴ \\ x+y=۳۶۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۴۸۴ \Rightarrow x=۲۴۲, y=۱۱۸$$



۲۶- دشوار

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{QMP}-\overset{\frown}{QP}}{۲} \Rightarrow ۸۰=\frac{y+z+t-x}{۲} \Rightarrow y+z+t-x=۱۶۰ \quad (۱)$$

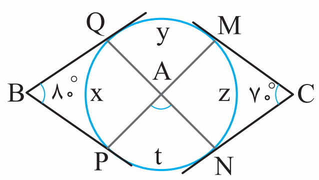
$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{MQN}-\overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow ۷۰=\frac{y+x+t-z}{۲} \Rightarrow y+x+t-x=۱۴۰ \quad (۲)$$

رابطه (۱) را با رابطه (۲) جمع می‌کنیم

$$۲y+۲t=۳۰۰ \Rightarrow y+t=۱۵۰$$

دو وتر QN و MP همدیگر را داخل دایره در نقطه A قطع کرده‌اند پس داریم:

$$\hat{A}=\frac{y+t}{۲}=\frac{۱۵۰}{۲} \Rightarrow \hat{A}=۷۵°$$



۲۷- دشوار

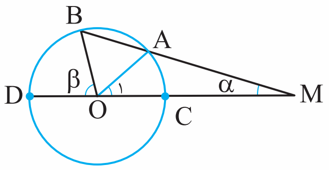
$$OA=AM=R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{O}_1=\hat{A}=\alpha$$

$$\text{مرکزی } B\hat{O}D=\overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\beta$$

$$\text{مرکزی } \hat{O}_1=\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\alpha$$

دو وتر AB و DC همدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کرده‌اند.

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۱} \Rightarrow \alpha=\frac{\beta-\alpha}{۲} \Rightarrow ۲\alpha=\beta-\alpha \Rightarrow \beta=۳\alpha$$



۲۸- دشوار

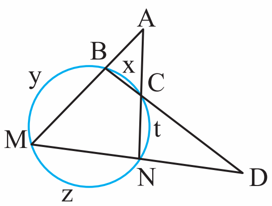
$$\hat{A}=\frac{z-x}{۲} \quad (۱)$$

$$\hat{D}=\frac{y-t}{۲} \quad (۲)$$

$$\text{محاطی } \hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BN}}{۲}=\frac{x+t}{۲} \quad (۳)$$

از رابطه (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\hat{A}+\hat{D}+۲\hat{M}=\frac{z-x+y-t+۲x+۲t}{۲}=\frac{z+y+x+t}{۲}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰$$



۲۹- دشوار

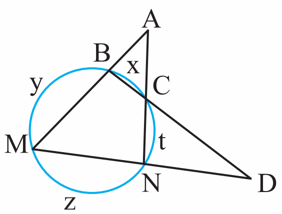
$$\hat{A}=\frac{z-x}{۲} \Rightarrow ۴۰=\frac{z-x}{۲} \Rightarrow z-x=۸۰ \quad (۱)$$

$$\hat{D}=\frac{y-t}{۲} \Rightarrow ۳۰=\frac{y-t}{۲} \Rightarrow y-t=۶۰ \quad (۲)$$

$$\text{می‌دانیم}: x+y+z+t=۳۶۰ \Rightarrow \underbrace{z-x}_{۸۰}+\underbrace{y-t}_{۶۰}+۲x+۲t=۳۶۰$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} ۱۴۰+۲x+۲t=۳۶۰ \Rightarrow ۲x+۲t=۲۲۰ \Rightarrow x+t=۱۱۰$$

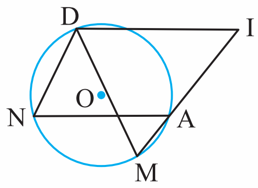
$$\text{محاطی } \hat{M}=\frac{x+t}{۲}=\frac{۱۱۰}{۲} \Rightarrow \hat{M}=۵۵$$



۳۰- دشوار

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{محاطی } \hat{N}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \text{محاطی } \hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{N}\\ \text{DIAN متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow \hat{N}=\hat{I}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{M}=\hat{I}$$

$$\overset{\Delta}{DMI}:\hat{M}=\hat{I}\xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} DM=DI$$



پاسخنامه

سؤالات تستی

بخش ۱

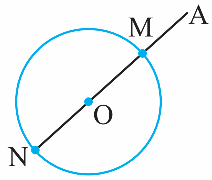
۱- گزینهٔ «۳» آسان

دو حالت وجود دارد:

حالت اول: نقطه **A** خارج دایره باشد.

$$\left.\begin{array}{l}AM=AO-R=۳\\ AN=AO+R=۷\end{array}\right\}\Rightarrow AO=۵\ ,\ R=۲$$

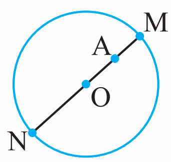
$$S=\pi R^۲=۴\pi$$



حالت دوم: نقطه **A** داخل دایره باشد.

$$\left.\begin{array}{l}AM=R-OA=۳\\ AN=R+OA=۷\end{array}\right\}\ ,\ R=۵\ ,\ AO=۲$$

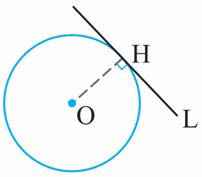
$$S=\pi R^۲=۲۵\pi$$



۲- گزینهٔ «۲» آسان

اگر خط **L** بر دایره مماس باشد، در این‌صورت فاصله خط **L** تا مرکز برابر شعاع دایره است.

$$OH=R\ \Rightarrow\ ۳m-۴=۱۱\ \Rightarrow\ ۳m=۱۵\ \Rightarrow\ m=۵$$



۳- گزینهٔ «۴» متوسط

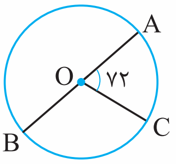
اگر اندازه زاویه کمانی α درجه باشد، طول آن کمان $\dfrac{\alpha\pi R}{۱۸۰}$ است.

$$|\overset{\frown}{AC}|=\frac{۷۲\times\pi\times۱۲}{۱۸۰}\ \Rightarrow\ |\overset{\frown}{AC}|=۴/۸\pi$$

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰\ \Rightarrow\ ۷۲+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰\ \Rightarrow\ \overset{\frown}{BC}=۱۰۸$$

$$|\overset{\frown}{BC}|=\frac{۱۰۸\pi\times۱۲}{۱۸۰}=۷/۲\pi$$

$$|\overset{\frown}{AC}|-|\overset{\frown}{BC}|=۷/۲\pi-۴/۸\pi=۲/۴\pi$$



۴- گزینهٔ «۲» دشوار

اگر اندازه زاویه مرکزی کمانی α رادیان باشد طول آن کمان αR است.

$$|\overset{\frown}{AB}|=|\overset{\frown}{A'B'}|\ \Rightarrow\ \alpha R=\alpha' R\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{۶}\times R=\frac{\pi}{۴}\times R'$$

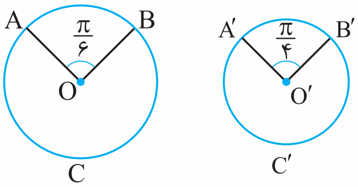
$$\Rightarrow\ R=\frac{۳}{۲}R'$$

$$S-S'=۲۰\pi\ \Rightarrow\ \pi R^۲-\pi R'^۲=۲۰\pi\ \xrightarrow{\div\pi}\ \frac{۹}{۴}R'^۲-R'^۲=۲۰$$

$$\Rightarrow\ \frac{۵}{۴}R'^۲=۲۰\ \Rightarrow\ R'^۲=۱۶\ \Rightarrow\ R'=۴$$

$$R=\frac{۳}{۲}R'=\frac{۳}{۲}\times۴\ \Rightarrow\ R=۶$$

$$R+R'=۱۰$$



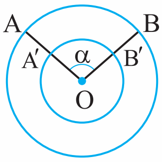
۵- گزینهٔ «۲» — آسان

روش اول:

$$|\widehat{AB}|=\alpha R \;\Rightarrow\; ۵=\alpha\times ۴ \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{۵}{۴}\text{Rad}$$

$$|\widehat{A'B'}|=\alpha R' \;\Rightarrow\; |\widehat{A'B'}|=\frac{۵}{۴}\times ۱۲ \;\Rightarrow\; |\widehat{A'B'}|=۱۵$$

روش دوم:



$$\frac{|\widehat{A'B'}|}{|\widehat{AB}|}=\frac{\alpha R'}{\alpha R} \;\Rightarrow\; \frac{|\widehat{A'B'}|}{۵}=\frac{۱۲}{۴}$$

$$\Rightarrow |\widehat{A'B'}|=۱۵$$

۶- گزینهٔ «۳» — دشوار

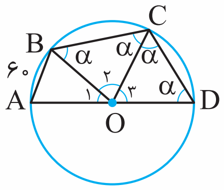
در این دایره **AD** قطر است کـه $۲R=۸ \Rightarrow R=۴$ و چون $AB=R$ است پس $|\widehat{AB}|=۶۰^\circ$ است.

O را به **B** وصل می‌کنیم ($\hat{O}_۱=\widehat{AB}=۶۰^\circ$ مرکزی) و چون **OC** نیمساز زاویه **C** است پس $D\hat{C}O=B\hat{C}O=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{AOC}: OC=OD=R \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} O\hat{C}D=\hat{D}=\alpha \\ \overset{\triangle}{OCB}: OC=OB=R \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} O\hat{C}B=\hat{B}=\alpha\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۲=\hat{O}_۳=۶۰$$

$$|\widehat{CD}|=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰}=\frac{۶۰\times\pi\times ۴}{۱۸۰}=\frac{۴}{۳}\pi$$



۷- گزینهٔ «۴» — آسان

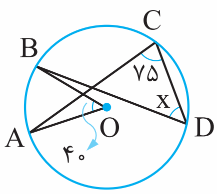
مرکزی $\hat{O}=\widehat{AB} \;\Rightarrow\; \widehat{AB}=۴۰^\circ$

محاطی $\hat{C}=\frac{\widehat{AD}}{۲} \;\Rightarrow\; ۷۵=\frac{\widehat{AD}}{۲} \;\Rightarrow\; \widehat{AD}=۱۵۰^\circ$

محاطی $\hat{D}=\frac{\widehat{BC}}{۲} \;\Rightarrow\; x=\frac{\widehat{BC}}{۲} \;\Rightarrow\; \widehat{BC}=۲x$

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CD}+\widehat{DA}=۳۶۰ \;\Rightarrow\; ۴۰+۲x+۶۸+۱۵۰=۳۶۰$$

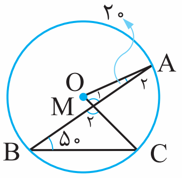
$$\Rightarrow ۲x=۱۰۲ \;\Rightarrow\; x=۵۱^\circ$$



۸- گزینهٔ «۴» — متوسط

محاطی $\hat{B}=\frac{\widehat{AC}}{۲} \;\Rightarrow\; ۵۰=\frac{\widehat{AC}}{۲} \;\Rightarrow\; \widehat{AC}=۱۰۰$

مرکزی $\hat{O}=\widehat{AC}=۱۰۰^\circ$



$$\hat{A}+\hat{O}+\hat{M}_۱=۱۸۰ \Rightarrow ۲۰+۱۰۰+\hat{M}_۱=۱۸۰$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۱=۶۰ \xrightarrow{\text{متقابل به راس}} \hat{M}_۲=۶۰$$

$$\hat{M}_۲+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۶۰+۵۰+\hat{C}=۱۸۰$$

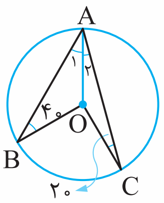
$$\Rightarrow \hat{C}=۷۰$$

۹- گزینهٔ «۱» — دشوار

A را به **O** وصل می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{OAB}: OA=OB \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{A}_۱=\hat{B}=۴۰^\circ \\ \overset{\triangle}{OAC}: OA=OC \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{A}_۲=\hat{C}=۲۰\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۶۰^\circ$$



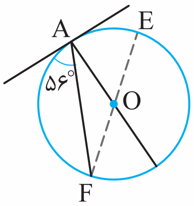
محاطی $\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow ۶۰=\frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC}=۱۲۰^\circ$

$$|\widehat{BC}|=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰}=\frac{۱۲۰\pi\times ۱۲}{۱۸۰} \;\Rightarrow\; |\widehat{BC}|=۸\pi$$

۱۰- گزینهٔ «۱» — آسان

ظلی $\hat{A}=\frac{\widehat{AF}}{۲} \;\Rightarrow\; ۵۶=\frac{\widehat{AF}}{۲} \;\Rightarrow\; \widehat{AF}=۱۱۲$

قطر $EF \;\Rightarrow\; \widehat{AF}+\widehat{AE}=۱۸۰ \;\Rightarrow\; ۱۱۲+\widehat{AE}=۱۸۰ \Rightarrow \widehat{AE}=۶۸$



۱۱- گزینهٔ «۴» — دشوار

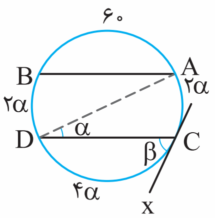
$$AB=R \;\Rightarrow\; \widehat{AB}=۶۰^\circ$$

محاطی $\hat{D}=\frac{\widehat{AC}}{۲} \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{\widehat{AC}}{۲} \;\Rightarrow\; \widehat{AC}=۲\alpha$

$$AB \parallel BC \;\Rightarrow\; \widehat{AC}=\widehat{BD}=۲\alpha$$

ظلی $X\hat{C}D=\frac{\widehat{DC}}{۲} \;\Rightarrow\; \beta=\frac{\widehat{DC}}{۲} \;\Rightarrow\; \widehat{DC}=۲\beta \xrightarrow{\beta=۲\alpha} \widehat{DC}=۴\alpha$

$$\widehat{AB}+\widehat{BD}+\widehat{DC}+\widehat{CA}=۳۶۰ \;\Rightarrow\; ۶۰+۲\alpha+۴\alpha+۲\alpha=۳۶۰$$



$$\Rightarrow ۸\alpha=۳۰۰ \;\Rightarrow\; \alpha=۳۷/۵^\circ$$

$$\widehat{BD}=۲\alpha=۲(۳۷/۵)=۷۵^\circ$$

۱۲- گزینهٔ «۳» دشوار

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}=x$$

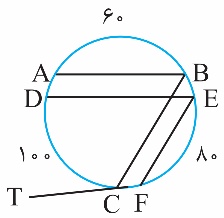
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}=360$$

$$\Rightarrow 60+x+80+x+100+x=360 \Rightarrow 3x+240=360$$

$$\Rightarrow 3x=120 \Rightarrow x=40$$

ظلی $B\hat{C}T=\dfrac{\overset{\frown}{CDB}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}+\overset{\frown}{AB}}{2}=\dfrac{100+40+60}{2}=\dfrac{200}{2}$

$$\Rightarrow B\hat{C}T=100$$

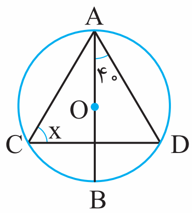


۱۳- گزینهٔ «۲» آسان

محاطی $B\hat{A}D=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow 40=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=80^\circ$

قطر $AB \Rightarrow \overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AD}=180 \Rightarrow 80+\overset{\frown}{AD}=180 \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=100^\circ$

محاطی $\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{100}{2} \Rightarrow x=50$



۱۴- گزینهٔ «۲» متوسط

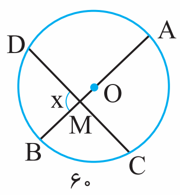
قطر $AB \Rightarrow \overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=180 \Rightarrow 60+\overset{\frown}{AC}=180 \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=120$

$$\overset{\frown}{AC}=\frac{3}{2}\overset{\frown}{AD} \Rightarrow 120=\frac{3}{2}\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=80^\circ$$

دو وتر **AB** و **CD** همدیگر را داخل دایره در نقطه **M** قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:

$$A\hat{M}D=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{2}=\frac{80+60}{2} \Rightarrow A\hat{M}D=70$$

$$\Rightarrow x=180-70 \Rightarrow x=110$$



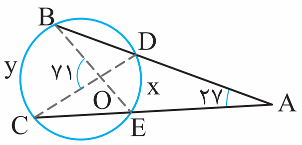
۱۵- گزینهٔ «۱» آسان

روش اول: اگر فرض کنیم $\overset{\frown}{BC}=y$ و $\overset{\frown}{DE}=x$ است

$$\hat{O}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DE}}{2} \Rightarrow 71=\frac{y+x}{2} \Rightarrow y+x=142$$

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{DE}}{2} \Rightarrow 27=\frac{y-x}{2} \Rightarrow y-x=54$$

$$\begin{cases} y+x=142 \\ y-x=54 \end{cases} \Rightarrow y=98, x=44$$



روش دوم: در این مدل سوالات همواره $\overset{\frown}{BC}=\hat{O}+\hat{A}$ و $\overset{\frown}{DE}=\hat{O}-\hat{A}$ است پس داریم:

$$\overset{\frown}{BC}=71+27=98$$

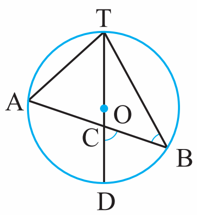
۱۶- گزینهٔ «۱» متوسط

محاطی $\hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \Rightarrow 35=\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AT}=70$

محاطی $\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{TB}}{2} \Rightarrow 65=\dfrac{\overset{\frown}{TB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{TB}=130$

قطر $TD \Rightarrow \overset{\frown}{TB}+\overset{\frown}{BD}=180 \Rightarrow 130+\overset{\frown}{BD}=180 \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=50$

$$\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AT}+\overset{\frown}{BD}}{2} \Rightarrow \hat{C}=\frac{70+50}{2} \Rightarrow \hat{C}=60^\circ$$



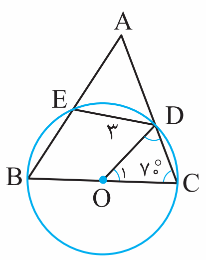
۱۷- گزینهٔ «۳» متوسط

چون $DE=R=3$ است پس $\overset{\frown}{DE}=60^\circ$

O را به **D** وصل می‌کنیم

$$\overset{\triangle}{ODC}: OD=OC=R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C}=\hat{D}=70$$

$$\hat{O}_1+\hat{C}+\hat{D}=180 \Rightarrow \hat{O}_1+70+70=180 \Rightarrow \hat{O}_1=40$$



$$\xrightarrow{\text{مرکزی } \hat{O}_1} \overset{\frown}{DC}=40$$

$$\overset{\frown}{EDC}=\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{DC}=60+40=100$$

۱۸- گزینهٔ «۴» دشوار

$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{AE}=\widehat{BF}=۱۵^\circ$

$\widehat{AB}+\widehat{BF}+\widehat{FD}+\widehat{DC}+\widehat{EC}+\widehat{AE}=۳۶۰$

$\Rightarrow x+۱۵+۱۰۰+y+۸۰+۱۵=۳۶۰ \Rightarrow x+y+۲۱۰=۳۶۰$

$\Rightarrow x+y=۱۵۰$

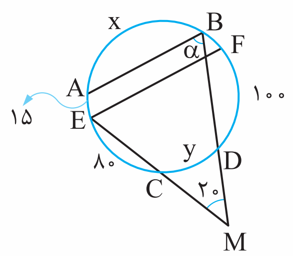
$\hat{M}=\frac{\widehat{BE}-\widehat{DC}}{۲} \Rightarrow ۲۰=\frac{x+۱۵-y}{۲}$

$\Rightarrow x-y+۱۵=۴۰ \Rightarrow x-y=۲۵$

$\begin{cases} x+y=۱۵۰ \\ x-y=۲۵ \end{cases} \Rightarrow x=۸۷/۵ \ , \ y=۶۲/۵$

محاطی $A\hat{B}D=\frac{\widehat{DC}+\widehat{CE}+\widehat{EA}}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{۶۲/۵+۸۰+۱۵}{۲}$

$\Rightarrow \alpha=۷۸/۷۵^\circ$



۱۹- گزینهٔ «۲» متوسط

محاطی $\hat{B}=\frac{\widehat{FD}}{۲} \Rightarrow ۳۵=\frac{\widehat{FD}}{۲} \Rightarrow \widehat{FD}=۷۰^\circ$

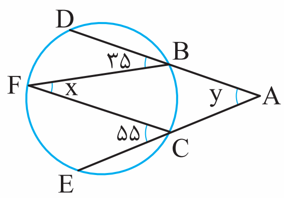
محاطی $\hat{C}=\frac{\widehat{FE}}{۲} \Rightarrow ۵۵=\frac{\widehat{FE}}{۲} \Rightarrow \widehat{FE}=۱۱۰$

$\widehat{DE}=\widehat{DF}+\widehat{FE}=۷۰+۱۱۰=۱۸۰$

$\hat{F}=\frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow x=\frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC}=۲x$

دو وتر **BD** و **EC** همدیگر را در نقطه **A** خارج دایره قطع کرده‌اند.

$\hat{A}=\frac{\widehat{DE}-\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow y=\frac{۱۸۰-۲x}{۲} \Rightarrow y=۹۰-x \Rightarrow y+x=۹۰$



۲۰- گزینهٔ «۲» متوسط

$\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=y$

محاطی $\hat{D}=\frac{\widehat{BE}}{۲} \Rightarrow x=\frac{\widehat{BE}}{۲} \Rightarrow \widehat{BE}=۲x$

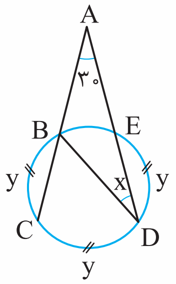
$\widehat{BE}+\widehat{ED}+\widehat{CD}+\widehat{CB}=۳۶۰ \Rightarrow y+y+y+۲x=۳۶۰$

$\Rightarrow ۳y+۲x=۳۶۰$

$\hat{A}=\frac{\widehat{CD}-\widehat{BE}}{۲} \Rightarrow ۳۰=\frac{y-۲x}{۲}$

$\Rightarrow y-۲x=۶۰$

$\begin{cases} ۳y+۲x=۳۶۰ \\ y-۲x=۶۰ \end{cases} \Rightarrow y=۱۰۵, x=۲۲/۵$

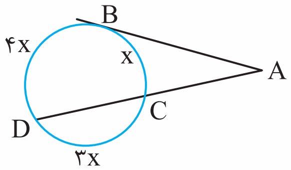


۲۱- گزینهٔ «۱» آسان

$\widehat{BD}+\widehat{DC}+\widehat{CB}=۳۶۰ \Rightarrow ۴x+۳x+x=۳۶۰$

$\Rightarrow ۸x=۳۶۰ \Rightarrow x=۴۵^\circ$

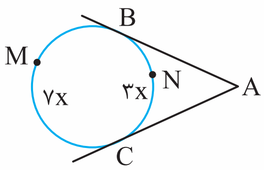
$\hat{A}=\frac{\widehat{BD}-\widehat{BC}}{۲}=\frac{۴x-x}{۲}=\frac{۳x}{۲}=\frac{۳}{۲}(۴۵) \Rightarrow \hat{A}=۶۷/۵$



۲۲- گزینهٔ «۲» آسان

$\widehat{BMC}+\widehat{CNB}=۳۶۰ \Rightarrow ۷x+۳x=۳۶۰ \Rightarrow ۱۰x=۳۶۰ \Rightarrow x=۳۶$

$\hat{A}=\frac{\widehat{BMC}-\widehat{BNC}}{۲}=\frac{۷x-۳x}{۲}=۲x=۲(۳۶) \Rightarrow A=۷۲^\circ$

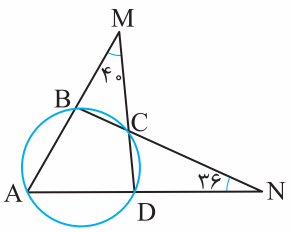


۲۳- گزینهٔ «۳» متوسط

در این شکل رابطه $۲\hat{A}+\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰$ برقرار است (اثبات تمرین ۲۸)

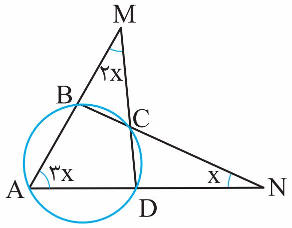
$۲\hat{A}+\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰ \Rightarrow ۲\hat{A}+۴۰+۳۶=۱۸۰$

$\Rightarrow ۲\hat{A}=۱۰۴ \Rightarrow \hat{A}=۵۲^\circ$



۲۴- گزینهٔ «۴» **متوسط**

با توجه به تمرین ۲۸، ثابت کردیم $2\hat{A}+\hat{M}+\hat{N}=180^\circ$ است پس داریم:



$$2\hat{A}+\hat{M}+\hat{N}=180$$
$$\Rightarrow 6x+2x+x=180$$
$$\Rightarrow 9x=180 \Rightarrow x=20$$

۲۵- گزینهٔ «۳» **دشوار**

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CDE}-\overset{\frown}{EC}}{2} \Rightarrow 80=\frac{y+z+t-x}{2} \Rightarrow y+z+t-x=160$$

$$\begin{cases} y+z+t-x=160 \\ y+z+t+x=360 \end{cases} \Rightarrow x=100^\circ$$

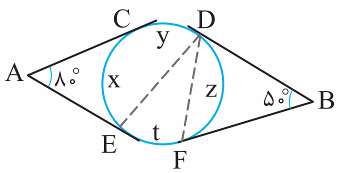
$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{DCF}-\overset{\frown}{DF}}{2} \Rightarrow 50=\frac{y+x+t-z}{2}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y+x+t-z=100 \\ y+x+t+z=360 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z=130^\circ$$

$$CD=R \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=60^\circ, y=60^\circ$$

$$x+y+z+t=360 \Rightarrow 100+60+130+t=360 \Rightarrow t=70$$

محاطی $\hat{D}=\frac{t}{2}=\frac{70}{2} \Rightarrow \hat{D}=35^\circ$



۲۶- گزینهٔ «۳» **متوسط**

روش اول:

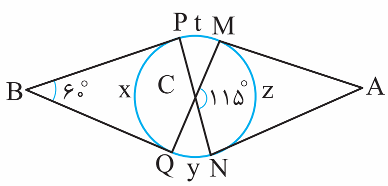
$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{PMQ}-\overset{\frown}{PQ}}{2} \Rightarrow 60=\frac{t+z+y-x}{2} \Rightarrow t+z+y-x=120$$

$$\begin{cases} t+z+y-x=120 \\ t+z+y+x=360 \end{cases} \Rightarrow x=120$$

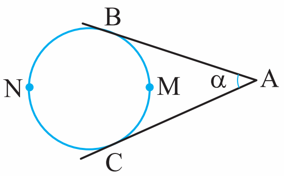
$$\hat{C}=\frac{x+z}{2} \Rightarrow 115=\frac{120+z}{2} \Rightarrow 230=120+z \Rightarrow z=110$$

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{MPN}-\overset{\frown}{MN}}{2}=\frac{t+x+y-z}{2}=\frac{\overbrace{t+x+y+z}^{360}-2z}{2}$$

$$=\frac{360-220}{2}=\frac{140}{2} \Rightarrow \hat{A}=70^\circ$$



روش دوم:



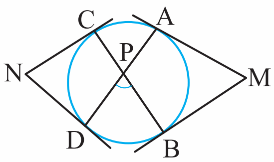
نکته: اگر از نقطه **A** دو مماس بر دایره‌ای رسم شود داریم:

$$\overset{\frown}{BMC}=180-\alpha$$
$$\overset{\frown}{BNC}=180+\alpha$$

با توجه به نکته فوق داریم:

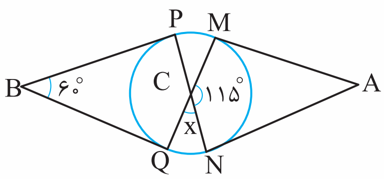
$$\hat{x}=180-\hat{B}=180-60 \Rightarrow x=120$$
$$\hat{C}=\frac{x+z}{2} \Rightarrow 115=\frac{120+z}{2} \Rightarrow 230=120+z \Rightarrow z=110$$
$$\hat{z}=180-\hat{A} \Rightarrow 110=180-\hat{A} \Rightarrow \hat{A}=70^\circ$$

روش سوم:



نکته: در شکل مقابل داریم:

$$\hat{P}=\frac{\hat{M}+\hat{N}}{2}$$



$$115+x=180 \Rightarrow x=65$$
$$x=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \Rightarrow 65=\frac{\hat{A}+60}{2} \Rightarrow 130=\hat{A}+60 \Rightarrow \hat{A}=70^\circ$$

۲۷- گزینهٔ «۱» **دشوار**

روش اول: از **O** به **B** وصل می‌کنیم

$$\overset{\triangle}{OBA}: OB=BA \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{A}=\hat{O}_1=\alpha$$
$$\xrightarrow{\text{مرکزی}} \overset{\frown}{BE}=\hat{O}_1=\alpha$$

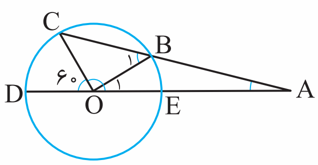
مرکزی $C\hat{O}D=\overset{\frown}{CD}=60$

دو وتر **CB** و **DE** همدیگر را خارج دایـره در نقطـه **A** قطع کـرده‌انـد، پس داریم:

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{BE}}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{60-\alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha=60-\alpha$$
$$\Rightarrow 3\alpha=60 \Rightarrow \alpha=20$$

$$\overset{\triangle}{OBA}: \text{خارجی } \hat{B}_1=\hat{O}_1+\hat{A}=\alpha+\alpha \Rightarrow \hat{B}_1=2\alpha=40$$

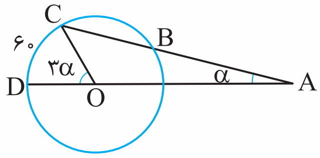
$$\overset{\triangle}{OBC}: OB=OC=R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C}=\hat{B}_1=40$$



روش دوم: در شکل مقابل هرگاه $AB = R$ باشد $\hat{O} = ۳\hat{A}$

$۳\alpha = ۶۰ \Rightarrow \alpha = ۲۰$

$\overset{\Delta}{OCA}$: خارجی $۳\alpha = \hat{C} + \alpha \Rightarrow \hat{C} = ۲\alpha = ۲(۲۰) = ۴۰^\circ$



۲۸- گزینهٔ «۲» متوسط

روش اول:

$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = ۲\alpha$

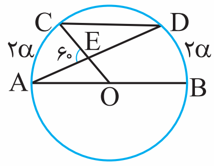
محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۲\alpha}{۲} = \Rightarrow \hat{A} = \alpha$

مرکزی $\hat{O} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \hat{O} = ۲\alpha$

$\overset{\Delta}{AOE}$: خارجی $C\hat{E}A = \hat{A} + \hat{O} \Rightarrow ۶۰ = \alpha + ۲\alpha \Rightarrow ۳\alpha = ۶۰ \Rightarrow \alpha = ۲۰$

$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰ \Rightarrow ۲\alpha + \overset{\frown}{CD} + ۲\alpha = ۱۸۰$

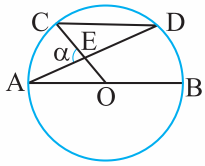
$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰ - ۴\alpha = ۱۸۰ - ۴(۲۰) \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۰۰$



روش دوم:

نکته: اگر $AB \parallel CD$ باشد و **AB** قطر دایره باشد داریم:

$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰ - \frac{۴}{۳}\alpha$



با توجه به نکته فوق و این‌که $\alpha = ۶۰^\circ$ داریم:

$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰ - \frac{۴}{۳} \times ۶۰ = ۱۸۰ - ۸۰ = ۱۰۰^\circ$

۲۹- گزینهٔ «۲» متوسط

روش اول:

$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = \alpha$

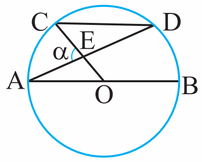
$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB} = ۱۸۰ \Rightarrow \alpha + ۸۰ + \alpha = ۱۸۰$

$\Rightarrow ۲\alpha = ۱۰۰ \Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ$

محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۵۰}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۲۵^\circ$

مرکزی $\hat{O} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow \hat{O} = ۵۰$

$\overset{\Delta}{AOE}$: خارجی $\hat{x} = \hat{A} + \hat{O} = ۲۵ + ۵۰ \Rightarrow \hat{x} = ۷۵^\circ$



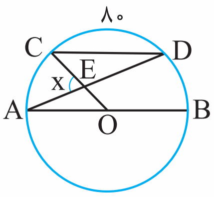
روش دوم:

نکته: اگر $AB \parallel CD$ باشد و **AB** قطر دایره باشد، داریم:

$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰ - \frac{۴}{۳}x$

با توجه به نکته فوق و این‌که $\overset{\frown}{CD} = ۸۰^\circ$ داریم:

$۸۰ = ۱۸۰ - \frac{۴}{۳}x = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۷۵^\circ$



۳۰- گزینهٔ «۱» دشوار

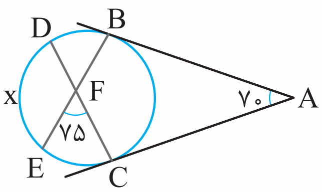
دو وتر **DC** و **BE** همدیگر را در نقطه **F** درون دایره قطع کرده‌اند پس داریم:

$\hat{F} = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{EC}}{۲} \Rightarrow ۷۵ = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{EC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{EC} = ۱۵۰$

از نقطه **A** دو مماس **AB** و **AC** بر دایره رسم شده است پس:

$\overset{\frown}{BC} = ۱۸۰ - \hat{A} = ۱۸۰ - ۷۰ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۱۰$

$\overset{\frown}{BC} + \underbrace{\overset{\frown}{EC} + \overset{\frown}{DB}}_{۱۵۰} + \overset{\frown}{DE} = ۳۶۰ \Rightarrow ۱۱۰ + ۱۵۰ + x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۱۰۰$



۳۱- گزینهٔ «۱» متوسط

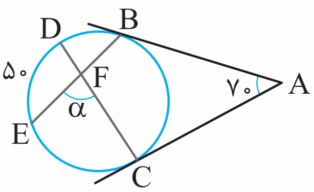
از نقطه **A** دو مماس **AB** و **AC** بر دایره رسم شده است پس داریم:

$\overset{\frown}{BC} = ۱۸۰ - \hat{A} = ۱۸۰ - ۷۰ = ۱۱۰$

$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{DB} = ۳۶۰ \Rightarrow ۱۱۰ + \overset{\frown}{CE} + ۵۰ + \overset{\frown}{DB} = ۳۶۰$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{DB} = ۲۰۰$

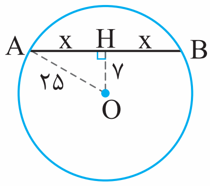
$\alpha = \frac{\overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{EC}}{۲} = \frac{۲۰۰}{۲} \Rightarrow \alpha = ۱۰۰^\circ$



۳۲- گزینهٔ «۴» آسان

اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند یعنی

$AH = HB = x$



$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲}$

$\Rightarrow ۲۵^{۲} = ۷^{۲} + x^{۲}$

$\Rightarrow ۶۲۵ = ۴۹ + x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۵۷۶$

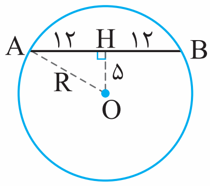
$\Rightarrow x = ۲۴$

$\Rightarrow AB = ۲x = ۲(۲۴) \Rightarrow AB = ۴۸$

۳۳- گزینهٔ «۲» آسان

اگر از مرکز یک دایره به یک وتر، عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند،

پس $AH = HB = ۱۲$



$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲}$

$\Rightarrow R^{۲} = ۵^{۲} + ۱۲^{۲} = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹$

$\Rightarrow R = ۱۳$

$S = \pi R^{۲} \Rightarrow S = ۱۶۹\pi$

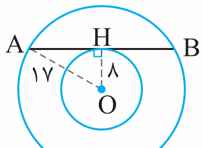
۳۴- گزینهٔ «۳» متوسط

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره بر یک وتر عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند پس $AH = HB$

$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲} = AH^{۲} + OH^{۲} \Rightarrow ۲۸۹ = AH^{۲} + ۶۴ \Rightarrow AH^{۲} = ۲۲۵$

$\Rightarrow AH = ۱۵$

$AB = ۲AH = ۳۰$



۳۵- گزینهٔ «۳» متوسط

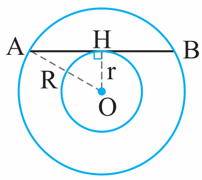
اگر شعاع دایره کوچک‌تر **r** و شعاع دایره بزرگ‌تر **R** باشد داریم:

رنگی $S = \pi R^{۲} - \pi r^{۲} \Rightarrow ۳۶\pi = \pi(R^{۲} - r^{۲}) \Rightarrow R^{۲} - r^{۲} = ۳۶$

$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲} = AH^{۲} + OH^{۲} \Rightarrow R^{۲} = AH^{۲} + r^{۲} \Rightarrow R^{۲} - r^{۲} = AH^{۲}$

$\Rightarrow AH^{۲} = ۳۶ \Rightarrow AH = ۶$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره‌ای به یک وتر عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند.

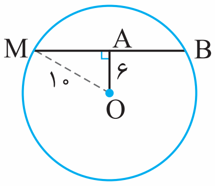


$AB = ۲AH = ۲(۶) = ۱۲$

۳۶- گزینهٔ «۴» دشوار

کوتاه‌ترین وتری که از نقطه **A** می‌گذرد، وتری است که به قطر عبوری از نقطه **A** عمود است و می‌دانیم اگر قطری عمود بر یک وتر باشد، آن را نصف می‌کند

پس $MA = AN$



$\overset{\triangle}{OAM}: OM^{۲} = OA^{۲} + AM^{۲}$

$\Rightarrow ۱۰۰ = ۳۶ + AM^{۲}$

$\Rightarrow AM^{۲} = ۶۴ \Rightarrow AM = ۸$

$MN = ۲AM = ۱۶$

۳۷- گزینهٔ «۲» دشوار

اگر فرض کنیم $D\hat{A}C = x$ با توجه به صورت مسئله $D\hat{B}C = ۲x$

محاطی $D\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow ۲x = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = ۴x$

$\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{DB}}{۲} \Rightarrow x = \dfrac{۴x - \overset{\frown}{DB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{DB} = ۲x$

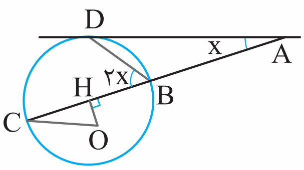
$\overset{\frown}{BDC} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD} \Rightarrow ۲x + ۴x \Rightarrow \overset{\frown}{BDC} = ۶x$

O را به **B** وصل می‌کنیم

مرکزی $C\hat{O}B = \overset{\frown}{BDC} = ۶x$

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند پس $C\hat{O}H = \dfrac{۶x}{۲} = ۳x$

$\dfrac{C\hat{O}H}{D\hat{A}C} = \dfrac{۳x}{x} = ۳$



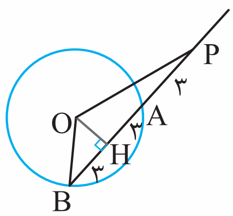
۳۸- گزینهٔ «۴» آسان

می دانیم اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر نصف می‌شود

پس $BH = HA = \dfrac{AB}{۲} = ۳$

از **O** به **B** وصل می‌کنیم

$\overset{\triangle}{OBH}: OB^{۲} = OH^{۲} + BH^{۲} = ۱ + ۹ = ۱۰ \Rightarrow R^{۲} = ۱۰ \Rightarrow R = \sqrt{۱۰}$



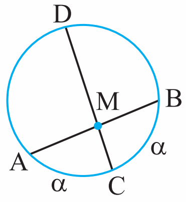
۳۹- گزینهٔ «۴» متوسط

می‌دانیم اگر از وسط کمان به وسط یک وتر وصل کنیم و امتداد دهیم این خط قطر دایره است و به آن وتر عمود است پس $\widehat{AC}=\widehat{BC}=\alpha$

DC قطر است و چون $\widehat{AB}=۲\alpha$ است پس

$$AB=R \Rightarrow \widehat{AB}=۶۰ \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BC}=۳۰$$

$$\text{قطر } DC \Rightarrow \widehat{DA}+\widehat{AC}=۱۸۰ \Rightarrow \widehat{DA}+۳۰=۱۸۰ \Rightarrow \widehat{DA}=۱۵۰$$



۴۰- گزینهٔ «۲» دشوار

می‌دانیم هر وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است

$$OH<OH' \Rightarrow AB>CD$$

اگر از مرکز دایره‌ای به یک وتر از آن دایره عمودی رسم کنیم، آن عمود، وتر را نصف می‌کند پس $AH=HB=\frac{AB}{۲}$ و $CH'=H'D=\frac{CD}{۲}$

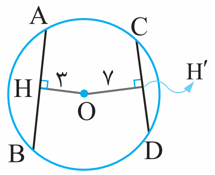
$$AB>CD \Rightarrow ۲BH=۲CH' \Rightarrow BH>CH' \Rightarrow m-۶>۱۳-۲m$$

$$\Rightarrow ۳m>۱۹ \Rightarrow m>\frac{۱۹}{۳} \quad (۱)$$

می‌دانیم: $BH>۰ \Rightarrow m-۶>۰ \Rightarrow m>۶ \quad (۲)$

می‌دانیم: $CH'>۰ \Rightarrow ۱۳-۲m>۰ \Rightarrow -۲m>-۱۳ \Rightarrow m<۶/۵ \quad (۳)$

از (۱) و (۲) و (۳) داریم:



$$\frac{۱۹}{۳}<m<۶/۵$$

پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۲

۱- آسان

آ) متقاطع ب) ۹۰°

پ) شعاع دو دایره برابر ت) مماس داخل

ث) همرس یا موازی ج) $۲\sqrt{RR'}$

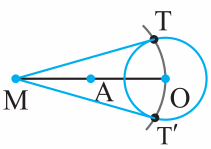
۲- آسان

آ) نادرست ب) نادرست

پ) درست ت) نادرست ث) درست

۳- متوسط

به کمک عمودمنصف **OM**، وسط این پاره‌خط را به دست می‌آوریم و آن را **A** می‌نامیم و به مرکز **A** و شعاع **OA** دایره رسم می‌کنیم تا دایره مفروض را در دو نقطه **T** و T' قطع کند و **M** را به **T** و T' وصل می‌کنیم این دو پاره‌خط مماس‌های رسم شده از **M** بر دایره هستند.

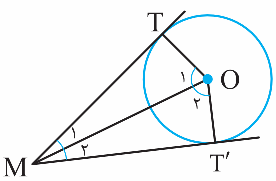


۴- آسان

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس، در نقطه تماس به خط مماس عمود است پس $\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ$

$$\left.\begin{matrix} OM=OM \text{ مشترک (وتر)} \\ OT=OT'=R \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OTM}\cong\overset{\Delta}{OT'M}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} TM=T'M \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \end{cases}$$



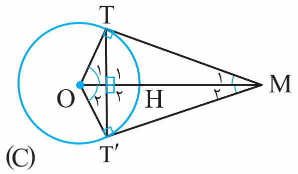
۵- دشوار

می‌دانیم طول دو مماس رسم شده از **M** بر دایره با هم برابر است و **OM** نیمساز زاویه‌های **O** و **M** است.

$$\left.\begin{aligned} &MH = MH \ \text{مشترک} \\ &\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ &MT = MT' \ \text{مماس} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{MTH} \cong \overset{\Delta}{MT'H}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} TH = T'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \end{cases}$$

یعنی **MO** عمودمنصف TT' است.



$$\left.\begin{aligned} &\hat{O}_1 = \hat{O}_1 \ \text{مشترک} \\ &T = \hat{H} = 90 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{OTM} \sim \overset{\Delta}{OTH} \xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{TM}{TH} = \frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OH}$$

$$\xrightarrow{OT=R} \frac{OM}{R} = \frac{R}{OH} \Rightarrow R^2 = OH \cdot OM$$

۶- دشوار

آ)

$$\overset{\Delta}{OTH}: \hat{O}_1 + \hat{T}_1 = 90 \Rightarrow \hat{O}_1 = 90 - \hat{T}_1 \quad (1)$$

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس داریم:

$$\hat{T} = 90 \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = 90 \Rightarrow \hat{T}_2 = 90 - \hat{T}_1 \quad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

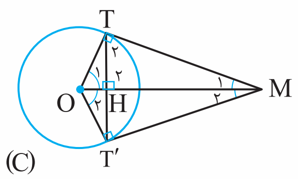
$$\hat{O}_1 = \hat{T}_2$$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{O}_1 = \hat{T}_2 \\ &\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{OTH} \sim \overset{\Delta}{THM} \xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{TH}{HM} = \frac{OT}{TM} = \frac{OH}{TH}$$

$$\Rightarrow TH^2 = OH \cdot HM \quad (3)$$

می‌دانیم **OM** عمودمنصف TT' است پس $TH = \frac{1}{2}TT'$ است که در رابطه (۳) قرار می‌دهیم.

$$(\frac{1}{2}TT')^2 = OH \cdot OM \Rightarrow TT'^2 = 4OH \cdot HM$$



ب)

$$\left.\begin{aligned} &\hat{O}_1 = \hat{O}_1 \\ &\hat{T} = \hat{H} = 90 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{OTH} \sim \overset{\Delta}{OTM} \xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{TH}{MT} = \frac{OT}{OM} = \frac{OH}{OT}$$

$$\xrightarrow{OT=R} TH \cdot OM = R \cdot MT$$

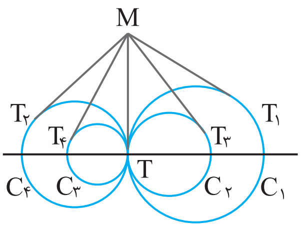
می‌دانیم $TH = \frac{1}{2}TT'$ است پس داریم:

$$\frac{1}{2}TT' \cdot OM = R \cdot MT \Rightarrow TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$$

۷- آسان

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول این مماس‌ها با هم برابرند.

$$\left.\begin{aligned} &C_1 \ \text{دایره}: MT_1 = MT \\ &C_2 \ \text{دایره}: MT_2 = MT \\ &C_3 \ \text{دایره}: MT_3 = MT \\ &C_4 \ \text{دایره}: MT_4 = MT \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \cdots$$

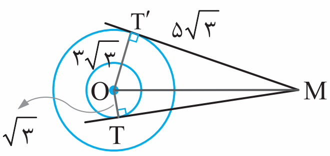


۸- متوسط

از نقطه **O** به T' و **M** وصل می‌کنیم، می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس به خط مماس عمود است پس $\hat{T} = \hat{T}' = 90°$

$$\overset{\Delta}{OT'M}: OM^2 = OT'^2 + MT'^2 = (3\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{3})^2 = 27 + 75 = 102$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{102}$$



$$\overset{\Delta}{OTM}: OM^2 = OT^2 + TM^2$$

$$\Rightarrow 102 = 3 + TM^2$$

$$\Rightarrow TM^2 = 99$$

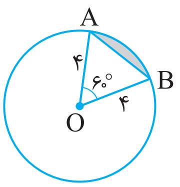
$$\Rightarrow TM = 3\sqrt{11}$$

۹- آسان

$$S_{\text{قطاع} AB} = \frac{\alpha\pi R^2}{360} = \frac{60\pi(4)^2}{360} = \frac{8}{3}\pi$$

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin 60 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{قطعه (رنگی)}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\overset{\Delta}{OAB}} = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$



۱۰- دشوار

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد کـه طـول این مماس‌ها با هم برابر هستند پس

$$BN = BR = x \quad (۱)$$

$$BC = BR + RC \Rightarrow ۵ = x + RC \Rightarrow RC = ۵ - x$$

$$CS = CR = ۵ - x$$

$$DC = DS + SC \Rightarrow ۱۲ = DC + ۵ - x \Rightarrow DC = ۷ + x$$

$$DS = DN = ۷ + x \quad (۲)$$

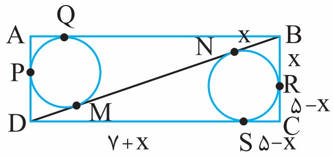
$$\overset{\Delta}{ABD} : DB^۲ = DA^۲ + AB^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow DB = ۱۳$$

$$DB = DN + BN \xrightarrow{(۲),(۱)} ۱۳ = ۷ + x + x \Rightarrow ۲x = ۶$$

$$\Rightarrow x = ۳ \Rightarrow BN = ۳$$

به همین ترتیب $DM = ۳$

$$MN = DB - (DM + BN) = ۱۳ - (۳ + ۳) \Rightarrow MN = ۷$$

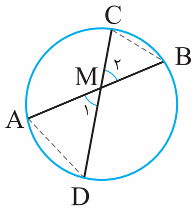


۱۱- متوسط

C را به **B** و **A** را به **D** وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} (\text{محاطی})\ \hat{A} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \text{متقابل به راس}\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{MAD} \sim \overset{\Delta}{MCB}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

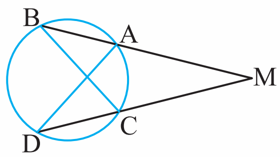


۱۲- متوسط

A را به **D** و **B** را به **C** وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی}\ \hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \text{مشترک}\ M = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{MAD} \sim \overset{\Delta}{MBC}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



۱۳- متوسط

$$\left.\begin{array}{l} MC = ۲DM \\ DC = ۹ \Rightarrow MC + MD = ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳DM = ۹ \Rightarrow DM = ۳$$

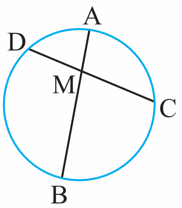
$$MC = ۶$$

اگر $MA = x$ باشد $MB = ۱۱ - x$ است، پس داریم

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow x(۱۱ - x) = ۶ \times ۳ \Rightarrow x^۲ - ۱۱x + ۱۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)(x - ۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow MA = ۲, MB = ۹ \\ x = ۹ \Rightarrow MA = ۹, MB = ۲ \end{cases}$$

پس وتر **DC**، وتر **AB** را به نسبت $\frac{۲}{۹}$ یا $\frac{۹}{۲}$ تقسیم می‌کند.

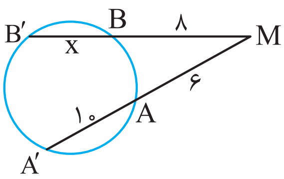


۱۴- آسان

آ)

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow ۶ \times ۱۶ = ۸(۸ + x)$$

$$\xrightarrow{\div ۸} ۱۲ = ۸ + x \Rightarrow x = ۴$$

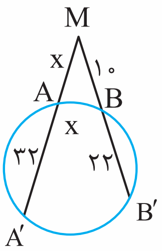


ب)

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow x(۳۲ + x) = ۱۰ \times ۳۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰ \Rightarrow (x + ۴۰)(x - ۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۴۰ \ \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۸ \end{cases}$$



۱۵- دشوار

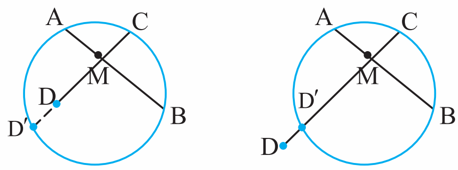
از سه نقطه غیر واقع بر خط راست **A** و **B** و **C** یک دایره عبور می‌دهیم و باید ثابت کنیم. دایره از نقطه **D** هم می‌گذرد.

برهان خلف: اگر دایره از نقطه **D** عبور نکند، پاره‌خط **CD** (یا امتداد آن را) در D' قطع می‌کند که $MD \neq MD'$

حال چون دو وتر **AB** و CD' همدیگر را در نقطه **M** درون دایره قطع کرده‌اند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MA\cdot MB = MC\cdot MD' \\ MA\cdot MB = MC\cdot MD \end{array}\right\} \Rightarrow MD = MD' \quad \text{تناقض}$$

پس فرض خلف باطل و دایره حتماً از نقطه **D** عبور می‌کند.



۱۶- دشوار

فرض کنیم شعاع دایره بزرگ‌تر **R** و شعاع دایره کوچک‌تر **r** باشد.

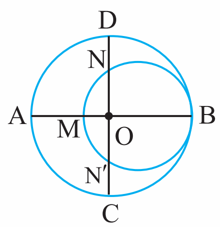
$OM = OA - AM \Rightarrow OM = R - 18$

$OB = R$

$ON = OD - DN \Rightarrow ON = R - 12$

$ON = ON' = R - 12$ به علت تقارن

دو وتر **MB** و NN' از دایره کوچک‌تر، همدیگر را در نقطه **O** داخل دایره قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:



$$MO\cdot OB = ON\cdot ON' \Rightarrow (R-18)R = (R-12)^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 18R = R^2 - 24R + 144 \Rightarrow 6R = 144 \Rightarrow R = 24$$

$$2r = MB = MO + OB = R - 18 + R = 2R - 18 = 2(24) - 18 = 30$$

$$\Rightarrow r = 15$$

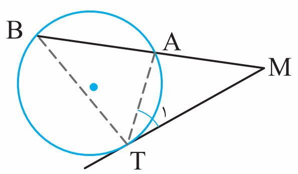
۱۷- متوسط

حکم: $MT^2 = MA\cdot MB$

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \\ \text{ظلی } \hat{T}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{T}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{اثبات بالا } \hat{B} = \hat{T}_1 \\ \text{مشترک } \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{BMT} \sim \overset{\Delta}{AMT} \xrightarrow{\text{ن.ا}} \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$$

$$\Rightarrow MT^2 = MA\cdot MB$$

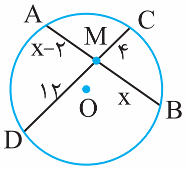


۱۸- متوسط

آ)

$$MA\cdot MB = MC\cdot MD \Rightarrow (x-2)x = 4(12) \Rightarrow x^2 - 2x = 48$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -6 \ \text{غق} \end{cases}$$

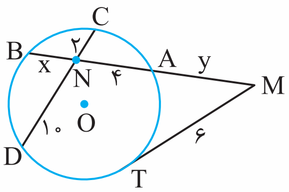


ب)

$$AN\cdot NB = CN\cdot ND \Rightarrow 4x = 2\times 10 \Rightarrow x = 5$$

$$MT^2 = MA\cdot MB \Rightarrow 36 = y(y+4+x) \xrightarrow{x=5} 36 = y^2 + 9y$$

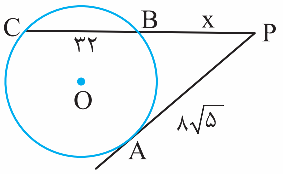
$$\Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y+12)(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -12 \ \text{غق} \\ y = 3 \end{cases}$$



۱۹- آسان

$$PA^2 = PB\cdot PC \Rightarrow (8\sqrt{5})^2 = x(32+x) \Rightarrow 320 = 32 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 32x - 320 = 0 \Rightarrow (x+40)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -40 \\ x = 8 \end{cases}$$



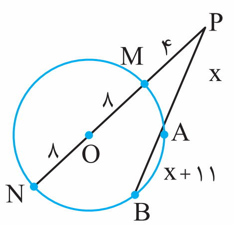
$PB = x = 8$

$PC = 32 + x = 40$

۲۰- متوسط

P را به **O** (مرکز دایره) وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه **M** و **N** قطع کند، $PM = 4$ و $PN = 16 + 4 = 20$ است و اگر $PA = x$ باشد $AB = 11$ است.

دو وتر **AB** و **MN** همدیگر را در نقطه **P** خارج دایره قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:



$PA\cdot PB = PM\cdot N$

$x(2x+11) = 4\times 20$

$\Rightarrow 2x^2 + 11x - 80 = 0$

$\Delta = 121 + 640 = 761$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2x}$

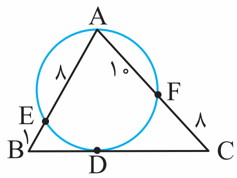
$\xrightarrow{x>0} x = \dfrac{-11 + \sqrt{761}}{4}$

۲۱- متوسط

$BD^۲ = BE\cdot BA \Rightarrow BD^۲ = ۱\times۹ = ۹ \Rightarrow BD = ۳$

$DC^۲ = FC\times CA \Rightarrow DC^۲ = ۸\times۱۸ = ۱۴۴ \Rightarrow DC = ۱۲$

$BC = BD + DC = ۳+۱۲ = ۱۵$



محیط مثلث $= AB+AC+BC = ۹+۱۸+۱۵ = ۴۲$

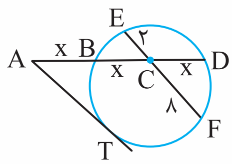
۲۲- متوسط

با فرض $AB=BC=CD=x$ داریم:

$EC\cdot CF = BC\cdot CD \Rightarrow ۲\times۸ = x\times x \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x=۴$

$AT^۲ = AB\cdot AD \Rightarrow AT^۲ = x\times ۳x \Rightarrow AT^۲ = ۳x^۲ = ۳(۴)^۲ = ۴۸$

$\Rightarrow AT = ۴\sqrt{۳}$

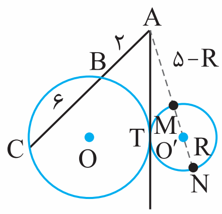


۲۳- دشوار

در دایره بزرگ‌تر داریم:

$AT^۲ = AB\cdot AC \Rightarrow AT^۲ = ۲\times(۲+۶) = ۱۶ \Rightarrow AT = ۴$

AO' را امتداد می‌دهیم تـا دایـره کوچـک‌تـر را در **N** قطع کنـد، در دایـره کوچک‌تر داریم:



$AT^۲ = AM\cdot AN$

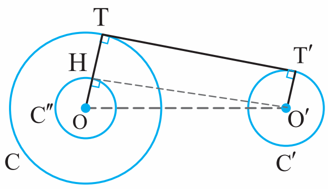
$\Rightarrow ۱۶ = (۵-R)(۵+R)$

$\Rightarrow ۱۶ = ۲۵ - R^۲$

$\Rightarrow R^۲ = ۹ \Rightarrow R = ۳$

۲۴- دشوار

فرض کنیم $R>R'$ باشد، به مرکز **O** و شعاع $(R-R')$ یک دایره به نـام C'' رسم می‌کنیم و از O' بر دایره C'' مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم، پـس **O** را به **H** وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره **C** را در **T** قطع کند. از O' هم موازی **OT** رسم می‌کنیم تا دایره C' را در T' قطع کند، پاره‌خـط TT' جواب مسئله است.



می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خـط ممـاس عمـود اسـت

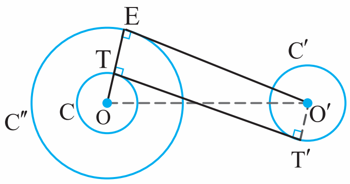
پس چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است. پس $TT'=O'H$

$\overset{\Delta}{OHO'}: OO'^۲ = OH^۲ + HO'^۲ \Rightarrow OO'^۲ = (R-R')^۲ + TT'^۲$

$\Rightarrow TT'^۲ = OO'^۲ - (R-R')^۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲}$

۲۵- دشوار

به مرکز **O** و شعاع $R+R'$ دایره C'' را رسم مـی‌کنـیم و از O' ممـاس $O'E$ را بر دایره C'' وصل می‌کنیم سپس از **O** به **E** وصل می‌کنیم تا دایـره **C** را در **T** قطع کند و از O' موازی **OE** رسم می‌کنـیم تـا دایـره C' را در T' قطع کند، پاره‌خط TT' جواب مسئله است.



می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خـط ممـاس عمـود اسـت

پـس $\hat E = \hat T = \hat T' = ۹۰^\circ$ اسـت بنـابراین چهارضلـعی $EO'T'T$ مسـتطیل است پس $TT' = EO'$

$\overset{\Delta}{OEO'}: OO'^۲ = OE^۲ + EO'^۲ \Rightarrow OO'^۲ = (R+R')^۲ + TT'$

$\Rightarrow TT'^۲ = OO'^۲-(R+R')^۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}$

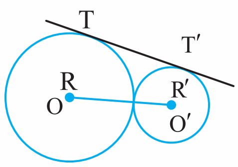
۲۶- آسان

می‌دانیم در دو دایره مماس خارج $OO' = R+R'$

$TT' = \sqrt{OO'-(R-R')^۲} \Rightarrow TT' = \sqrt{(R+R')^۲-(R-R')^۲}$

$= \sqrt{R^۲+۲RR'+R'^۲-R^۲+۲RR'-R'^۲}$

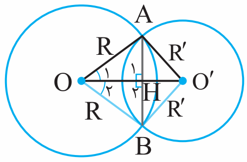
$\Rightarrow TT' = \sqrt{۴RR'} \Rightarrow TT' = ۲\sqrt{RR'}$



۲۷- آسان

O و O' را به **B** وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB=R\\ O'A=O'B=R'\\ OO'=OO'\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\triangle}{OAB}\cong \overset{\triangle}{O'AB} \xrightarrow{\text{ا.م}} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$



$$\left.\begin{array}{l} OA=OB=R\\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\ \text{اثبات بالا}\\ OH=OH\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\triangle}{OAH}\cong \overset{\triangle}{OBH}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} AH=BH\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰\end{cases} \Rightarrow OO'\ \text{عمودمنصف}\ AB\ \text{است}$$

روش دوم: می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است و برعکس

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB=R \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} O\ \text{روی عمودمنصف}\ AB\\ O'A=O'B=R' \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} O'\ \text{روی عمودمنصف}\ AB\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow OO'\ \text{عمودمنصف}\ AB$$

۲۸- متوسط

طول مماس مشترک داخلی را $EE'=\sqrt{۱۵}$ و طول مماس خارجی را $TT'=۳\sqrt{۷}$ فرض می‌کنیم $(R>R')$

$$EE'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲} \Rightarrow \sqrt{۱۵}=\sqrt{۶۴-(R+R')^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۵=۶۴-(R+R')^۲ \Rightarrow (R+R')^۲=۴۹ \Rightarrow R+R'=۷ \quad (۱)$$

$$TT'^۲=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۳\sqrt{۷}=\sqrt{۶۴-(R-R')^۲}$$

$$\Rightarrow ۶۳=۶۴-(R-R')^۲ \Rightarrow (R-R')^۲=۱ \Rightarrow R-R'=۱ \quad (۲)$$

$$\begin{cases} R+R'=۷\\ R-R'=۱\end{cases} \Rightarrow R=۴, R'=۳$$

۲۹- متوسط

با فرض $R>R'$ داریم:

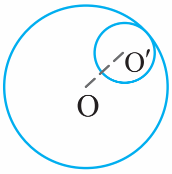
$$OO'=R-R' \Rightarrow ۲=R-R' \quad (۱)$$

$$S_{\text{رنگی}}=\pi R^۲-\pi R'^۲ \Rightarrow ۱۶\pi=\pi(R^۲-R'^۲)$$

$$\Rightarrow ۱۶=\underbrace{(R-R')}_{۲}(R+R') \Rightarrow R+R'=۸ \quad (۲)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} R-R'=۲\\ R+R'=۸\end{cases} \Rightarrow R=۵\ ,\ R'=۳$$



۳۰- دشوار

چهار ضلعی‌های **MNBA** و **PQCB** و **ACRS** همگی مستطیل هستند و چون $AB=BC=AC=۲r$ است پس $MN=PQ=RS=۲r$ می‌باشد.

$$\hat{A}_۱+۹۰+۶۰+۹۰=۳۶۰ \Rightarrow \hat{A}_۱=۱۲۰$$

$$|\widehat{MS}|=\frac{\alpha\pi R}{۱۸۰}=\frac{۱۲۰\pi r}{۱۸۰}=\frac{۲}{۳}\pi r$$

به همین ترتیب $|\widehat{NP}|=|\widehat{RQ}|=\frac{۲}{۳}\pi$

$$\text{طول نخ}=MN+PQ+RS+|\widehat{MS}|+|\widehat{RQ}|+|\widehat{NP}|$$

$$\Rightarrow L=۳MN+۳|\widehat{MS}| \Rightarrow L=۶r+۲\pi r$$

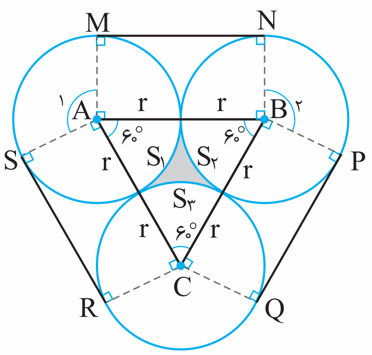
مثلث **ABC**، یک مثلث متساوی‌الساقین به ضلع $۲r$ است.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲=r^۲\sqrt{۳}$$

$$S_۱=S_۲=S_۳=\frac{\alpha r^۲}{۳۶۰}=\frac{۶۰\pi r^۲}{۳۶۰}=\frac{۱}{۶}\pi r^۲$$

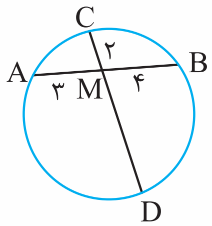
$$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-(S_۱+S_۲+S_۳)=r^۲\sqrt{۳}-\frac{۱}{۲}\pi r^۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=r^۲(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$$



۱- گزینهٔ «۳» آسان

چون دو وتر **AB** و **CD** همدیگر را داخل دایره قطع کرده‌اند داریم:



$$MA\cdot MB = MC\cdot MD$$
$$\Rightarrow\ ۳\times ۴ = ۲\times MD \Rightarrow\ MD = ۶$$
$$CD = MC + MD = ۲+۶ = ۸$$

۲- گزینهٔ «۲» آسان

اگر شعاع دایره **R** باشد:

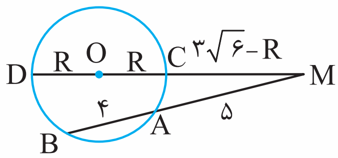
$$MO = MC + OC \ \Rightarrow\ ۳\sqrt{۶} = MC + R \ \Rightarrow\ MC = ۳\sqrt{۶} - R$$

دو وتر **DC** و **AB** همدیگر را در نقطه **M** خارج دایره قطع کـرده‌انـد، بنـابراین

داریم:

$$MC\cdot MD = MA\cdot MB \ \Rightarrow\ (۳\sqrt{۶}-R)(۳\sqrt{۶}+R) = ۵\times ۹$$

$$\Rightarrow\ ۵۴ - R^۲ = ۴۵ \ \Rightarrow\ R^۲ = ۹ \ \Rightarrow\ R = ۳$$



۳- گزینهٔ «۳» متوسط

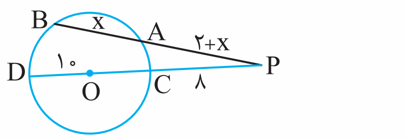
P را به **O** وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایـره را در نقـاط **C** و **D** قطـع کند **PC** کمترین فاصله نقطه **P** تـا دایـره اسـت کـه $PC = ۸$ اسـت و اگـر $AB = x$ باشد $PA = ۲+x$ است.

چون دو وتر **AB** و **DC** همدیگر را در نقطه **P** خارج دایره قطع کرده‌اند، داریم:

$$PA\cdot PB = PC\cdot PD \ \Rightarrow\ (x+۲)(۲x+۲) = ۸\times ۱۸$$

$$\Rightarrow\ ۲x^۲ + ۶x - ۱۴۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + ۳x - ۷۰ = ۰$$

$$\Rightarrow\ (x-۷)(x+۱۰) = ۰ \ \Rightarrow\ \begin{cases} x = -۱۰ & \text{غ ق ق} \\ x = ۷ \end{cases}$$

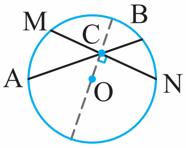


۴- گزینهٔ «۳» دشوار

$$\left.\begin{array}{l} AC = ۲BC \\ AB = ۹ \ \Rightarrow\ AC + BC = ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow\ ۳BC = ۹ \ \Rightarrow\ BC = ۳, AC = ۶$$

کوتاه‌ترین وتر دایره که از نقطه **C** می‌گذرد وتری است که بـر قطـر عبـوری از نقطه **C** عمود باشد (MN) که در این صورت $MC = CN = x$

چون دو وتر **AB** و **MN** همدیگر را در نقطه **C** داخل دایره قطع کرده‌اند، داریم:



$$MC\cdot CN = AC\cdot CB \ \Rightarrow\ x^۲ = ۳\times ۶$$
$$\Rightarrow\ x = ۳\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow\ MN = ۲x = ۶\sqrt{۲}$$

۵- گزینهٔ «۲» دشوار

$$\overset{\frown}{AB} = ۶۰ \ \Rightarrow\ AB = R$$

P را به **O** وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایـره را در نقـاط **C** و **D** قطـع کند **PD** بیشترین فاصله نقطه **P** تا دایره است که $PD = ۳R$

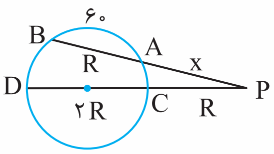
$$PC = PD - DC = ۳R - ۲R \Rightarrow PC = R$$

دو وتر **AB** و **CD** همدیگر را در نقطه **P** خارج دایره قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$PA\cdot PB = PC\cdot PD \ \Rightarrow\ x(x+R) = R\times ۳R \ \Rightarrow\ x^۲ + Rx - ۳R^۲ = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = R^۲ - ۴(۱)(-۳R^۲) = R^۲ + ۱۲R^۲ = ۱۳R^۲$$

$$x = \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-R\mp\sqrt{۱۳}R}{۲} \ \Rightarrow\ \begin{cases} x = \frac{۱}{۲}(-۱-\sqrt{۱۳})R & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)R \end{cases}$$



۶- گزینهٔ «۴» دشوار

O را به **M** وصل می‌کنیم در دایره کوچک‌تر $O\hat{M}D$ محاطی رو به قطر است پـس $\hat{M} = ۹۰^\circ$ و چـون از مرکـز دایـره بـزرگ‌تـر بـه وتـر **CD** عمـود کـرده‌ایـم $MC = MD$

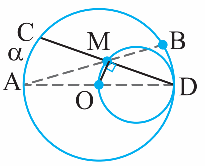
$$|\overset{\frown}{AC}| = \alpha R \ \Rightarrow\ \frac{۴}{۳}\pi = \alpha\times ۴ \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{۳} \ \Rightarrow\ \alpha = ۶۰^\circ$$

محاطی $\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۶۰}{۲} \ \Rightarrow\ \hat{D} = ۳۰^\circ$

$$\overset{\Delta}{OMD} : \cos\hat{D} = \frac{MD}{OD} \ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{MD}{۴} \ \Rightarrow\ MD = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\ MD = MC = ۲\sqrt{۳}$$

دو وتر **CD** و **AB** از دایره بزرگ‌تر همدیگر را در نقطه **M** قطع کرده‌اند، پس داریم:



$$MA\cdot MB = MC\cdot MD$$
$$\Rightarrow\ MA\cdot MB = (۲\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳})$$
$$\Rightarrow\ MA\cdot MB = ۱۲$$

۷- گزینهٔ «۲» دشوار

پاره‌خط **OP** را از هر دو سمت امتداد می‌دهیم تا دایره بزرگ‌تر را در **M** و **N** قطع کند، می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $O'P \perp BC$ است و چون $BC \parallel OA$ است پس $OP' \perp OA$ است و در مثلث **OPA**، **OP** هم میانه و هم ارتفاع است پس این مثلث متساوی الساقین است $(OP = PA)$ و زاویه $O\hat{P}A$ محاطی و رو به قطر است پس قائمه است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است بنابراین $OP = ۴$

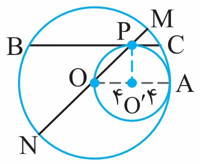
$$\overset{\triangle}{OPO'} : OP^۲ = O'P^۲ + OO'^۲ = ۱۶ + ۱۶ = ۳۲ \Rightarrow OP = ۴\sqrt{۲}$$

$$NP = ON + OP = ۸ + ۴\sqrt{۲}$$

$$PM = OM - OP = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

برای دو وتر **BC** و **MN** داریم:

$$PB \times PC = PN \times PM = (۸ + ۴\sqrt{۲})(۸ - ۴\sqrt{۲}) = ۶۴ - ۳۲ = ۳۲$$



۸- گزینهٔ «۲» دشوار

اگر $AM = x$ و $NB = y$ باشد، برای دو وتر **AB** و **CD** داریم:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD \Rightarrow x(۷ + y) = ۶ \times ۱۰$$

$$\Rightarrow ۷x + xy = ۶۰ \quad (۱)$$

برای دو وتر **AB** و **EF** داریم:

$$AN \cdot NB = EN \cdot NF \Rightarrow (x + ۷)y = ۵ \times ۱۲$$

$$\Rightarrow xy + ۷y = ۶۰ \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

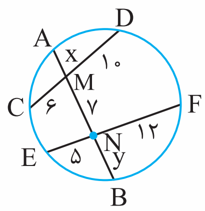
$$۷x + xy = ۷y + xy \Rightarrow ۷x = ۷y \Rightarrow x = y$$

بنا به رابطه (۱) داریم:

$$۷x + xy = ۶۰ \xrightarrow{x=y} x^۲ + ۷x - ۶۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (x + ۱۲)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱۲ & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۵ \end{cases}$$

$$AB = AM + MN + NB = x + ۷ + x = ۲x + ۷ \xrightarrow{x=۵} AB = ۱۷$$



۹- گزینهٔ «۳» دشوار

فرض کنیم شعاع دایره بزرگ‌تر **R** و شعاع دایره کوچک‌تر **r** باشد.

$$OM = OA - AM \Rightarrow OM = R - ۱۶$$

$$OB = R$$

$$ON = OD - DN \Rightarrow ON = R - ۱۰$$

$$ON = ON' = R - ۱۰ \quad \text{به علت تقارن}$$

دو وتر **MB** و NN' از دایره کوچک‌تر، همدیگر را در نقطه **O** داخل دایره قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:

$$MO \cdot OB = ON \cdot ON'$$

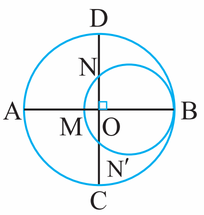
$$\Rightarrow (R - ۱۶)R = (R - ۱۰)^۲$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۱۶R = R^۲ - ۲۰R + ۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$۲r = MB = MO + OB = R - ۱۶ + R$$

$$= ۲R - ۱۶ = ۲(۲۵) - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow r = ۱۷$$



۱۰- گزینهٔ «۱» متوسط

روش اول:

$$\left.\begin{aligned} ۲AP &= PB \\ AB = ۶ \Rightarrow AP + PB &= ۶ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۳AP = ۶ \Rightarrow AP = ۲, PB = ۴$$

O را به **P** وصل می‌کنیم و از هر دو سمت امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه **C** و **D** قطع کند اگر $OP = x$ باشد $DP = DO + OP = ۵ + x$ و $PC = OC - OP = ۵ - x$، برای دو وتر **AB** و **CD** داریم:

$$AP \times PB = PD \times PC \Rightarrow ۲ \times ۴ = (۵ + x)(۵ - x)$$

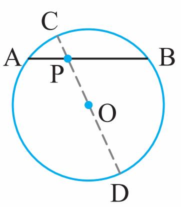
$$\Rightarrow ۸ = ۲۵ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۷ \Rightarrow x = \sqrt{۱۷}$$

روش دوم:

نکته: اگر نقطه **P** روی وتر **AB** در داخل دایره‌ای به شعاع **R** باشد، و فاصله نقطه **P** از مرکز دایره برابر **x** باشد آن‌گاه $x^۲ = R^۲ - PA \times PB$ است.

بنابراین داریم:

$$x^۲ = ۵^۲ - ۲ \times ۴ = ۲۵ - ۸ = ۱۷ \Rightarrow x = \sqrt{۱۷}$$



۱۱- گزینهٔ «۱» — متوسط

روش اول: **P** را به **O** وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط **M** و **N** قطع کند اگر فرض کنیم $PM = x$ در این صورت $PN = ۱۶ + x$ است

برای دو وتر **AB** و **MN** داریم

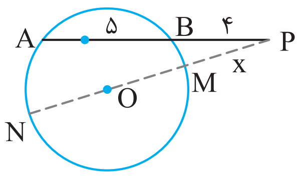
$$PA\cdot PB = PM\cdot PN \Rightarrow ۹\times ۴ = x(۱۶+x) \Rightarrow ۳۶ = ۱۶x + x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۱۶x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x+۱۸)(x-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -۱۸ & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۲ \end{cases}$$

روش دوم: اگر نقطه **P** در امتداد وتر **AB** و خارج از دایره‌ای به شعاع **R** قرار داشته باشد، فاصله نقطه **P** از مرکز این دایره $(OP = d)$ از دستور $d^۲ = R^۲ + PA\times PB$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$d^۲ = R^۲ + AP\times BP = ۶۴ + ۹\times ۴ = ۱۰۰ \Rightarrow d = ۱۰$$



۱۲- گزینهٔ «۲» — دشوار

برای دو وتر **AB** و **CD** داریم:

$$PA\times PB = PC\times PD \Rightarrow ۲\times ۱۲ = ۸\times PD \Rightarrow PD = ۳$$

از مرکز دایره به **AB** و **CD** عمود می‌کنیم می‌دانیم این عمودها، وترهای **AB** و **CD** را نصف می‌کنند.

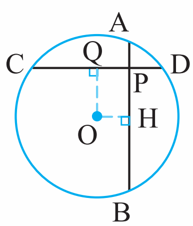
$$BH = HA = \frac{AB}{۲} = \frac{AP+PB}{۲} = \frac{۲+۱۲}{۲} = ۷$$

$$PH = PB - BH = ۱۲ - ۷ = ۵$$

$$CQ = QD = \frac{CD}{۲} = \frac{CP+PD}{۲} = \frac{۸+۳}{۲} = ۵/۵$$

$$PQ = CP - CQ = ۸ - ۵/۵ = ۲/۵$$

در مستطیل **QPHO**، **OP** قطر مستطیل است پس داریم:

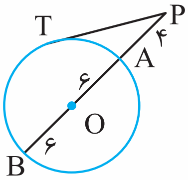


$$OP = \sqrt{PH^۲ + PQ^۲} = \sqrt{۲۵ + \frac{۲۵}{۴}} = \sqrt{\frac{۱۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۵}$$

۱۳- گزینهٔ «۴» — آسان

هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است پس داریم:

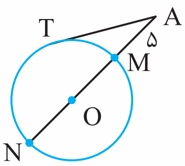
$$PT^۲ = PA\times PB \Rightarrow PT^۲ = ۴\times ۱۶ = ۶۴ \Rightarrow PT = ۸$$



۱۴- گزینهٔ «۱» — متوسط

A را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در ۲ نقطه **M** و **N** قطع کند **AM** نزدیک‌ترین و **AN** دورترین فاصله **A** تا دایره است که $AN = ۹$ و $AM = ۵$ است.

هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است پس داریم:



$$AT^۲ = AM\times AN = ۵\times ۹ \Rightarrow AT = ۳\sqrt{۵}$$

$$۲R = MN = AN - AM = ۹ - ۵ = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

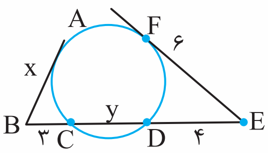
$$\frac{AT}{R} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۵- گزینهٔ «۳» — متوسط

هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است پس داریم:

$$EF^۲ = ED\times EC \Rightarrow ۶^۲ = ۴(۴+y) \xrightarrow{\div ۴} ۹ = ۴ + y \Rightarrow y = ۵$$

$$AB^۲ = BC\times BD \Rightarrow x^۲ = ۳(۳+۵) \Rightarrow x^۲ = ۲۴ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۶}$$



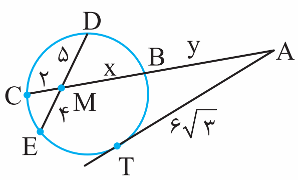
۱۶- گزینهٔ «۱» — متوسط

دو وتر **BC** و **DE** همدیگر را در نقطه **M** داخل دایره قطع کرده‌اند بنابراین داریم:

$$CM\times MB = EM\cdot MD \Rightarrow ۲\times x = ۴\times ۵ \Rightarrow x = ۱۰$$

$$AT^۲ = AB\times AC \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = y(y+۱۰+۲) \Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۱۰۸ = ۰$$

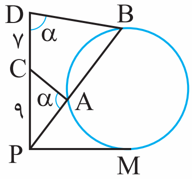
$$\Rightarrow (y-۶)(y+۱۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۶ \\ y = -۱۸ & \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$



۱۷- گزینهٔ «۴» — دشوار

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{D}=\alpha \ \text{فرض} \\ \hat{P}=\hat{P} \ \text{مشترک}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{PAC} \sim \overset{\triangle}{PDB}$$

$$\xrightarrow{\text{ام}} \frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB} \Rightarrow \frac{PA}{۱۶}=\frac{۹}{PB} \Rightarrow PA\cdot PB=۱۴۴$$



$$PM^{۲}=PA\times PB=۱۴۴ \Rightarrow PM=۱۲$$

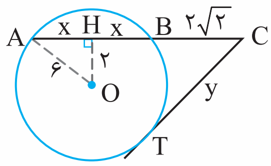
۱۸- گزینهٔ «۱» — متوسط

می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر از همان دایره، عمود کنیم، این پاره‌خط وتر را نصف می‌کند پس $AH=HB=x$

$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲}=AH^{۲}+OH^{۲} \Rightarrow ۶^{۲}=x^{۲}+۲^{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۲}=۳۲ \Rightarrow x=۴\sqrt{۲}$$

$$TC^{۲}=BC\times AC \Rightarrow y^{۲}=۲\sqrt{۲}(۱۰\sqrt{۲})=۴۰ \Rightarrow y=۲\sqrt{۱۰}$$



۱۹- گزینهٔ «۳» — متوسط

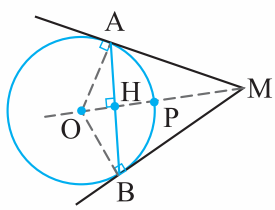
می‌دانیم **OM** عمودمنصف **AB** است $(\hat{H}=۹۰)$ و شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است $(\hat{A}=\hat{B}=۹۰^{\circ})$

$$OM=MP+R=۴\sqrt{۲}-۴+۴=۴\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^{۲}=OA^{۲}+AM^{۲} \Rightarrow ۳۲=۱۶+AM^{۲}$$

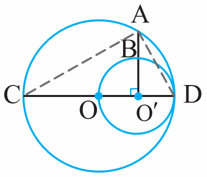
$$\Rightarrow AM^{۲}=۱۶ \Rightarrow AM=۴$$

پس مثلث **OAM** $(\hat{A}=۹۰, AM=OA=۴)$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس ارتفاع **AH** میانه هم می‌باشد بنابراین $OH=\frac{OM}{۲}=۲\sqrt{۲}$



۲۰- گزینهٔ «۴» — دشوار

از **A** به سر قطری که از **C** و **D** می‌گذرد وصل می‌کنیم زاویه $C\hat{A}D$ محاطی روبه‌رو به قطر است پس $C\hat{A}D=۹۰^{\circ}$ و AO' ارتفاع وارد بر وتر **CD** است.



اگر شعاع دایره کوچک‌تر **R** باشد شعاع دایره بزرگ‌تر $۲R$ است پس داریم:

$$O'D=R$$

$$CO'=CO+OO'=۲R+R=۳R$$

$$AO'=AB+BO'=۹-۳\sqrt{۳}+R$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم

$$AO'^{۲}=O'C\times O'D \Rightarrow (۹-۳\sqrt{۳}+R)^{۲}=۳R\times R$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} ۹-۳\sqrt{۳}+R=\sqrt{۳}R \Rightarrow ۹-۳\sqrt{۳}=(\sqrt{۳}-۱)R$$

$$\Rightarrow R=\frac{۹-۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱} \Rightarrow R=\frac{۹\sqrt{۳}+۹-۹-۳\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow R=۳\sqrt{۳}$$

شعاع دایره بزرگ‌تر $=۲R=۶\sqrt{۳}$

۲۱- گزینهٔ «۲» — متوسط

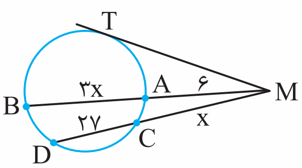
اگر $MC=x$ باشد، $AB=۳x$ است و امتداد دو وتر **AB** و **CD** همدیگر را در نقطه **M** قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$MA\cdot MB=MC\cdot MD \Rightarrow ۶(۶+۳x)=x(x+۲۷)$$

$$\Rightarrow ۳۶+۱۸x=x^{۲}+۲۷x \Rightarrow x^{۲}+۹x-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱۲)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱۲ \ \text{غق} \\ x=۳ \Rightarrow AB=۹\end{cases}$$

$$MT^{۲}=MA\cdot MB \Rightarrow MT^{۲}=۶(۶+۹)=۹۰ \Rightarrow MT=۳\sqrt{۱۰}$$



۲۲- گزینهٔ «۳» — آسان

$$\left.\begin{array}{l}R+R'=۷+۳=۱۰ \\ |R-R'|=۷-۳=۴ \\ OO'=۸\end{array}\right\} \Rightarrow |R-R'|<OO'<R+R'$$

$\Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

۲۳- گزینهٔ «۴»
آسان

اگر دو دایره مماس برون باشند $OO' = R + R'$ است بنابراین داریم:

$$۳x-۳=۲x+۳-۱ \Rightarrow ۳x-۳=۲x+۲ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow R=۸, R'=۴$$

۲۴- گزینهٔ «۲»
دشوار

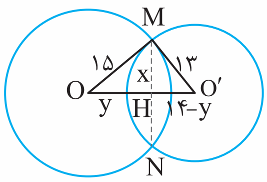
چون $|R-R'|<OO'<R+R'$ است پس دو دایره متقاطع هستند و می‌دانیم OO' عمودمنصف **MN** است $(MH=NH)$ اگر فرض کنیم $MH=x$، $OH=y$ آن‌گاه $HO'=۱۴-y$ است.

$$\overset{\triangle}{OMH} = OM^۲=OH^۲+MH^۲ \Rightarrow ۲۲۵=y^۲+x^۲ \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{O'MH}: O'M^۲=MH^۲+HO'^۲ \Rightarrow ۱۶۹=x^۲+(۱۴-y)^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶۹=\underbrace{x^۲+y^۲}_{۲۲۵}-۲۸y+۱۹۶ \Rightarrow ۲۸y=۲۵۲ \Rightarrow y=۹$$

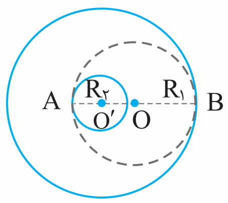
$$\text{(۱) رابطه}: ۲۲۵=۸۱+x^۲ \Rightarrow x^۲=۱۴۴ \Rightarrow x=۱۲ \Rightarrow MN=۲x=۲۴$$



۲۵- گزینهٔ «۱»
آسان

چون $OO'=d<|R-R'|$ است دو دایره متداخل هستند، که **AB** قطر بزرگ‌ترین دایره‌ای است که به هر دو دایره مماس است که داریم:

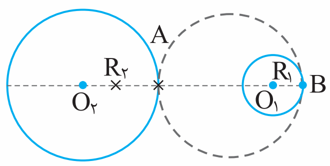
$$۲r=AB=R_۲+OO'+R_۱=۱+۲+۷=۱۰ \Rightarrow r=۵$$



۲۶- گزینهٔ «۳»
آسان

چون $OO'>R+R'$ است، دو دایره متخارج هستند و اگر شعاع دایره موردنظر **r** باشد، داریم:

$$۲r=AB=O_۱O_۲+R_۱-R_۲=۱۰+۲-۶=۶ \Rightarrow r=۳$$

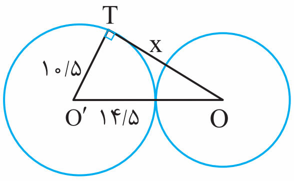


۲۷- گزینهٔ «۴»
آسان

چون دو دایره مماس بـرون هستند $OO'=R+R'=۱۴/۵$ و می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $\hat{T}=۹۰^\circ$ است.

$$\overset{\triangle}{OO'T}: OO'^۲=O'T^۲+OT^۲ \Rightarrow (۱۴/۵)^۲=(۱۰/۵)^۲+x^۲$$

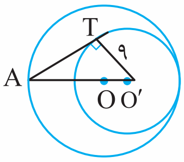
$$\Rightarrow ۲۱۰/۲۵=۱۱۰/۲۵+x^۲ \Rightarrow x^۲=۱۰۰ \Rightarrow x=۱۰$$



۲۸- گزینهٔ «۳»
آسان

چون دو دایره مماس درون هستند، $OO'=|R-R'|=۳$ و می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است $(\hat{T}=۹۰^\circ)$

$$O'A=OO'+R=۳+۱۲=۱۵$$



$$\overset{\triangle}{O'AT}: AO'^۲=AT^۲+O'T^۲$$

$$\Rightarrow ۲۲۵=AT^۲+۸۱$$

$$\Rightarrow AT^۲=۱۴۴ \Rightarrow AT=۱۲$$

۲۹- گزینهٔ «۱»
متوسط

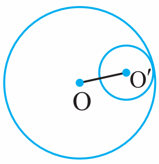
فرض کنیم شعاع دایره بزرگ‌تر **R** و شعاع دایره کوچک‌تر R' باشند.

$$OO'=R-R' \Rightarrow ۳/۵=R-R'$$

$$S_{\text{رنگی}}=\pi R^۲-\pi R'^۲ \Rightarrow ۲۱\cancel{\pi}=\cancel{\pi}(R^۲-R'^۲)$$

$$\Rightarrow ۲۱=\underbrace{(R-R')}_{۳/۵}(R+R') \Rightarrow R+R'=۶$$

$$\begin{cases} R+R'=۶ \\ R-R'=۳/۵ \end{cases} \Rightarrow R=۴/۷۵, R'=۱/۲۵$$



۳۰- گزینهٔ «۳»
آسان

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۱۵=\sqrt{OO'^۲-(۱۴-۶)^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۲۵=OO'^۲-۶۴ \Rightarrow OO'^۲=۲۸۹ \Rightarrow OO'=۱۷$$

۳۱- گزینهٔ «۳»
آسان

$$TT'=\sqrt{OO'-(R+R')^۲} \Rightarrow ۴\sqrt{۶}=\sqrt{OO'^۲-(۵+۵)^۲}$$

$$\Rightarrow ۹۶=OO'-۱۰۰ \Rightarrow OO'^۲=۱۹۶ \Rightarrow OO'=۱۴$$

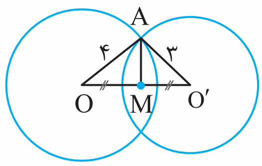
۳۲- گزینه «۳» — متوسط

می‌دانیم فقط در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است ($AM=\frac{۱}{۲}OO'$ میانه) پس $\hat{A}=۹۰^\circ$ است.

$$\overset{\Delta}{OAO'}: OO'^{۲}=OA^{۲}+O'A^{۲}=۱۶+۹=۲۵ \Rightarrow OO'=۵$$

مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}=\sqrt{۵^{۲}-(۴-۳)^{۲}}$

$$=\sqrt{۲۵-۱}=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$



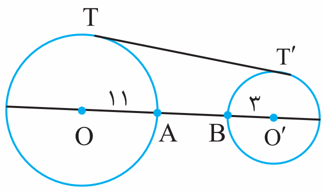
۳۳- گزینه «۳» — آسان

$$TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}} \Rightarrow ۳\sqrt{۳۳}=\sqrt{OO'^{۲}-(۱۱-۳)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۲۹۷=OO'^{۲}-۶۴ \Rightarrow OO'^{۲}=۳۶۱ \Rightarrow OO'=۱۹$$

کمترین فاصله بین دو دایره طول پاره‌خط **AB** است که داریم:

$$AB=OO'-(R+R')=۱۹-(۱۱+۳)=۱۹-۱۴=۵$$



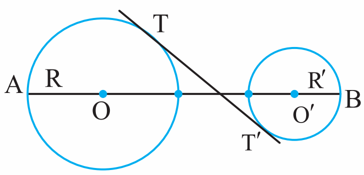
۳۴- گزینه «۲» — متوسط

$$TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R+R')^{۲}} \Rightarrow ۴\sqrt{۶}=\sqrt{OO'^{۲}-(۷+۳)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۹۶=OO'^{۲}-۱۰۰ \Rightarrow OO'^{۲}=۱۹۶ \Rightarrow OO'=۱۴$$

بیش‌ترین فاصله بین دو دایره طول پاره‌خط **AB** است که داریم:

$$AB=R+OO'+R'=۷+۱۴+۳=۲۴$$



۳۵- گزینه «۴» — آسان

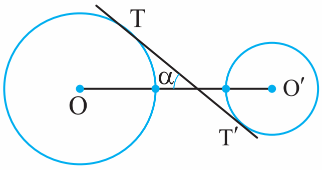
می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون از دستور $TT'=۲\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید اگر فرض کنیم $R>R'$ داریم:

$$TT'=۲\sqrt{RR'} \Rightarrow \sqrt{۲}R=۲\sqrt{RR'} \Rightarrow ۲R^{۲}=۴RR' \Rightarrow R=۲R'$$

۳۶- گزینه «۳» — متوسط

اگرزاویه بین مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین α باشد، $\sin\alpha=\frac{R+R'}{OO'}$ است بنابراین داریم:

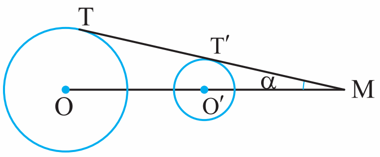
$$\sin ۳۰=\frac{۲۲/۵+۷/۵}{OO'} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۳۰}{OO'} \Rightarrow OO'=۶۰$$



۳۷- گزینه «۲» — متوسط

اگر زاویه بین مماس مشترک خارجی و خط‌المرکزین α باشد، $\sin\alpha=\frac{|R-R'|}{OO'}$ است، بنابراین داریم:

$$\sin ۳۰=\frac{|۳۰-۷/۵|}{OO'} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۲۲/۵}{OO'} \Rightarrow OO'=۴۵$$



۳۸- گزینه «۳» — آسان

می‌دانیم دو دایره در حالت‌های متخارج و مماس خارج، مماس مشترک داخلی دارند و در حالت مماس مشترک برون، مماس مشترک داخلی بر خط المرکزین عمود است، بنابراین دو دایره متخارج هستند.

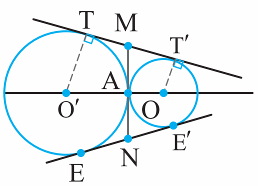
۳۹- گزینه «۱» — متوسط

می‌دانیم اگر دو دایره مماس برون باشند

$$TM=MT'=EN=NE'=MA=AN=\sqrt{RR'}$$

بنابراین داریم

$$MA=\sqrt{RR'}=\sqrt{۹\times۴}=\sqrt{۳۶} \Rightarrow MA=۶$$



۴۰- گزینه «۴» — آسان

اگر دو دایره به شعاع‌های **R** و R' مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $۲\sqrt{RR'}$ است بنابراین داریم: $(R>R')$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}R=۲\sqrt{RR'} \Rightarrow \frac{۳}{۴}R^{۲}=۴RR' \Rightarrow R=\frac{۱۶}{۳}R'$$

۴۱- گزینهٔ «۲» دشوار

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین $OT \perp AT'', O'T' \perp AT'', O''T'' \perp AT''$ است پس $OT \parallel O'T' \parallel O''T$

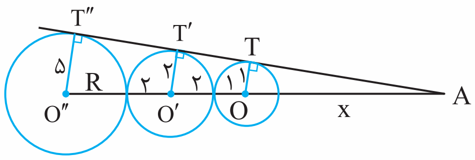
$$\overset{\Delta}{O'T'A}: OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AO}{AO'} = \frac{OT}{O'T'}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳+x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۳+x \Rightarrow x = ۳$$

$$\overset{\Delta}{O''T''A}: O''T'' \parallel OT \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{AO''} = \frac{OT}{O''T''}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۵+R} = \frac{۱}{R} \xrightarrow{x=۳} \frac{۳}{۸+R} = \frac{۱}{R} \Rightarrow ۳R = ۸+R$$

$$\Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴$$



۴۲- گزینهٔ «۲» دشوار

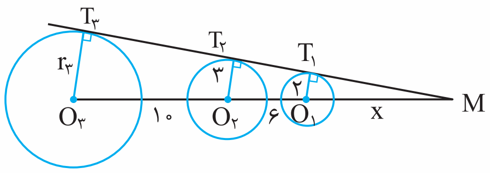
می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس به خط مماس عمود است پس $O_1T_1 \perp MT_3$ و $O_2T_2 \perp MT_3$ و $O_3T_3 \perp MT_3$ است بنابراین $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$

$$\overset{\Delta}{O_2T_2M}: O_2T_2 \parallel O_1T_1 \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO_1}{MO_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲x+۱۲ \Rightarrow x = ۱۲$$

$$\overset{\Delta}{O_3T_3M}: O_1T_1 \parallel O_3T_3 \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO_1}{MO_3} = \frac{O_1T_1}{OT_3}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{۲۸} = \frac{۲}{r_3} \Rightarrow ۱۲r_3 = ۵۶ \Rightarrow r_3 = \frac{۱۴}{۳}$$



۴۳- گزینهٔ «۱» دشوار

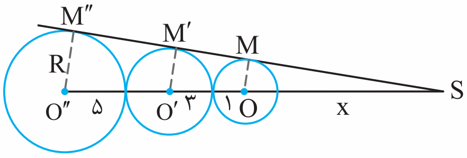
فرض **SM** یکی از خطوطی می‌باشد که به هر سه دایره مماس است، چون **OM**، $O'M'$ و $O''M''$ بر **SM** عمودند پس $OM \parallel O'M' \parallel O''M''$

$$\overset{\Delta}{O'M'S}: OM \parallel O''M'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{SO}{SO'} = \frac{OM}{O'M'}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۴} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳x = x+۴ \Rightarrow x = ۲$$

$$\overset{\Delta}{SO''M''}: OM \parallel O''M'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OS}{O''S} = \frac{OM}{O''M''} \Rightarrow \frac{۲}{۱۵} = \frac{۱}{۵} \text{ غقق}$$

بنابراین چنین خطی وجود ندارد.



۴۴- گزینهٔ «۴» دشوار

می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایره که مماس درون باشند از دستور $۲\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید.

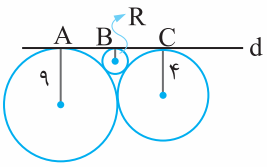
$$AB = ۲\sqrt{۹R} = ۶\sqrt{R}$$

$$BC = ۲\sqrt{۴R} = ۴\sqrt{R}$$

$$AC = ۲\sqrt{۹\times۴} = ۱۲$$

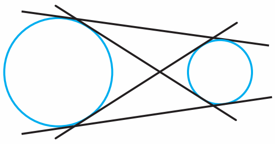
$$AC = AB + BC \Rightarrow ۱۲ = ۶\sqrt{R} + ۴\sqrt{R} \Rightarrow ۱۲ = ۱۰\sqrt{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R} = ۱/۲ \Rightarrow R = ۱/۴۴$$



۴۵- گزینهٔ «۱» متوسط

$$\left.\begin{array}{l} R+R' = ۵+۳ = ۸ \\ OO' = ۱۱ \end{array}\right\} \Rightarrow OO' > R+R' \Rightarrow$$ دو دایره متخارج هستند



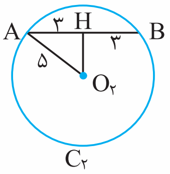
۴۶- گزینهٔ «۳» دشوار

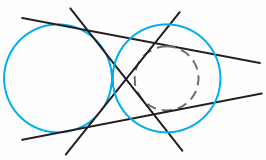
فرض **AB** یکی از وترها به طول ۶ در دایره C_2 باشد، اگر از مرکز این دایره بر **AB** عمود کنیم، طول آن را نصف می‌کند، پس $AH = HB = ۳$

$$\overset{\Delta}{OAH}: O_2A^2 = O_2H^2 + AH^2 \Rightarrow ۲۵ = O_2H^2 + ۹$$

$$\Rightarrow O_2H^2 = ۱۶ \Rightarrow O_2H = ۴$$

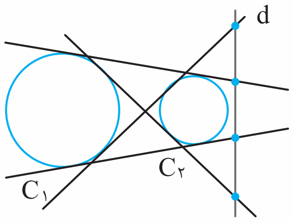
چنانچه از نقطه O_2 دایره‌ای به شعاع ۴ رسم کنیم (دایره C_3)، هر وتر از دایره C_2 که به دایره C_3 مماس باشد طول ۶ دارد، بنابراین جواب مسئله تعداد مماس مشترک‌ها بین دایره C_1 و C_3 است که چون دو دایره متخارج هستند، ۴ مماس مشترک دارند.





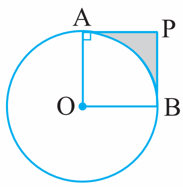
۴۷- گزینهٔ «۳» — متوسط

دو دایره چون متخارج هستند، ۴ مماس مشترک دارند که هر ۴ مماس خط **d** را قطع می‌کنند پس مسئله ۴ جواب دارد.



۴۸- گزینهٔ «۱» — متوسط

چهارضلعی **OAPB** چون ۴ زاویه قائمه دارد و طول و عرض آن با هم برابر است $(OA = OB = R)$ یک مربع است.



$$S_{\text{مربع}} = (۲)^۲ = ۴$$

$$S_{\text{قطاع}\ OAB} = \frac{\alpha\pi R^۲}{۳۶۰} = \frac{۹۰\pi(۲)^۲}{۳۶۰} = \pi$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{قطاع}} = ۴ - \pi$$

۴۹- گزینهٔ «۴» — متوسط

چهارضلعی **ABCD** یک مستطیل است که:

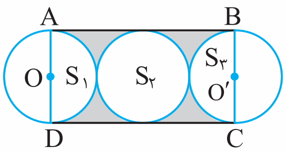
$$AD = ۲R$$

$$AB = R + ۲R + R = ۴R$$

$$S_{\text{مستطیل}} = AD \times AB = ۲R \times ۴R = ۸R^۲$$

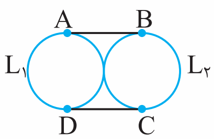
$$S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{۱}{۲}\pi R^۲ + \pi R^۲ + \frac{۱}{۲}\pi R^۲ = ۲\pi R^۲$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مستطیل}} - (S_۱ + S_۲ + S_۳) = ۸R^۲ - ۲\pi R^۲ = ۲R^۲(۴ - \pi)$$



۵۰- گزینهٔ «۳» — متوسط

AB و **CD** مماس مشترک‌های دو دایره هستند که $AB = ۲\sqrt{R \times R} = ۲R$ و $L_۱ = L_۲$ است که هر کدام نصف محیط دایره هستند.



$$L_۱ = L_۲ = \pi R$$

$$\text{طول نخ} = ۲AB + ۲L_۱ = ۴R + ۲\pi R$$

پاسخنامه سؤالات تشریحی

بخش ۳

۱- آسان

آ) نادرست   ب) درست

پ) درست   ت) درست   ث) درست

۲- آسان

آ) تلاقی نیمسازها   ب) $\frac{۱}{۴}$

پ) ۴   ت) محیطی

ث) $۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ ج) $۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$

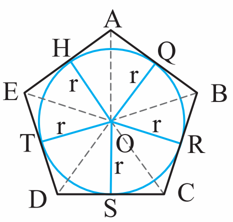
۳- متوسط

مرکز دایره محاطی را به همه رئوس وصل می‌کنیم و از **O** به همه اضلاع عمودی رسم می‌کنیم.

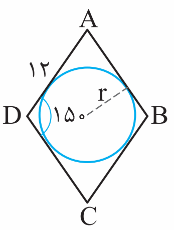
$$S = S_{\overset{\triangle}{OAB}} + S_{\overset{\triangle}{OBC}} + S_{\overset{\triangle}{OCD}} + S_{\overset{\triangle}{ODE}} + S_{\overset{\triangle}{OEA}} + \cdots$$

$$S = \frac{۱}{۲}r\cdot AB + \frac{۱}{۲}r\cdot BC + \frac{۱}{۲}r\cdot CD + \frac{۱}{۲}r\cdot DE + \frac{۱}{۲}r\cdot DE + \frac{۱}{۲}r\cdot EA + \cdots$$

$$= \frac{۱}{۲}r(\underbrace{AB + BC + CD + DE + EA + \cdots}_{۲P}) \Rightarrow S = r\cdot P$$



۴- آسان



$$۲P = ۴(۱۲) \Rightarrow P = ۲۴$$

$$S = AD \times DC \times \sin۱۵۰ = ۱۲ \times ۱۲ \times \frac{۱}{۲} = ۷۲$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۷۲}{۲۴} \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = ۹\pi$$

۵- متوسط

از مرکز دایره محاطی خارجی مماس با ضلع **BC** به ۳ رأس وصل می‌کنیم و از این نقطه به ضلع **BC** و امتداد اضلاع **AB** و **AC** عمود می‌کنیم

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AOB}} + S_{\overset{\triangle}{AOC}} - S_{\overset{\triangle}{BOC}}$$

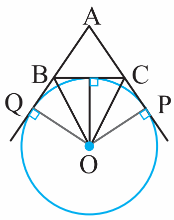
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}OQ \cdot AB + \frac{۱}{۲}OP + AC - \frac{۱}{۲}OH \cdot BC$$

$$\xrightarrow{OQ=OP=OH=r_a} S = \frac{۱}{۲}r_a(b+c-a)$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}r_a(\underbrace{b+c+a}_{۲P} - ۲a)$$

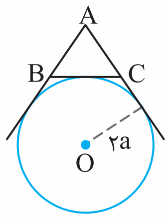
$$\Rightarrow S = r_a(P-a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P-a}$$

به همین ترتیب $r_b = \frac{s}{p-b}$ و $r_c = \frac{s}{p-a}$ است.



۶- آسان

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و محیط آن ۳a است پس داریم:



$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۸\sqrt{۳})^۲ = ۴۸\sqrt{۳}$$

$$۲P = ۳a = ۲۴\sqrt{۳} \Rightarrow P = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$r_a = \frac{s}{p-a} = \frac{۴۸\sqrt{۳}}{۱۲\sqrt{۳} - ۸\sqrt{۳}} = \frac{۴۸\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}} = ۱۲$$

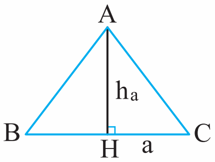
۷- آسان

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید و شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی از $r_a = \frac{S}{P-a}$ و $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$ به دست می‌آید.

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{۳P-(a+b+c)}{S}$$

$$= \frac{۳P-۲P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{۱}{r}$$

۸- متوسط



$$s = \frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{۲s}{a}$$

به همین ترتیب $h_b = \frac{۲S}{b}$ و $h_c = \frac{۲S}{c}$ است و می‌دانیم $r = \frac{S}{P}$

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{a}{۲s} + \frac{b}{۲s} + \frac{c}{۲s} = \frac{a+b+c}{۲s} = \frac{۲p}{۲s} = \frac{p}{s} = \frac{۱}{r}$$

۹- متوسط

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} \Rightarrow \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱+۲+۳}{۶} = \frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r} = ۱ \Rightarrow r = ۱$$

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{h} = \frac{۱}{۱} \Rightarrow \frac{۱}{h} = ۱ - \frac{۷}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{h} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow h = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow h = ۲/۴$$

۱۰- دشوار

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد، که طول مماس‌ها با هم برابرند. یعنی: $AT = AT'$ و $AN = AM$ و $BN = BQ$ و $CM = CQ$

$$\text{محیط}_{ABC} = AB + BC + AC$$

$$\Rightarrow ۲P = AN + NB + BQ + QC + CM + MA$$

$$\Rightarrow ۲P = ۲AN + ۲BQ + ۲QC \xrightarrow{\div ۲} P = AN + \underbrace{BQ + QC}_{a}$$

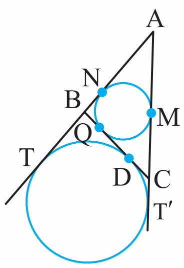
$$\Rightarrow AN = P - a \xrightarrow{AN=AM} AN = AM = P - a$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود $BN = BQ = P - b$

$$\text{محیط}_{ABC} = AB + BC + AC \Rightarrow ۲P = AB + BD + DC + AC$$

$$= AB + BT + CT' + AC \Rightarrow ۲P = AT + AT'$$

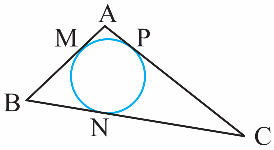
$$\xrightarrow{AT=AT'} ۲P = ۲AT \Rightarrow P = AT = AT'$$



-۱۱ آسان

$$۲p = AB + AC + BC = ۷ + ۸ + ۱۰ = ۲۵ \Rightarrow p = ۱۲/۵$$

$$AM = p - BC = ۱۲/۵ - ۱۰ = ۲/۵$$

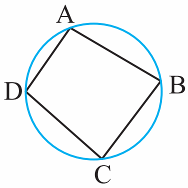


-۱۲ دشوار

فرض: ABCD محاطی حکم: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰$

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی}\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} \\ \text{محاطی}\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{DAB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{DAB}}{۲} = \dfrac{۳۶۰}{۲} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰$$

می‌دانیم مجموع زاویه‌های هر ۴ ضلعی ۳۶۰° است اگر $\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ باشد پس $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$



عکس قضیه:

فرض: $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$

حکم: ABCD محاطی

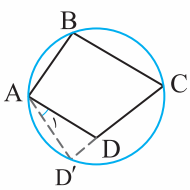
از ۳ نقطه غیرواقع بر خط راست **A** و **B** و **C** یک دایره عبور می‌کند. باید ثابت کنیم رأس **D** هم روی همین دایره است.

برهان خلف: اگر رأس **D** روی دایره نباشد، دایره ضلع **CD** یا امتداد آن را در D' قطع می‌کند که D' را به **A** وصل می‌کنیم چون هر ۴ رأس، ۴ ضلعی $ABCD'$ روی دایره است این چهارضلعی محاطی است بنابراین دو زاویه روبه‌رو با هم مکمل‌اند یعنی

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} + \hat{D}' = ۱۸۰ \\ \text{فرض}\ \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{D}' \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ADD'}: \text{خارجی}\ \hat{D} = \hat{D}' + \hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{D} > \hat{D}' \quad (۲)$$

رابطه (۱) با رابطه (۲) در تناقض است پس فرض خلف باطل و دایره موردنظر از نقطه **D** می‌گذرد و یعنی چهارضلعی **ABCD** محاطی است.



-۱۳ دشوار

فرض: $\left\{\begin{array}{l} ABCD\ \text{محاطی} \\ AB \parallel CD \end{array}\right.$ حکم: ABCD ذوزنقه متساوی‌الساقین

می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی با هم موازیند و اگر دو کمان یک دایره با هم برابر باشند وترهای آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس

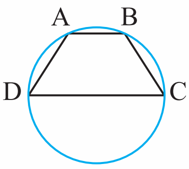
ذوزنقه ABCD محاطی است. $AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow$

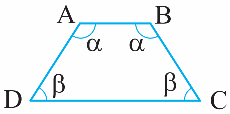
فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD حکم: ABCD محاطی

می‌دانیم در ذوزنقه متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌رو به یک قاعده با هم برابرند، یعنی $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \hat{D} = \beta$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۳۶۰ \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۸۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = \alpha + \beta = ۱۸۰ \\ \hat{B} + \hat{D} = \alpha + \beta = ۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD محاطی است}$$





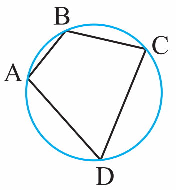
-۱۴ متوسط

فرض: $\hat{A} + \hat{B} = ۱۲۰, \hat{C} - \hat{D} = ۶۰$

می‌دانیم در هر ۴ ضلعی محاطی مجموع زوایا مقابل ۱۸۰° است پس

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰ \\ \text{فرض}: \hat{A} + \hat{B} = ۱۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{C} + \hat{D} = ۲۴۰ \\ \text{فرض}: \hat{C} - \hat{D} = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = ۱۵۰, \hat{D} = ۹۰$$



$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰ \xrightarrow{\hat{C} = ۱۵۰} \hat{A} = ۳۰^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰ \xrightarrow{\hat{D} = ۹۰} \hat{B} = ۹۰$$

-۱۵ متوسط

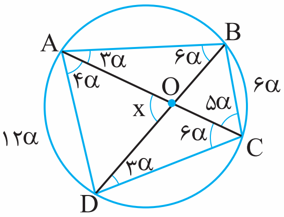
$$\text{محاطی}\ \hat{CDB} = \hat{BAC} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \hat{BAC} = ۳\alpha, \overset{\frown}{BC} = ۶\alpha$$

$$\text{محاطی}\ \hat{DBA} = \hat{ACD} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \hat{ACD} = ۶\alpha, \overset{\frown}{AD} = ۱۲\alpha$$

در چهارضلعی محاطی، مجموع زوایا مقابل ۱۸۰° است پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow ۷\alpha + ۱۱\alpha = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۸\alpha = ۱۸۰ \Rightarrow \alpha = ۱۰^\circ$$

$$\hat{O} = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow x = \dfrac{۱۲\alpha + ۶\alpha}{۲} = ۹\alpha = ۹(۱۰) \Rightarrow x = ۹۰^\circ$$



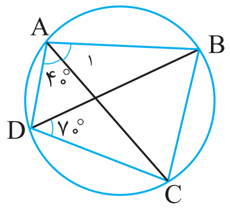
۱۶- آسان

$B\hat{D}C = \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۷۰$ محاطی

$\hat{A} = ۴۰ + ۷۰ = ۱۱۰$

می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی مجموع دو زاویه مقابل ۱۸۰° است.

$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۱۰ + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{C} = ۷۰^\circ$



۱۷- متوسط

می‌دانیم در چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند پس:

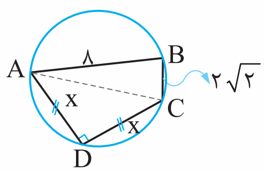
$\left.\begin{matrix} \hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰ \\ \hat{B} = \hat{D} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} = ۹۰$

A را به **C** وصل می‌کنیم

$\overset{\Delta}{ABC} : AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = ۶۴ + ۸ = ۷۲ \Rightarrow AC = ۶\sqrt{۲}$

$\overset{\Delta}{ADC} : AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ \Rightarrow ۷۲ = x^۲ + x^۲$

$\Rightarrow ۲x^۲ = ۷۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow AD = ۶$



۱۸- دشوار

فرض: محیطی ABCD حکم: $AB + CD = AD + BC$

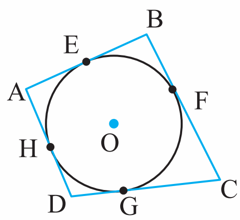
می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد کـه طـول این مماس‌ها با هم برابر هستند.

$AB + CD = AE + EB + CG + GD = AH + BF + FC + HD$

$= (AH + HD) + (BF + FC) = AD + BC$

عکس قضیه:

فرض: $AB + CD = AD + BC$ حکم: محیطی ABCD



نیمسازهای دو زاویه **B** و **C** همدیگر را در نقطه **I** قطع می‌کنند از **I** به ۳ ضلع **AB** و **BC** و **DC** عمود می‌کنیم و می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

$\left.\begin{matrix} \text{I روی نیمساز B} \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} IM = IN \\ \text{I روی نیمساز C} \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} IN = IP \end{matrix}\right\} \Rightarrow IM = IN = IP$

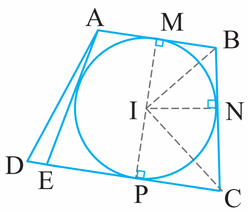
از نقطه **I** به شعاع **IM** دایره‌ای رسم می‌کنیم، این دایره براضلاع **AB** و **BC** و **CD** مماس است باید ثابت کنـیم ایـن دایـره بـر **AD** نیـز مماس است تـا چهارضلعی **ABCD** محیطی شود.

برهان خلف: اگر دایره بر ضلع **AD** مماس نشود، از **A** مماس بـر دایـره رسم می‌کنیم تا **DC** (یا امتداد آن) را در **E** قطع کند. چهارضلعی **ABCE** محیطـی است بنابراین مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر هستند.

$$\left.\begin{matrix} \underline{AB + EC} = AE + BC \\ \text{فرض}: AB + CD = AD + BC \Rightarrow \underbrace{AB + CE} + DE = AD + BC \end{matrix}\right\}$$

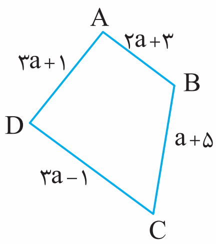
$\Rightarrow AE + BC + DE = AD + BC \Rightarrow AE + DE = AD \quad (۱)$

بنا به قضیه نامساوی مثلث، در هر مثلث مجموع هر دو از ضلع سوم بـزرگ‌تـر است پس در مثلث **ADE** داریـم $AE + DE > AD$ کـه بـا رابطـه (۱) در تناقض اسـت پـس فـرض خلـف باطل و دایـره بـر **AD** ممـاس مـی‌شـود و چهارضلعی **ABCD** محیطی است.



۱۹- آسان

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابر هستند.



$AB + CD = AD + BC$

$\Rightarrow ۲a + ۳ + ۳a - ۱ = ۳a + ۱ + a + ۵$

$\Rightarrow ۵a + ۲ = ۴a + ۶ \Rightarrow a = ۴$

۲۰- متوسط

اگر فرض کنیم $DC = x$ و $AD = y$، داریم:

$\text{محیط} = AB + BC + DC + AD \Rightarrow ۳۰ = ۵ + ۸ + x + y$

$\Rightarrow x + y = ۱۷$

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر هستند.

$AB + DC = BC + AD \Rightarrow ۵ + x = ۸ + y \Rightarrow x - y = ۳$

$\begin{cases} x + y = ۱۷ \\ x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۰, y = ۷ \Rightarrow DC = ۱۰ \Rightarrow AD = ۷$

۲۱- آسان

می‌دانیم شرط محیطی بودن یک چهارضلعی این است که جمع دو ضلع روبه‌رو با هم برابر باشند که در کایت لوزی و مربع این شرط برقرار است اما در مستطیل و متوازی‌الاضلاع برقرار نیست.

۲۲- متوسط

محاطی $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۶۰=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۲۰$

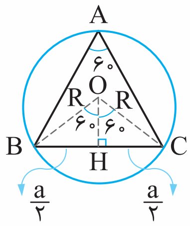
O را به **B** و **C** وصل می‌کنیم، چون $OB=OC=R$، مثلث **OBC** متساوی الساقین است و ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر ضلع **BC** بر هم منطبق هستند.

مرکزی $\hat{O}=\overset{\frown}{BC}=۱۲۰^\circ$

$$\overset{\Delta}{OHB}: \sin B\hat{O}H=\frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin ۶۰=\frac{\frac{a}{۲}}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{a}{۲R} \Rightarrow a=\sqrt{۳}R$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** از دستور $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ به دست می‌آید، پس:

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}R)^۲ \Rightarrow S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

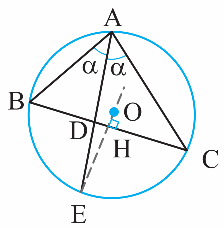


۲۳- دشوار

نیمساز زاویه **A** را رسم می‌کنیم تا ضلع **BC** را در **D** و در ادامه دایره محیطی را در **E** قطع کند $(B\hat{A}E=C\hat{A}E=\alpha)$

$$\left.\begin{aligned} &\text{محاطی}\ B\hat{A}E=\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{\overset{\frown}{BE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BE}=۲\alpha \\ &\text{محاطی}\ C\hat{A}E=\frac{\overset{\frown}{CE}}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{\overset{\frown}{CE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CE}=۲\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$$

چون نقطه **E** کمان $\overset{\frown}{BC}$ را نصف کرده است، چنانچه از **E** به وسط **BC** (نقطه **H**) وصل کنیم، می‌دانیم این پاره‌خط بر **BC** عمود است و چون آن را نصف کرده است پس عمودمنصف **BC** است و در ادامه نیز از **O** مرکز دایره می‌گذرد پس نیمساز **A** و عمودمنصف ضلع **BC** روی دایره محیطی مثلث همدیگر را قطع می‌کنند.



۲۴- دشوار

اگر ذوزنقه محاطی باشد داریم:

$AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD=BC \Rightarrow$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است

اگرذوزنقه محیطی باشد جمع اضلاع روبه‌رو با هم برابراست (فرض $DC=b, AB=a$)

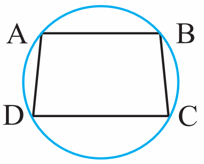
$$AB+DC=AD+BC \xrightarrow{AD=BC} a+b=۲AD \Rightarrow AD=\frac{a+b}{۲}$$

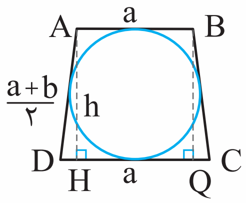
از A و B بر DC عمود می‌کنیم $AB=HQ=a$ و $DH=QC=\frac{b-a}{۲}$

$$\overset{\Delta}{ADH}: AD^۲=AH^۲+DH^۲ \Rightarrow \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲=h^۲+\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a^۲+۲ab+b^۲}{۴}=h^۲+\frac{a^۲-۲ab+b^۲}{۴} \Rightarrow h^۲=ab \Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$S=\frac{AB+DC}{۲}\times AH \Rightarrow S=\frac{a+b}{۲}\sqrt{ab}$$





۲۵- دشوار

اندازه ساق **AD** برابر قطر دایره است پس $AD=۱۰$ است از **B** به **DC** عمود می‌کنیم $BH=AD=۱۰$ و $AB=DH=x$

$$\overset{\Delta}{BHC}: BC^۲=BH^۲+HC^۲ \Rightarrow ۶۷۶=۱۰۰+HC^۲$$

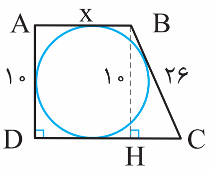
$$\Rightarrow HC^۲=۵۷۶ \Rightarrow HC=۲۴$$

و چون چهارضلعی **ABCD** محیطی است داریم:

$$AB+DC=AD+BC \Rightarrow AB+DH+HC=۱۰+۲۶$$

$$\Rightarrow ۲x+۲۴=۳۶ \Rightarrow ۲x=۱۲ \Rightarrow x=۶$$

پس $AB=۶$ و $DC=۶+۲۴=۳۰$ است.



$$S=\frac{AB+DC}{۲}\times BH$$

$$\Rightarrow S=\frac{۶+۳۰}{۲}\times ۱۰=۱۸۰$$

۲۶- متوسط

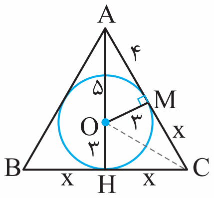
می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر ساق بر هم منطبق هستند.

$AH = AO + OH \Rightarrow ۸ = AO + ۳ \Rightarrow AO = ۵$

$\overset{\Delta}{AOM} : AO^۲ = AM^۲ + OM^۲ \Rightarrow ۲۵ = AM^۲ + ۹ \Rightarrow AM^۲ = ۱۶$

$\Rightarrow AM = ۴$

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر است پس $CH = CM = x$



$\overset{\Delta}{AHC} : AC^۲ = AH^۲ + HC^۲$

$\Rightarrow (۴ + x)^۲ = ۸^۲ + x^۲$

$\Rightarrow ۱۶ + ۸x + x^۲ = ۶۴ + x^۲$

$\Rightarrow ۸x = ۴۸ \Rightarrow x = ۶$

$BC = ۲x = ۱۲$

۲۷- متوسط

$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۲ = \frac{S}{P} \Rightarrow S = ۲P$

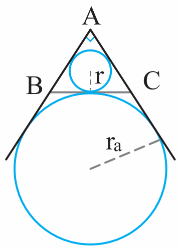
بزرگ‌ترین شعاع دایره محاطی خارجی در مثلث قائم‌الزاویه، دایره‌ای است که به وتر و امتداد دو ضلع قائمه مماس است پس

$r_a = \frac{S}{P - a} \Rightarrow ۱۵ = \frac{۲P}{P - a} \Rightarrow ۱۵P - ۱۵a = ۲P \Rightarrow ۱۳P = ۱۵a$

$\Rightarrow P = \frac{۱۵}{۱۳}a$

در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره محاطی داخلی $P - a$ است.

$r = P - a \Rightarrow ۲ = \frac{۱۵}{۱۳}a - a \Rightarrow ۲ = \frac{۲}{۱۳}a \Rightarrow a = ۱۳$



در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره محیطی $\frac{a}{۲}$ است

$R = \frac{a}{۲} = ۶/۵$

$S = \pi R^۲ = ۴۲/۲۵\pi$

۲۸- متوسط

چهارضلعی **BCDE** محاطی است پس مجموع اضلاع مقابل با هم برابراست

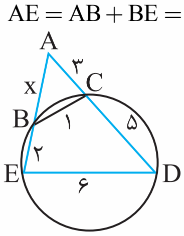
$BC + ED = BE + CD \Rightarrow ۱ + ۶ = BE + ۵ \Rightarrow BE = ۲$

دو وتر **BE** و **CD** از دایره، همدیگر را در نقطه **A** خارج دایره قطع کرده‌اند بنابراین داریم:

$AB \times AE = AC \times AD \Rightarrow x(x + ۲) = ۳ \times ۸$

$\Rightarrow x^۲ + ۲x - ۲۴ = ۰ \Rightarrow (x + ۶)(x - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۶ & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۴ \end{cases}$

$AE = AB + BE = ۴ + ۲ = ۶$



۲۹- دشوار

تمام وترهای **AB** و **BC** و ... چون اضلاع **n**ضلعی منتظم هستند با هم برابر هستند بنابراین $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \cdots = \frac{۳۶۰}{n}$ است. از **O** به **A** و **B** وصل می‌کنیم

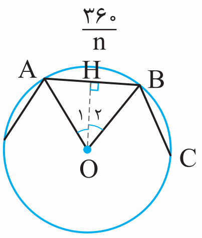
$\hat{O} = \overset{\frown}{AB} = \frac{۳۶۰}{n}$ مرکزی

چون $OA = OB = R$ است مثلث **OAB** متساوی‌الساقین است و ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر ضلع **AB** بر هم منطبق هستند بنابراین

$AH = HB = \frac{AB}{۲}$ و $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \frac{۱۸۰}{n}$

$\overset{\Delta}{OAH} : \sin O_۱ = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{\frac{AB}{۲}}{R}$

$\Rightarrow \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{AB}{۲R} \Rightarrow AB = ۲R\sin\frac{۱۸۰}{n}$



۳۰- دشوار

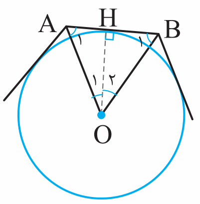
اندازه هر زاویه خارجی **n** ضلعی منتظم $\frac{۳۶۰}{n}$ است پس اندازه هر زاویه داخلی آن $(۱۸۰ - \frac{۳۶۰}{n})$ است و چون مرکز دایره محاطی مثلث محل تلاقی نیمسازها است $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۹۰ - \frac{۱۸۰}{n}$ است.

$\hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{O} = ۱۸۰ \Rightarrow ۹۰ - \frac{۱۸۰}{n} + ۹۰ - \frac{۱۸۰}{n} + \hat{O} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{O} = \frac{۳۶۰}{n}$

ارتفاع، میانه، نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند

$\overset{\Delta}{OAB} : \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \Rightarrow$ متساوی‌الساقین $AOB \Rightarrow$

بنابراین $AH = HB = \frac{AB}{۲}$ و $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \frac{۱۸۰}{n}$



$\overset{\Delta}{OAH} : \tan\hat{O}_۱ = \frac{AH}{OH} \Rightarrow \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{\frac{AB}{۲}}{R}$

$\Rightarrow \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{AB}{۲R} \Rightarrow AB = ۲R\tan\frac{۱۸۰}{n}$

پاسخنامه
سؤالات تستی
بخش ۳

۱- گزینهٔ «۱» متوسط

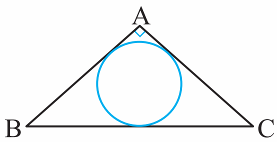
می‌دانیم شعاع دایره محاطی از دستور $r=\frac{s}{p}$ به دست می‌آید که **s** مساحت و **p** نصف محیط شکل است.

مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ حتماً قائم‌الزاویه است $(۵^۲=۳^۲+۴^۲)$ بنابراین داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴=۶$$

$$۲p=AB+AC+BC=۳+۴+۵=۱۲ \Rightarrow p=۶$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{۶}{۶} \Rightarrow r=۱ \Rightarrow S=\pi r^۲ \Rightarrow S=\pi(۱)^۲=\pi$$



۲- گزینهٔ «۳» متوسط

چهارضلعی که همه اضلاع آن با هم برابر باشد، لوزی است و می‌دانیم در لوزی قطرها عمودمنصف هم هستند پس $AO=OC=۳x$ و $DO=OB=x$

$$\overset{\Delta}{OAB}=AB^۲=OB^۲+OA^۲ \Rightarrow ۱۰۰=۹x^۲+x^۲ \Rightarrow ۱۰x^۲=۱۰۰$$

$$\Rightarrow x^۲=۱۰ \Rightarrow x=\sqrt{۱۰}$$

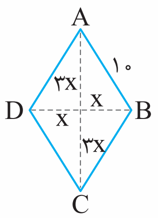
$$AC=۶x=۶\sqrt{۱۰}$$

$$BD=۲x=۲\sqrt{۱۰}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BD \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۶\sqrt{۱۰}\times ۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow S=۶۰$$

$$۲p=۴AB=۴(۱۰)=۴۰ \Rightarrow p=۲۰$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر **n**ضلعی از دستور $r=\frac{s}{p}$ به دست می‌آید.



$$r=\frac{s}{p}=\frac{۶۰}{۲۰}=۳$$

۳- گزینهٔ «۴» دشوار

در یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع **a**، اندازه قطر کوچک $a\sqrt{۳}$ و اندازه قطر بزرگ $۲a$ و محیط آن $۶a$ و مساحت آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

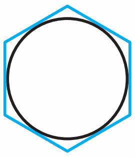
$$a\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳} \Rightarrow a=۴$$

$$۲p=۶a=۶(۴)=۲۴ \Rightarrow p=۱۲$$

$$S=\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}(۴)^۲}{۲}=۲۴\sqrt{۳}$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر **n** ضلعی از دستور $r=\frac{s}{p}$ به دست می‌آید.

$$r=\frac{۲۴\sqrt{۳}}{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$



۴- گزینهٔ «۲» آسان

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر **n** ضلعی از دستور $r=\frac{s}{p}$ به دست می‌آید.

$$۳=\frac{s}{p} \Rightarrow s=۳p$$

$$S+(۲p)^۲=۱۶۲ \Rightarrow ۴p^۲+۳p-۱۶۲=۰$$

$$\Rightarrow (p-۶)(۴p+۲۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۶ \\ p=-\frac{۲۷}{۴} \quad \text{غقق} \end{cases}$$

$$s=۳p=۳(۶)=۱۸$$

۵- گزینهٔ «۱» متوسط

روش اول: در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع **a**، اندازه ارتفاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و اندازه محیط $۳a$ و مساحت $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

$$\frac{\sqrt{۳}a}{۲}=۱۸ \Rightarrow a=\frac{۳۶}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a=۱۲\sqrt{۳}$$

$$۲p=۳a=۳۶\sqrt{۳} \Rightarrow p=۱۸\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}=\frac{\sqrt{۳}\times(۱۲\sqrt{۳})^۲}{۴} \Rightarrow S=۱۰۸\sqrt{۳}$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر **n**ضلعی از دستور $r=\frac{s}{p}$ به دست می‌آید.

$$r=\frac{s}{p}=\frac{۱۰۸\sqrt{۳}}{۱۸\sqrt{۳}} \Rightarrow r=۶$$

روش دوم: اگر اندازه ضلع مثلث متساوی الاضلاعی **a** باشد ارتفاع آن $h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است و شعاع دایره محاطی داخلی آن **r** است که $r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$ یا $r=\frac{h}{۳}$ است.

$$r=\frac{h}{۳}=\frac{۱۸}{۳}=۶$$

۶- گزینهٔ «۱» دشوار

هر ۸ ضلعی منتظم درون یک مربع زندگی می‌کند.

$$\overset{\triangle}{MAB}: AB^{۲} = AM^{۲} + MB^{۲} \Rightarrow ۴ = x^{۲} + x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = ۲ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$$

اندازه هر ضلع مربع **MNPO** را برابر **a** فرض می‌کنیم.

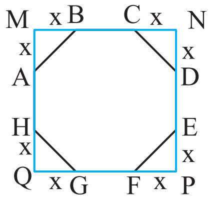
$$a = MN = MB + BC + CN = x + ۲ + x = ۲ + ۲x = ۲ + ۲\sqrt{۲}$$

$$S_{\text{هشت ضلعی}} = S_{\text{مربع}} - ۴S_{\overset{\triangle}{AMB}} = a^{۲} - ۴(\frac{۱}{۲}x \times x) = a^{۲} - ۲x^{۲}$$

$$= (۲ + ۲\sqrt{۲})^{۲} - ۲(\sqrt{۲})^{۲} = ۴ + ۸\sqrt{۲} + ۸ - ۴ = ۸(\sqrt{۲} + ۱)$$

هشت ضلعی $۲p = ۸(۲) \Rightarrow p = ۸$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{۸(\sqrt{۲}+۱)}{۸} \Rightarrow r = \sqrt{۲} + ۱$$



۷- گزینهٔ «۴» دشوار

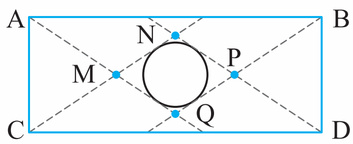
شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل، یک مربع است که اگر اندازه اضلاع مستطیل **a** و **b** باشد، اندازه اضلاع مربع برابر $|b - a| \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است که $MN = |۸ - ۲| \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$

$$S_{MNPQ} = (۳\sqrt{۲})^{۲} = ۱۸$$

$$۲P = ۴MN \Rightarrow P = ۲MN = ۲(۳\sqrt{۲}) \Rightarrow P = ۶\sqrt{۲}$$

می‌دانیم اگر مساحت یک چندضلعی **S** و محیط آن $۲p$ باشد، شعاع دایره محاطی برابر $r = \frac{s}{p}$ است.

$$r = \frac{s}{p} \Rightarrow r = \frac{۱۸}{۶\sqrt{۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \Rightarrow r = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

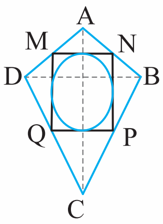


۸- گزینهٔ «۳» دشوار

هرگاه شکل حاصل از به هم وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی مستطیل شود، یعنی قطرهای چهارضلعی بر هم عمود هستند که داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AC \times BD = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴ = ۱۲$$

هرگاه وسط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم یک متوازی‌الاضلاع به وجود می‌آید که مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی اولیه است و محیط آن برابر مجموع دو قطر چهارضلعی اولیه است.



$$S_{MNPQ} = \frac{۱}{۲}S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ = ۶$$

$$۲p = AC + BD = ۶ + ۴ = ۱۰ \Rightarrow p = ۵$$

اگر محیط و مساحت یک **n** ضلعی به ترتیب $۲p$ و **S** باشد، شعاع دایره محاطی آن از دستور $r = \frac{s}{p}$ به دست می‌آید پس داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

۹- گزینهٔ «۴» متوسط

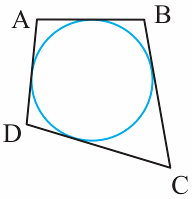
در یک چهارضلعی محیطی، مجموع هر دو ضلع غیرمجاور با هم برابرند و برابر نصف محیط هستند.

$$AB + DC = AD + BC = p = ۱۸$$

$$= ۲\pi r \Rightarrow ۱۵/۷ = ۲(۳/۱۴)r \Rightarrow r = ۲/۵$$

اگر محیط و مساحت یک چهارضلعی محیطی به ترتیب $۲p$ و **S** باشند، شعاع دایره محاطی آن از دستور $r = \frac{s}{p}$ به دست می‌آید.

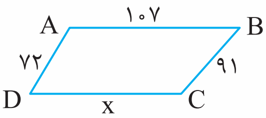
$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{S}{۱۸} \Rightarrow S = ۴۵$$



۱۰- گزینهٔ «۱» آسان

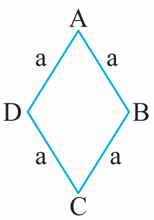
هرگاه در یک چهارضلعی ۳ نیمساز داخلی همرس باشند، نیمساز زاویه چهارم هم حتماً از آن نقطه می‌گذرد و یعنی نیمسازها همرسند و چهارضلعی محیطی است و در این‌صورت مجموع هر دو ضلع غیرمجاور با هم برابرند.

$$AB + DC = AD + BC \Rightarrow ۱۰۷ + x = ۷۲ + ۹۱ \Rightarrow x = ۵۶$$



۱۱- گزینهٔ «۲» آسان

شرط آن‌که یک چهارضلعی محیطی باشد، آن است که مجموع اضلاع مقابل با هم برابر باشد که بین گزینه‌ها لوزی چنین خاصیتی دارد.



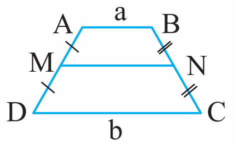
$$AB + DC = AD + BC = P = ۲a$$

۱۲–گزینهٔ «۴» متوسط

نکته: در هر ذوزنقه طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق برابر میانگین قاعده است

$$MN=\frac{AB+BC}{۲}=\frac{a+b}{۲}$$

اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است در ذوزنقه متساوی الساقین **ABCD** می‌دانیم $(AD=BC)$ است پس داریم:



$$AD+BC=AB+DC$$

$$\Rightarrow ۲AD=a+b$$

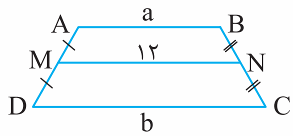
$$\Rightarrow AD=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow AD=MN$$

۱۳– گزینهٔ «۴» آسان

همواره در هر ذوزنقه طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق برابر میـانگین دو قاعده آن است.

$$MN=\frac{AB+CD}{۲}\Rightarrow ۱۲=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow a+b=۲۴$$

می‌دانیم در هر ۴ ضلعی محیطی، مجموع دو ضلع روبــه‌رو برابـر نصـف محیـط (p) است.



$$p=AB+DC$$

$$\Rightarrow P=a+b=۲۴$$

$$\Rightarrow ۲P=۴۸$$

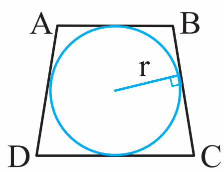
۱۴– گزینهٔ «۲» متوسط

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هـر شـکل محیطـی ازدسـتور $r=\frac{S}{P}$ بـه دسـت می‌آید که **s** مساحت و **p** نصف محیط است.

$$r=\frac{S}{P}\Rightarrow ۳=\frac{۴۵}{P}\Rightarrow P=۱۵$$

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع دو ضلع مقابل برابر نصـف محیـط است پس

$$AD+BC=p\xrightarrow{AD=BC}۲AD=۱۵\Rightarrow AD=۷/۵$$



۱۵– گزینهٔ «۳» دشوار

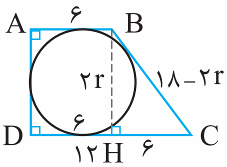
می‌دانیم در چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو برابر نصف محیط است و در ذوزنقه شکل مقابل ارتفاع برابر قطر دایره محاطی است $(AD=h=۲r)$

$$P=AB+DC=۶+۱۲=۱۸\Rightarrow AD+BC=۱۸\Rightarrow ۲r+BC=۱۸$$

$$\Rightarrow BC=۱۸-۲r$$

از **B** بر **DC** عمود می‌کنیم $BH=AD=۲r$ و $AB=DH=۶$ بنـابراین $HC=۶$

$$\overset{\triangle}{BHC}:BC^۲=BH^۲+HC^۲\Rightarrow(۱۸-۲r)^۲=(۲r)^۲+۶^۲$$



$$\Rightarrow ۳۲۴-۷۲r+۴r^۲=۴r^۲+۳۶$$

$$\Rightarrow ۳۲۴-۷۲r=۳۶\Rightarrow ۲۸۸=۷۲r$$

$$\Rightarrow r=۴$$

۱۶– گزینهٔ «۳» دشوار

اگر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌هـای **a** و **b** بـر دایـره‌ای بـه شـعاع **r** محیط شود $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}$ است و $۲r$ همان ارتفاع ذوزنقه است.

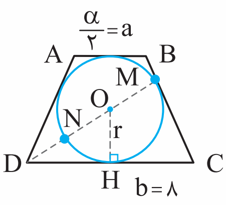
$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۹}{۲}\times ۸}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶}\Rightarrow r=۳$$

اگر از مرکز دایره محاطی به قاعده‌ها عمود کنیم آن‌ها را نصـف مـی‌کنـد پـس

$$DH=\frac{DC}{۲}=۴$$

$$\overset{\triangle}{ODH}:OD^۲=OH^۲+DH^۲\Rightarrow OD^۲=۱۶+۹=۲۵\Rightarrow OD=۵$$

$$DM=OD+OM=۵+r=۵+۳=۸$$



۱۷– گزینهٔ «۱» دشوار

از نقطه **B** دو مماس **BM** و **BN** بر دایره رسم شده است پس $BM=BN$

$$\overset{\triangle}{BMN}:BM=BN\xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}}B\hat{M}N=B\hat{N}M=۳۰^\circ$$

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خـط ممـاس عمـود اسـت پـــس $O\hat{M}A=O\hat{N}C=۹۰$ بنـــابراین $O\hat{M}N=O\hat{N}M=۶۰$ پـــس $M\hat{O}N=۶۰$ و مثلث $\overset{\triangle}{OMN}$ متساوی‌الاضلاع است

$OM = ON = MN = ۳$

$S_{\triangle OMN} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

$\hat A+\hat B+\hat C+\hat D=۳۶۰ \Rightarrow ۹۰+۱۲۰+۹۰+\hat C=۳۶۰ \Rightarrow \hat C=۶۰$

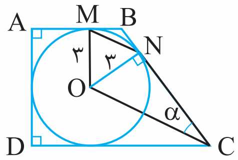
می‌دانیم مرکز دایره محاطی محل تلاقی نیمسازهای داخلی است بنابراین

$\alpha = O\hat{C}N = \frac{\hat C}{۲} = ۳۰^\circ$

$\overset{\triangle}{ONC}: \tan\alpha = \frac{ON}{NC} \Rightarrow \tan ۳۰ = \frac{۳}{NC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳}{NC} \Rightarrow NC = ۳\sqrt{۳}$

$S_{\triangle ONC} = \frac{۱}{۲}ON\times NC = \frac{۱}{۲}\times۳\times۳\sqrt{۳} = \frac{۹}{۲}\sqrt{۳}$

$S_{OMNC} = S_{\triangle OMN}+S_{\triangle ONC} = \frac{۹}{۴}\sqrt{۳}+\frac{۹}{۲}\sqrt{۳} = \frac{۲۷}{۴}\sqrt{۳}$



۱۸- گزینهٔ «۳» دشوار

$\hat A+\hat B+\hat C+\hat D=۳۶۰ \Rightarrow ۹۰+\hat B+۴۵+۹۰=۳۶۰ \Rightarrow \hat B=۱۳۵^\circ$

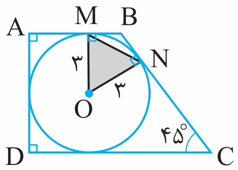
می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

پس $\hat M=\hat N=۹۰$

OMBN چهارضلعی: $\hat O+\hat M+\hat B+\hat N=۳۶۰ \Rightarrow \hat O+۹۰+۱۳۵+۹۰=۳۶۰$

$\Rightarrow \hat O=۴۵^\circ$

$S_{\triangle OMN} = \frac{۱}{۲}OM\times ON\times\sin O = \frac{۱}{۲}\times۳\times۳\times\sin۴۵ = \frac{۹}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۹}{۴}\sqrt{۲}$



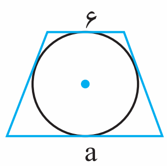
۱۹- گزینهٔ «۴» آسان

دایره $S=\pi r^{۲} \Rightarrow ۱۵\pi=\pi r^{۲} \Rightarrow r^{۲}=۱۵ \Rightarrow r=\sqrt{۱۵}$

می‌دانیم اگر قاعده‌های یک ذوزنقه متساوی‌الساقین محیطی **a** و **b** باشد، شعاع دایره محاطی برابر $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}$ است پس داریم:

$\sqrt{۱۵}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶a} \Rightarrow ۱۵=\frac{۱}{۴}\times۶a$

$\Rightarrow ۶۰=۶a \Rightarrow a=۱۰$

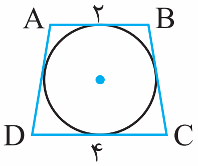


۲۰- گزینهٔ «۱» آسان

می‌دانیم اگر قاعده‌های یک مثلث متساوی الساقین محیطی **a** و **b** باشد، شعاع دایره محاطی برابر $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}$ است پس داریم:

$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴\times۲} \Rightarrow r=\sqrt{۲}$

دایره محاطی $S=\pi r^{۲}=۲\pi$



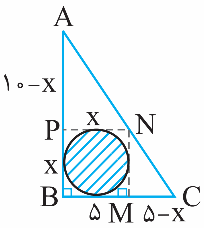
۲۱- گزینهٔ «۱» متوسط

اگر فرض کنیم قطر دایره **x** باشد، داریم:

$PN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AB}=\frac{PN}{BC} \Rightarrow \frac{۱۰-x}{۱۰}=\frac{x}{۵}$

$\Rightarrow ۱۰x=۵۰-۵x \Rightarrow ۱۵x=۵۰ \Rightarrow x=\frac{۵۰}{۱۵} \Rightarrow ۲r=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow r=\frac{۵}{۳}$

$S=\pi r^{۲}=\pi(\frac{۵}{۳})^{۲} \Rightarrow S=\frac{۲۵}{۹}\pi$



۲۲- گزینهٔ «۳» آسان

زمانی یک چهارضلعی محاطی است که زاویه‌های روبه‌رو مکمل باشند که تنها در گزینه ۳، دو زاویه ۵۷ و ۱۲۳ مکمل هستند که اگر روبه‌رو هم باشند، چهارضلعی محاطی است.

۲۳- گزینهٔ «۲» آسان

می‌دانیم در هر چهارضلعی محاطی مجموع دو زاویه مقابل ۱۸۰ است پس

$\hat A+\hat C=\hat B+\hat D=۱۸۰^\circ$

$\left.\begin{array}{l}\hat A+\hat B=۱۰۶\\ \hat A+\hat D=۱۱۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} ۲\hat A+\hat B+\hat D=۱۰۶+۱۱۲$

$\Rightarrow ۲\hat A+۱۸۰=۲۱۸ \Rightarrow ۲\hat A=۳۸ \Rightarrow \hat A=۱۹$

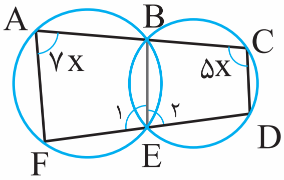
$\hat A+\hat C=۱۸۰ \Rightarrow ۱۹+\hat C=۱۸۰ \Rightarrow \hat C=۱۶۱$

۲۴- گزینهٔ «۲» آسان

B را به **E** وصل می‌کنیم هر دو چهارضلعی **ABEF** و **BCDE** محاطی هستند و زاویه‌های روبه‌رو در آن‌ها مکمل هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{E}_۱=۱۸۰\\ \hat{C}+\hat{E}_۲=۱۸۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\oplus}\hat{A}+\hat{C}+\underbrace{\hat{E}_۱+\hat{E}_۲}_{۱۸۰}=۳۶۰$$

$$\Rightarrow ۷x+۵x=۱۸۰\Rightarrow ۱۲x=۱۸۰\Rightarrow x=۱۵$$

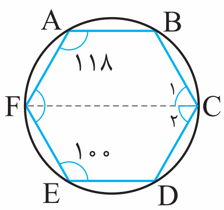


۲۵- گزینهٔ «۳» آسان

C را به **F** وصل می‌کنیم، در این‌صورت دو چهارضلعی **ABCF** و **FCDE** محاطی خواهند بود و می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی زوایای روبه‌رو مکمل‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{C}_۱=۱۸۰\Rightarrow ۱۱۸+\hat{C}_۱=۱۸۰\Rightarrow \hat{C}_۱=۶۲\\ \hat{E}+\hat{C}_۲=۱۸۰\Rightarrow ۱۰۰+\hat{C}_۲=۱۸۰\Rightarrow \hat{C}_۲=۸۰\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۶۲+۸۰\Rightarrow \hat{C}=۱۴۲$$



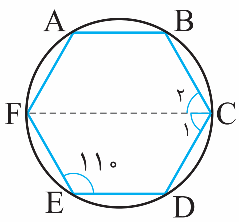
۲۶- گزینهٔ «۲» آسان

C را به **F** وصل می‌کنیم، در این‌صورت دو چهارضلعی **ABCF** و **FCDE** محاطی خواهند بود و می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی زوایا روبه‌رو مکمل‌اند

$$\hat{E}+\hat{C}_۱=۱۸۰\Rightarrow ۱۱۰+\hat{C}_۱=۱۸۰\Rightarrow \hat{C}_۱=۷۰$$

$$\hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۲۵\Rightarrow ۷۰+\hat{C}_۲=۱۲۵\Rightarrow \hat{C}_۲=۵۵$$

$$\hat{A}+\hat{C}_۲=۱۸۰\Rightarrow \hat{A}+۵۵=۱۸۰\Rightarrow \hat{A}=۱۲۵$$



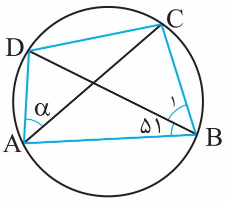
۲۷- گزینهٔ «۱» متوسط

می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی زوایای روبه‌رو مکمل‌اند ، بنابراین داریم:

$$A\hat{D}C+C\hat{B}A=۱۸۰\Rightarrow ۱۱۶+C\hat{B}A=۱۸۰\Rightarrow C\hat{B}A=۶۴$$

$$C\hat{B}A=A\hat{B}D+\hat{B}_۱\Rightarrow ۶۴=۵۱+\hat{B}_۱\Rightarrow \hat{B}_۱=۱۳^\circ$$

$$\text{محاطی}\ \hat{B}_۱=\alpha=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}\Rightarrow \alpha=۱۳^\circ$$



۲۸- گزینهٔ «۲» آسان

در چهارضلعی‌های محاطی، زوایای روبه‌رو مکمل‌اند پس مستطیل و مربع محاطی هستند و در چهارضلعی‌های محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو با هم برابر هستند و برابر نصف محیط هستند پس مربع و لوزی محیطی هستند، بنابراین مستطیل چهارضلعی است که محاطی است ولی محیطی نمی‌باشد.

۲۹- گزینهٔ «۱» متوسط

می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن است پس داریم:

$$\overset{\frown}{AB}=۲A\hat{D}B=۶x$$

$$\overset{\frown}{BC}=۲B\hat{A}C=۴x$$

$$\overset{\frown}{DC}=۲D\hat{B}C=۶x$$

$$\overset{\frown}{AD}=۲A\hat{C}D=۸x$$

می‌دانیم مجموع کمان‌های کل دایره ۳۶۰° است.

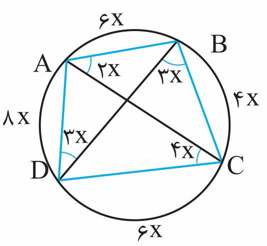
$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}=۳۶۰\Rightarrow ۶x+۴x+۶x+۸x=۳۶۰$$

$$\Rightarrow ۲۴x=۳۶۰\Rightarrow x=۱۵^\circ$$

$$\text{بزرگ‌ترین زاویه}: \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲}\Rightarrow \hat{C}=\frac{۸x+۶x}{۲}=۷x=۷(۱۵)=۱۰۵$$

$$\text{کوچک‌ترین زاویه}: \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DCB}}{۲}\Rightarrow \hat{A}=\frac{۶x+۴x}{۲}=۵x=۵(۱۵)=۷۵$$

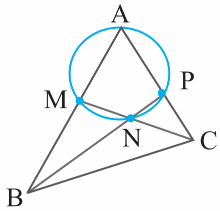
$$\hat{C}-\hat{A}=۱۰۵-۷۵=۳۰^\circ$$



۳۰- گزینهٔ «۳» — متوسط

می‌دانیم اندازه زاویه‌ای که از برخورد ۲ نیمساز داخلی زوایا **B** و **C** از مثلث **ABC** به وجود می‌آید برابر $(\hat{N}=۹۰+\frac{A}{۲})$ است و چون چهارضلعی **AMNP** محاطی است پس زوایا روبه‌رو هم مکمل‌اند پس داریم:

$$\hat{A}+\hat{N}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}+۹۰+\frac{\hat{A}}{۲}=۱۸۰ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\hat{A}=۹۰ \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$



۳۱- گزینهٔ «۲» — دشوار

می‌دانیم در ذوزنقه متساوی الساقین زاویه‌های روبه‌رو به یک قاعده با هم برابر هستند پس $\hat{A}=\hat{B}=۲\alpha$ و $\hat{C}=\hat{D}=۲\beta$

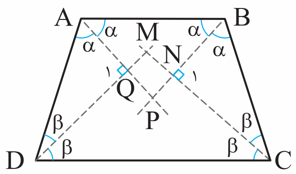
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰ \Rightarrow ۲\alpha+۲\alpha+۲\beta+۲\beta=۳۶۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} \alpha+\beta=۹۰$$

فرض کنیم چهارضلعی **MNPQ** حاصل از برخورد نیمسازهای ذوزنقه متساوی الساقین **ABCD** باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ADQ}:\underbrace{\alpha+\beta}_{۹۰}+\hat{Q}'_۱=۱۸۰ \Rightarrow \hat{Q}_۱=۹۰ \Rightarrow \hat{Q}=۹۰ \\ \overset{\triangle}{BCN}:\underbrace{\alpha+\beta}_{۹۰}+\hat{N}_۱=۱۸۰ \Rightarrow \hat{N}_۱=۹۰ \Rightarrow \hat{N}=۹۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{Q}+\hat{N}=۱۸۰$$

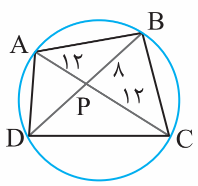
پس واضح است $\hat{M}+\hat{P}=۱۸۰$ و چون زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند پس چهارضلعی **MNPQ** محاطی است.



۳۲- گزینهٔ «۳» — آسان

چون چهارضلعی محاطی است، همه رئوس آن روی دایره قرار گرفته است و دو وتر **AC** و **BD** همدیگر را در نقطه **p** قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD \Rightarrow ۱۲\times ۱۲=۸\times PD \Rightarrow PD=۱۸$$



۳۳- گزینهٔ «۳» — دشوار

همواره دو **n**ضلعی محاط و محیط به یک دایره با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها $\cos\frac{۱۸۰}{n}$ می‌باشد.

$$\text{نسبت تشابه}=K=\cos\frac{۱۸۰}{n}=\cos\frac{۱۸۰}{۶}=\cos ۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی منتظم‌محاطی}}{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محیطی}}=K^۲ \Rightarrow \frac{۶\sqrt{۳}}{S}=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow ۳S=۲۴\sqrt{۳} \Rightarrow S=۸\sqrt{۳}$$

۳۴- گزینهٔ «۲» — دشوار

می‌دانیم اندازه هر ضلع یک **n**ضلعی منتظم محاطی از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$AB=۲R\sin\frac{۱۸۰}{n} \Rightarrow ۲=۲R\sin\frac{۱۸۰}{n} \Rightarrow ۱=R\sin ۲۲/۵ \Rightarrow R=\frac{۱}{\sin ۲۲/۵}$$

می‌دانیم:

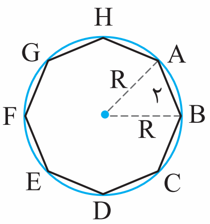
$$\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha \Rightarrow ۲\sin^۲\alpha=۱-\cos ۲\alpha \Rightarrow \sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

اگر به جای α، ۲۲/۵ درجه قرار دهیم، داریم:

$$\sin^۲ ۲۲/۵=\frac{۱-\cos ۴۵}{۲}=\frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲}=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$S=\pi R^۲=\pi(\frac{۱}{\sin ۲۲/۵})^۲=\frac{\pi}{\sin^۲ ۲۲/۵}=\frac{\pi}{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}}$$

$$=\frac{۴\pi}{۲-\sqrt{۲}}\times\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}} \Rightarrow S=۲\pi(۲+\sqrt{۲})$$



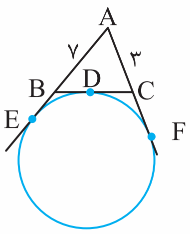
۳۵- گزینهٔ «۱» — متوسط

$$۲P=AB+AC+BC=۷+۳+۵=۱۵ \Rightarrow P=۷/۵$$

می‌دانیم **AE** و **AF** با هم برابرند و هر کدام برابر نصف محیط می‌باشند.

$$AE=AB+BE \Rightarrow ۷/۵=۷+BE \Rightarrow BE=۰/۵=BD$$

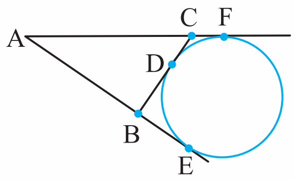
$$AF=AC+CF \Rightarrow ۷/۵=۳+FC \Rightarrow FC=۴/۵=DC$$



$$\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{FC}=\frac{۰/۵}{۴/۵}=\frac{۱}{۹}$$

۳۶- گزینهٔ «۴» آسان

با تغییر نقطه **D** روی دایره، محیط مثلث همچنان ثابت و برابر $۲AE = ۲AF$ است، اما مساحت مثلث تغییر می‌کند.



۳۷- گزینهٔ «۱» دشوار

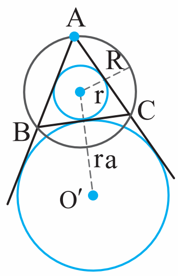
در مثلث متساوی‌الاضلاع:

۱) مرکز دایره محیطی با مرکز دایره محاطی داخلی، یکی است.

۲) تمام دایره‌های محاطی خارجی با دایره محاطی داخلی مماس خارج هستند.

۳) شعاع دایره محاطی داخلی و محیطی و محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** به ترتیب $r = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$، $R = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ و $r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

$$OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a + \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \xrightarrow{a=\sqrt{۳}} OO' = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۲$$

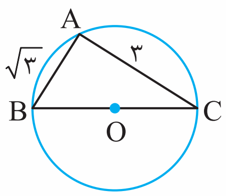


۳۸- گزینهٔ «۳» متوسط

در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایره محیطی وسط وتر است پس ($R_{\text{محیطی}} = \frac{\text{وتر}}{۲}$)

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۳ + ۹ = ۱۲ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۳}$$

$$R = \frac{BC}{۲} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$



۳۹- گزینهٔ «۴» متوسط

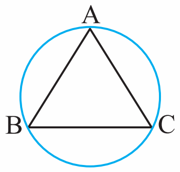
$$S = \pi R^۲ \Rightarrow ۴\pi\sqrt{۳} = \pi R^۲ \Rightarrow R^۲ = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow R = ۲\sqrt[۴]{۳}$$

می‌دانیم شعاع دایره محیطی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ است.

$$R = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a \Rightarrow ۲\sqrt[۴]{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a \Rightarrow a = \frac{۶}{\sqrt[۴]{۳}}$$

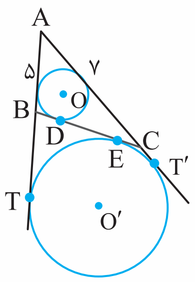
مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

$$S_\Delta = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\left(\frac{۶}{\sqrt[۴]{۳}}\right)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times \frac{۳۶}{\sqrt{۳}} = ۹$$



۴۰- گزینهٔ «۳» دشوار

محل تلاقی نیمسازهای داخلی (نقطه **O**) مرکز دایره محاطی داخلی است و محل تلاقی نیمساز داخلی **A** با نیمسازهای خارجی **B** و **C**، مرکز دایره محاطی خارجی است که به ضلع **BC** مماس است که تصویر نقطه **O** روی ضلع **BC** نقطه **D** است و تصویر نقطه O' روی ضلع **BC** نقطه **E** است.



روش اول:

$$۲P = AB + BC + AC = ۵ + ۸ + ۷ = ۲۰ \Rightarrow P = ۱۰$$

$$BD = P - AC = ۱۰ - ۷ = ۳$$

$$AT = AT' = P = ۱۰$$

$$AT = AB + BT \Rightarrow ۱۰ = ۵ + BE \Rightarrow BE = ۵$$

$$DE = BE - BD = ۵ - ۳ = ۲$$

روش دوم: همواره طول **DE** برابر قدرمطلق تفاضل دو ضلع **AB** و **AC** است.

$$DE = |AC - AB| = |۷ - ۵| \Rightarrow DE = ۲$$

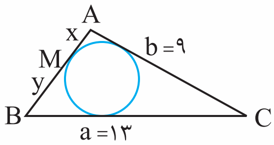
۴۱- گزینهٔ «۱» — متوسط

$$۲P = AB + AC + BC = ۸ + ۹ + ۱۳ = ۳۰ \Rightarrow P = ۱۵$$

$$x = AM = p - a = ۱۵ - ۱۳ \Rightarrow x = ۲$$

$$y = BM = p - b = ۱۵ - ۹ \Rightarrow y = ۶$$

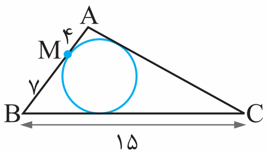
$$\frac{x}{y} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$



۴۲- گزینهٔ «۳» — آسان

$$AM = P - BC \Rightarrow ۴ = P - ۱۵ \Rightarrow P = ۱۹$$

$$۲P = ۲(۱۹) = ۳۸$$



۴۳- گزینهٔ «۴» — متوسط

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم می‌باشد پس:

$$BH = HC = \frac{BC}{۲} = ۴$$

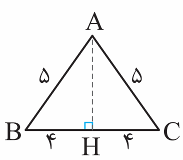
$$\overset{\triangle}{ABH} : AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۲۵ = AH^{۲} + ۱۶$$

$$\Rightarrow AH^{۲} = ۹ \Rightarrow AH = ۳$$

$$S_{\underset{ABC}{\triangle}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۸ \Rightarrow S = ۱۲$$

$$۲P = AB + AC + BC = ۵ + ۵ + ۸ = ۱۸ \Rightarrow P = ۹$$

بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی، دایره‌ای است که به بزرگ‌ترین ضلع مثلث مماس است.



$$r_a = \frac{S}{p - a} = \frac{۱۲}{۹ - ۸} = ۱۲$$

۴۴- گزینهٔ «۲» — متوسط

اگر h_a و h_b و h_c باشد، شعاع داخلی از رابطه $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$ به دست می‌آید.

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{۴ + ۳ + ۲}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow r = \frac{۴}{۳}$$

۴۵- گزینهٔ «۱» — دشوار

می‌دانیم در هر مثلث، نسبت اضلاع برابر عکس نسبت ارتفاع‌ها است.

$$b + c = ۳a \xrightarrow{\div a} \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = ۳ \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} = ۳$$

$$\xrightarrow{\div h_a} \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۳}{h_a} \xrightarrow{+\frac{۱}{h_a}} \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۴}{h_a}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{۴}{h_a} \Rightarrow \frac{r}{h_a} = \frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$$

۴۶- گزینهٔ «۴» — متوسط

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی $r = \frac{S}{p}$ و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس **A** از دستور $r_a = \frac{S}{p - a}$ به دست می‌آید.

$$۲p = a + b + c = ۷ + ۶ + ۱۱ = ۲۴ \Rightarrow p = ۱۲$$

$$\frac{r}{r_a} = \frac{\frac{S}{p}}{\frac{S}{p - a}} = \frac{p - a}{p} = \frac{۱۲ - ۷}{۱۲} = \frac{۵}{۱۲}$$

۴۷- گزینهٔ «۴» — متوسط

می‌دانیم اگر r_a و r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی و **r** شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد رابطه $\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$ برقرار است.

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۴ + ۶ + ۳}{۳۶} = \frac{۱۳}{۳۶} \Rightarrow r = \frac{۳۶}{۱۳}$$

شعاع دایره محاطی داخلی از دستور $r = \frac{S}{p}$ به دست می‌آید.

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow \frac{۳۶}{۱۳} = \frac{۱۴۴}{p} \Rightarrow \frac{۱}{۱۳} = \frac{۴}{p} \Rightarrow p = ۵۲ \Rightarrow ۲p = ۱۰۴$$

۴۸- گزینهٔ «۳» — متوسط

اگر h_a و h_b و h_c سه ارتفاع یک مثلث و r_a و r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی و **r** شعاع دایره محاطی داخلی باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} \\ \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c}$$

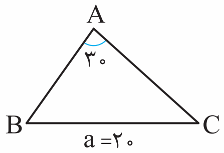
$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۲۰} = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{r_c}$$

$$\xrightarrow{\times ۶۰} ۵ + ۴ + ۳ = ۶ + ۲ + \frac{۶۰}{r_c} \Rightarrow ۴ = \frac{۶۰}{r_c} \Rightarrow r_c = ۱۵$$

۴۹- گزینهٔ «۱» — متوسط

در هر مثلث نسبت اندازه هر ضلع به **sin** زاویه روبه‌رو به ان ضلع برابـر قطـر دایره محیطی است.

$$\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}}=2R \Rightarrow R=20$$



۵۰- گزینهٔ «۳» — دشوار

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد کـه طـول این مماس‌ها با هم برابر است پس

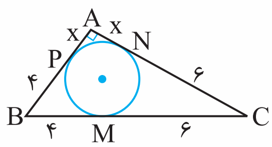
$$BM=BP=4 \Rightarrow MC=CN=10-4=6$$

و $AP=AN=x$ است در این‌صورت $AB=4+x$ و $AC=6+x$ و $BC=10$ است.

$$AB^2+AC^2=BC^2 \Rightarrow (4+x)^2+(6+x)^2=10^2$$

$$\Rightarrow 16+8x+x^2+36+12x+x^2=100 \Rightarrow 2x^2+20x-48=0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2+10x-24=0 \Rightarrow (x+12)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-12 & \text{غ‌ق‌ق} \\ x=2 \end{cases}$$



$$AC=6+x=6+2=8$$

۱- آسان

آ) درست — ب) نادرست

پ) درست — ت) نادرست

۲- آسان

آ) ۹۰ درجه — ب) کمان

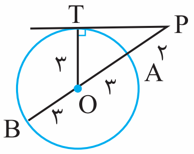
پ) $2\sqrt{RR'}$ — ت) مربع

۳- متوسط

از نقطه **P** به نقطه **O** مرکز دایره وصل می‌کنیم تا مطابق شکل دایره را در **A** و **B** قطع کند **A** نزدیک‌ترین نقطه روی دایره تا **P** است کـه $PA=2$ اسـت و می‌دانیم **OT** بر خط **PT** عمود است.

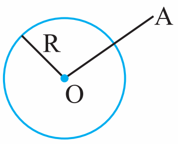
$$\overset{\triangle}{OTP}: OP^2=OT^2+PT^2 \Rightarrow 25=9+PT^2$$

$$\Rightarrow PT^2=16 \Rightarrow PT=4$$



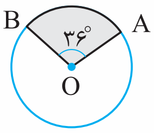
۴- آسان

$$OA>R \Rightarrow 3m-2>7 \Rightarrow 3m>9 \Rightarrow m>3$$



۵- آسان

$$S=\frac{\alpha\pi R^2}{360} \Rightarrow S=\frac{36\pi(20)^2}{360} \Rightarrow S=40\pi$$



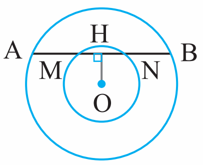
۶- متوسط

از نقطه **O** مرکز دو دایره به **AB** عمود می‌کنیم، می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند.

در دایره کوچک‌تر: $OH \perp MN \Rightarrow MH=HN$

در دایره بزرگ‌تر: $OH \perp AB \Rightarrow AH=HB$

$$\Rightarrow AM+MH=HN+BN \xrightarrow{MH=NH} AM=BN$$



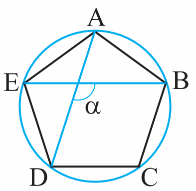
۷- متوسط

$$AB=BC=CD=DE=EA$$

$$\Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=\widehat{EA}=\frac{360}{5}=72^\circ$$

$$\alpha=\frac{\widehat{AE}+\widehat{BCD}}{2}=\frac{\widehat{AE}+\widehat{BC}+\widehat{CD}}{2}=\frac{36+36+36}{2}=\frac{108}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=54^\circ$$



۸- دشوار

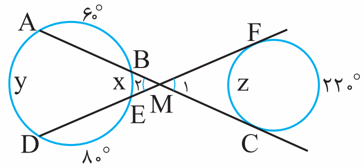
$$Z+۲۲۰=۳۶۰ \Rightarrow Z=۱۴۰$$

$$\hat{M}_۱=\frac{۲۲۰-Z}{۲}=\frac{۲۲۰-۱۴۰}{۲}=\frac{۸۰}{۲} \Rightarrow \hat{M}_۱=۴۰$$

$$\hat{M}_۱=\hat{M}_۲=۴۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_۲=\frac{y-x}{۲} \Rightarrow ۴۰=\frac{y-x}{۲} \Rightarrow y-x=۸۰\\ ۶۰+x+۸۰+y=۳۶۰ \Rightarrow x+y=۲۲۰\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow y=۱۵۰, x=۷۰ \Rightarrow \overset{\frown}{BE}=۷۰^\circ$$



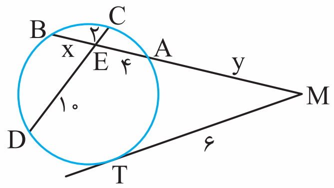
۹- دشوار

$$BE\cdot EA=EC\cdot ED \Rightarrow x\times ۴=۲\times ۱۰ \Rightarrow x=۵$$

$$MT^۲=MA\cdot MB \Rightarrow ۶^۲=y(y+۴+x)$$

$$\xrightarrow{x=۵} ۳۶=y^۲+۹y \Rightarrow y^۲+۹y-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow (y+۱۲)(y-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=-۱۲ & \text{غ‌ق‌ق} \\ y=۳ \end{cases}$$



۱۰- آسان

$$OO'=۱$$

$$R+R'=۳+\sqrt{۵}\simeq ۵/۲$$

$$|R-R'|=۳-\sqrt{۵}\simeq ۰/۸$$

$|R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

۱۱- متوسط

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۱۷^۲-(۸+۷)^۲}=\sqrt{۲۸۹-۲۲۵}$$

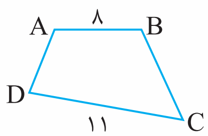
$$=\sqrt{۶۴} \Rightarrow TT'=۸$$

۱۲- متوسط

اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر هستند و برابر نصف محیط است ($۲P=$ محیط)

$$AB+DC=AD+BC=P \Rightarrow ۱۱+۸=P \Rightarrow P=۱۹$$

$$\Rightarrow ۲P=۳۸$$



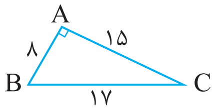
۱۳- دشوار

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow \hat{A}=۹۰$$

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۵=۶۰$$

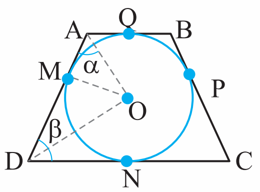
$$۲P=AB+AC+BC=۸+۱۵+۱۷=۴۰ \Rightarrow P=۲۰$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{۶۰}{۲۰} \Rightarrow r=۳$$



۱۴- دشوار

اگر فرض کنیم $AB=۲a$ و $DC=۲b$ است می‌دانیم $AQ=QB=a$ و $DN=NC=b$ است و از هر نقطه خارج دایره ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر است.



$$DN=DM=b, AQ=AM=a$$

هر ذوزنقه متساوی‌الساقین $\hat{A}=\hat{B}=۲\alpha$ و $\hat{D}=\hat{C}=۲\beta$ است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰ \Rightarrow ۲\alpha+۲\alpha+۲\beta+۲\beta=۳۶۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} \alpha+\beta=۹۰^\circ$$

می‌دانیم مرکز دایره محاطی داخلی، محل تلاقی نیمسازها است پس در مثلث **OAD** داریم:

$$\underbrace{\hat{\alpha}+\hat{\beta}}_{۹۰}+\hat{O}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{O}=۹۰^\circ$$

و شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $\hat{M}=۹۰^\circ$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین پاره‌خط‌های به وجود آمده است پس

$$OM^۲=AM\times MD \Rightarrow R^۲=ab \Rightarrow ۴R^۲=(۲a)(۲b)$$

$$\Rightarrow ۴R^۲=AB\times DC$$

۱۵- متوسط

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۶+۴++۳}{۱۲}=\frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱۳}{۱۲}=\frac{۱}{r} \Rightarrow r=\frac{۱۲}{۱۳}$$

۱- آسان

آ) درست　　ب) درست

پ) نادرست　　ت) درست

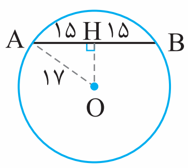
۲- آسان

آ) با هم برابرند　　ب) شعاع وارد بر آن نقطه عمود باشد

پ) متخارج　　ت) محیطی

۳- متوسط

می‌دانیم اگر از مرکز دایره‌ای به یک وتر از همان دایره عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند.



$$AH = HB = \frac{AB}{۲} = ۱۵$$

$$\overset{\Delta}{OAH} : OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow ۱۷^۲ = OH^۲ + ۱۵^۲ \Rightarrow ۲۸۹ - ۲۲۵ = OH^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲ = ۶۴ \Rightarrow OH = ۸$$

۴- آسان

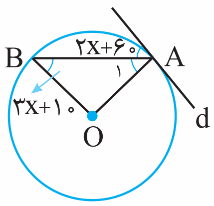
$$\text{ظلی } d\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۲x + ۶۰ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۴x + ۱۲۰$$

$$\text{مرکزی } \hat{O} = \overset{\frown}{AB} = ۴x + ۱۲۰$$

$$\overset{\Delta}{OAB} : OA = OB = R \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{B} = \hat{A}_۱ = ۳x + ۱۰$$

$$\hat{A}_۱ + \hat{B} + \hat{O} = ۱۸۰ \Rightarrow ۳x + ۱۰ + ۴x + ۱۲۰ + ۳x + ۱۰ = ۱۸۰$$

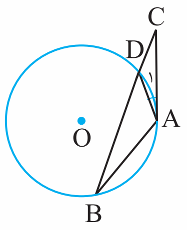
$$\Rightarrow ۱۰x = ۴۰ \Rightarrow x = ۴$$



۵- دشوار

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} : AC = AB \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{B} = \hat{C} \\ \left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \text{ظلی } \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ \end{array}\right\}$$

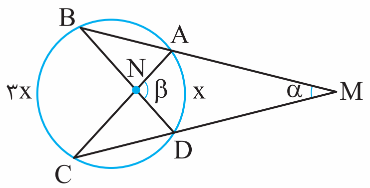
$\Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C} \Rightarrow$ مثلث ADC متساوی الساقین است.



۶- متوسط

اگر فرض کنیم $\overset{\frown}{AB} = x$ آن‌گاه $\overset{\frown}{BC} = ۲x$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۳x + x}{۲} \Rightarrow \hat{\beta} = ۲x \\ \alpha = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{۳x - x}{۲} \Rightarrow \alpha = x \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = ۲\alpha$$



۷- دشوار

با فرض $N = x$ و $AM = y$ داریم:

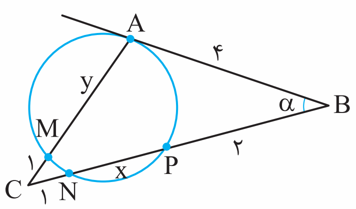
$$AB^۲ = BP \cdot BN \Rightarrow ۱۶ = ۲ \times (۲ + x) \Rightarrow ۸ = ۲ + x \Rightarrow x = ۶$$

$$CN \cdot CP = CM \cdot CA \Rightarrow ۱ \times ۷ = ۱(۱ + y) \Rightarrow ۷ = y + ۱ \Rightarrow y = ۶$$

$$BC = BP + PN + CN = ۲ + ۶ + ۱ = ۹$$

$$CA = CM + MA = ۱ + ۶ = ۷$$

$$\text{محیط}_{ABC} = AB + BC + AC = ۴ + ۹ + ۷ = ۲۰$$

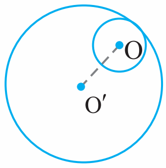


۸- متوسط

اگر شعاع دایره بزرگ‌تر R' و شعاع دایره کوچک‌تر R باشد

$$OO' = R' - R = ۳$$

$$۲۱\pi = \pi R'^{۲} - \pi R^{۲} \xrightarrow{\div \pi} ۲۱ = \underbrace{(R' - R)}_{۳}(R + R') \Rightarrow R + R' = ۷$$



$$\begin{cases} R' - R = ۳ \\ R' + R = ۷ \end{cases} \Rightarrow R' = ۵$$

$$R = ۲$$

۹- متوسط

$$TT' = \sqrt{OO' - (R - R')^{۲}} \Rightarrow ۱۵ = \sqrt{OO'^{۲} - (۱۴ - ۶)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۲۲۵ = OO'^{۲} - ۶۴ \Rightarrow OO'^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow OO' = ۱۷$$

۱۰- آسان

دو دایره زمانی ۳ مماس مشترک دارند که مماس برون باشند

$$OD = R + R' \Rightarrow ۱۲ = ۲m + ۱ + m + ۲ \Rightarrow ۳m + ۳ = ۱۲$$

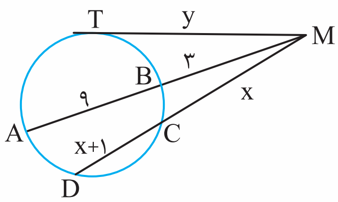
$$\Rightarrow ۳m = ۹ \Rightarrow m = ۳$$

۱۱- دشوار

$$MB \cdot MA = MC \cdot MD \Rightarrow ۳ \times ۱۲ = x \cdot (x + x + ۱) \Rightarrow ۳۶ = ۲x^{۲} + x$$

$$\Rightarrow ۲x^{۲} + x - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(۲x + ۹) \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = -\frac{۹}{۲} \ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$MT^{۲} = MB \cdot MA \Rightarrow y^{۲} = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow y = ۶$$



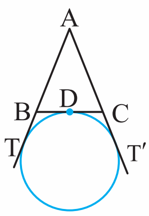
۱۲- دشوار

$$AB + BC + AC = ۶ + ۹ + ۷ \Rightarrow AB + BD + DC + AC = ۲۲$$

$$\Rightarrow AB + BT + CT' + AC = ۱۱ \Rightarrow AT + AT' = ۲۲$$

$$\Rightarrow ۲AT = ۲۲ \Rightarrow AT = ۱۱$$

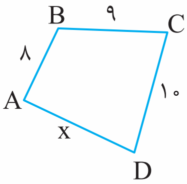
$$AT = AB + BT \Rightarrow ۱۱ = ۶ + BD \Rightarrow BD = ۵$$



۱۳- متوسط

وقتی ۳ نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه عبور می‌کند، حتماً نیمساز زاویه چهارم نیز از همان نقطه می‌گذرد یعنی نیمسازها همرسند و چهارضلعی محیطی است و در چهارضلعی محیطی، مجموع هر دو ضلع مقابل با هم برابرند.

$$AB + CD = BC + AD \Rightarrow ۸ + ۱۰ = ۹ + x \Rightarrow x = ۹$$



۱۴- متوسط

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{۴ + ۳ + ۲}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{۹}{۱۲} \Rightarrow r = \frac{۴}{۳}$$

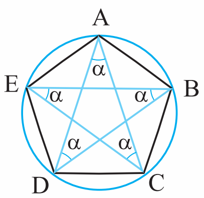
۱- گزینه «۲» دشوار

$$AB = BC = CD = DE = EA$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA} = \frac{۳۶۰}{۵} = ۷۲$$

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۷۲}{۲} = ۳۶$$

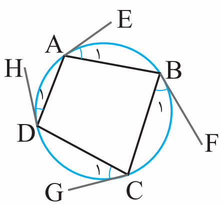
مجموع زوایا $= ۵\alpha = ۵(۳۶) = ۱۸۰$



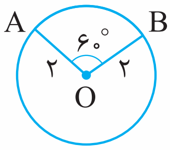
۲- گزینه «۱» متوسط

می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی نصف کمان روبه‌رو به آن است

$$\hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ + \hat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}}{۲} = \frac{۳۶۰}{۲} = ۱۸۰$$



۳- گزینهٔ «۲» — آسان

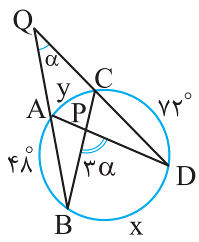


$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha\pi R}{۱۸۰} = \frac{۶۰\pi\times ۲}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}$$

۴- گزینهٔ «۱» — متوسط

اگر $\hat{Q}=\alpha$ باشد با $\hat{P}=۳\alpha$ است با فرض $\widehat{AC}=y$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{\widehat{BD}-\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow ۲\alpha=x-y \\ ۳\alpha=\dfrac{\widehat{BD}+\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow ۶\alpha=x+y \end{array}\right\} \Rightarrow x=۴\alpha \Rightarrow y=۲\alpha$$



$$\widehat{AC}+\widehat{CD}+\widehat{DB}+\widehat{AB}=۳۶۰$$

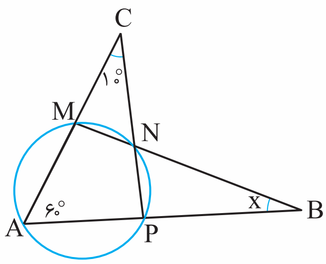
$$\Rightarrow y+۷۲+x+۴۸=۳۶۰$$

$$\Rightarrow ۶\alpha=۲۴۰ \Rightarrow \alpha=۴۰$$

$$\widehat{BD}=x=۴\alpha=۱۶۰^\circ$$

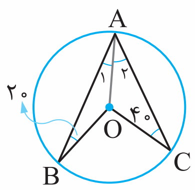
۵- گزینهٔ «۳» — آسان

$$\hat{C}+\hat{B}+۲\hat{A}=۱۸۰ \Rightarrow ۱۰+x+۱۲۰=۱۸۰ \Rightarrow x=۵۰$$



۶- گزینهٔ «۴» — آسان

O را به **A** وصل می‌کنیم



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AOB}: OA=OB=R \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{B}=۲۰ \\ \overset{\triangle}{AOC}: OA=OC=R \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{C}=۴۰ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۶۰ \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$

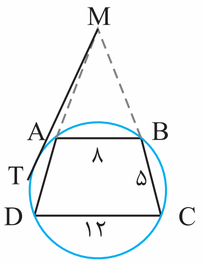
$$\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow ۶۰=\frac{\widehat{BC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BC}=۱۲۰$$

۷- گزینهٔ «۲» — دشوار

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{DC}=\frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{MB}{MB+۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{MB}{MB+۵} \Rightarrow ۳MB=۲MB+۱۰ \Rightarrow MB=۱۰$$

$$MT^۲=MB\cdot MC \Rightarrow MT^۲=۱۰\times۱۵=۱۵۰=۲۵\times۶ \Rightarrow MT=۵\sqrt{۶}$$



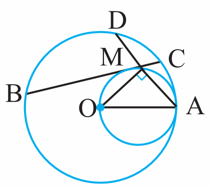
۸- گزینهٔ «۲» — دشوار

از نقطه **M** به **O** و **A** وصل می‌کنیم

$\hat{M}=۹۰^\circ$ محاطی رو به قطر

چون از مرکز دایره بزرگ‌تر به وتر **AD** عمود کرده‌ایم، آن وتر به قسمت مساوی تقسیم می شود یعنی $MA=MD$ است و برای دو وتر **AD** و **BC** که یکدیگر را در نقطه **M** داخل دایره قطع کرده‌اند، داریم:

$$MA\cdot MD=MB\cdot MC \xrightarrow{MA=MD} MA^۲=MB\cdot MC$$



۹- گزینهٔ «۱» — آسان

$$R+R'=\sqrt{۵}+\sqrt{۲}\simeq ۳/۶$$

$$|R-R'|=\sqrt{۵}-\sqrt{۲}\simeq ۰/۸$$

$|R-R'|<OO'=۱<R+R' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

۱۰- گزینهٔ «۴» — آسان

$$\begin{cases} ۳R_۱+۴R_۲=۴d \\ R_۱+۲R_۲=\dfrac{۱۱}{۶}d \end{cases} \Rightarrow R_۱=\frac{d}{۳}, R_۲=\frac{۳}{۴}d \Rightarrow R_۱+R_۲=\frac{۱۳d}{۱۲}$$

$$R_۲-R_۱=\frac{۵d}{۱۲}$$

$$|R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$$

دو دایره متقاطع هستند و ۲ مماس مشترک دارند.

۱۱- گزینهٔ «۳» — آسان

$$TT'=\sqrt{OO'-(R+R')^۲} \Rightarrow TT'=\sqrt{۱۰۰-(۵+۳)^۲}$$

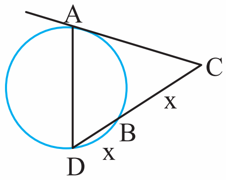
$$=\sqrt{۳۶} \Rightarrow TT'=۶$$

۱۲- گزینهٔ «۴» متوسط

$DB = BC = x$

$AC^۲ = CB \cdot CD \Rightarrow AC^۲ = x \times ۲x \Rightarrow AC = x\sqrt{۲}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{x\sqrt{۲}}{x} = \sqrt{۲}$



۱۳- گزینهٔ «۴» دشوار

می‌دانیم در چهارضلعی محیطی، جمع دو ضلع روبه‌رو با هم برابر است، اگر فرض کنیم $AB = a$ و $CD = b$ داریم:

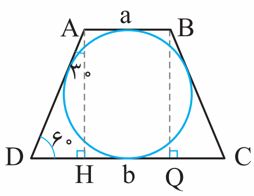
$AB + CD = AD + BC \xrightarrow{AD=BC} a + b = ۲AD$

$\Rightarrow AD = \frac{a+b}{۲}$

ارتفاع‌های **AH** و **BQ** را رسم می‌کنیم $AB = HQ = a$ و $DH = QC = \frac{b-a}{۲}$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

$DH = \frac{۱}{۲}AD \Rightarrow \frac{b-a}{۲} = \frac{a+b}{۴} \Rightarrow ۲b - ۲a = a + b \Rightarrow b = ۳a$

$P = AB + DC = a + b = ۴a$



می‌دانیم اگر یک ذوزنقه هم محیطی و هم محاطی باشد (ذوزنقه متساوی‌الساقین همواره محاطی است) مساحت آن برابر حاصلضرب واسطه حسابی در واسطه هندسی قاعده‌ها است.

$S = \frac{a+b}{۲}\sqrt{ab} \xrightarrow{b=۳a} S = ۲a \times a\sqrt{۳} = ۲a^۲\sqrt{۳}$

$r = \frac{S}{p} \Rightarrow ۲ = \frac{۲a^۲\sqrt{۳}}{۴a} \Rightarrow ۴ = a\sqrt{۳} \Rightarrow a = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$

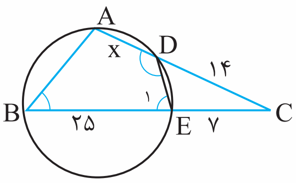
$S = ۲a^۲\sqrt{۳} = ۲ \times \frac{۱۶}{۳}\sqrt{۳} = \frac{۳۲\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$

۱۴- گزینهٔ «۲» دشوار

چون $\hat{B} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$ پس $\hat{A} + \hat{E}_۱ = ۱۸۰$ در نتیجه چهارضلعی **ADEB** محاطی است و دو وتر **AD** و **BE** همدیگر را در نقطه **C** خارج دایره قطع کرده‌اند پس داریم:

$CD \times CA = CE \times CB \Rightarrow ۱۴ \times (۱۴ + x) = ۷ \times ۳۲$

$\xrightarrow{\div ۱۴} ۱۴ + x = ۱۶ \Rightarrow x = ۲$



۱۵- گزینهٔ «۲» دشوار

می‌دانیم هر وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و هرگاه از مرکز یک دایره به یک وتر از همان دایره عمود کنیم آن وتر را نصف می‌کند

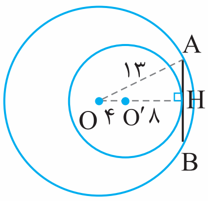
$AH = HB$

بیش‌ترین فاصله وتری از دایره بزرگ‌تر که به دایره کوچک‌تر مماس است برابر **OH** است که $OH = ۴ + ۸ = ۱۲$

$\overset{\triangle}{OAH} : OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۱۶۹ = AH^۲ + ۱۴۴$

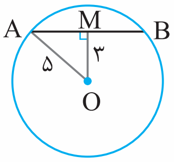
$\Rightarrow AH^۲ = ۲۵ \Rightarrow AH = ۵$

$AB = ۲AH = ۱۰$



۱۶- گزینهٔ «۳» متوسط

کوتاه‌ترین وتری از دایره که از نقطه **M** می‌گذرد، وتری است که به قطر عبوری از **M** عمود باشد.



$OA^۲ = OH^۲ + AM^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۹ + AM^۲$

$\Rightarrow AM^۲ = ۱۶ \Rightarrow AM = ۴$

$AB = ۲AM = ۲(۴) = ۸$

۱۷- گزینهٔ «۱» متوسط

همواره طول مماس مشترک داخلی دو دایره از طول مماس مسترک خارجی آن بزرگ‌تر نمی‌باشد.

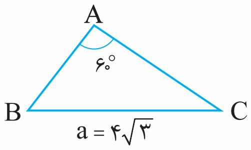
$TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R + R')^۲} \Rightarrow \sqrt{۱۰^۲ - (R+۱)^۲}$

$\Rightarrow ۶۴ = ۱۰۰ - (R+۱)^۲ \Rightarrow (R+۱)^۲ = ۳۶ \Rightarrow R + ۱ = ۶ \Rightarrow R = ۵$

۱۸- گزینهٔ «۳» متوسط

$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow \frac{۴\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۲R \Rightarrow ۸=۲R \Rightarrow R=۴$$

$$S=\pi R^۲=\pi(۴)^۲ \Rightarrow S=۱۶\pi$$



۱۹- گزینهٔ «۲» متوسط

می‌دانیم در چهارضلعی محاطی مجموع زوایا روبه‌رو ۱۸۰° است اگر $\hat{A}=۱۰۲^\circ$ و $\hat{B}=۷۵^\circ$ باشد چون $\hat{A}+\hat{B}\neq ۱۸۰^\circ$ است پس **A** و **B** روبه‌رو هم نیستند.

$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۱۰۲+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow C=۷۸^\circ$$

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰ \Rightarrow ۷۵+\hat{D}=۱۸۰ \Rightarrow D=۱۰۵^\circ$$

پس $\hat{D}=۱۰۵^\circ$ بزرگ‌ترین زاویه چهارضلعی است.

۲۰- گزینهٔ «۱» متوسط

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۴+۳+۲}{۲۴}=\frac{۱}{r}$$

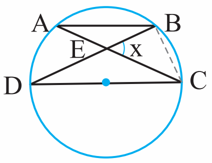
$$\Rightarrow r=\frac{۲۴}{۹} \Rightarrow r=\frac{۸}{۳}$$

۱- گزینهٔ «۲»

C را به **B** وصل کنیم، $E\hat{B}C$ محاطی رو به قطر است پس $E\hat{B}C=۹۰^\circ$ است در مثلث قائم‌الزاویه **EBC** داریم:

$$\cos x=\frac{BE}{EC} \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{محاطی } \hat{B}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\\ \text{محاطی } \hat{A}=\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\end{array}\right\} \overset{\text{زز}}{\Rightarrow} \overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{EDC} \Rightarrow K=\frac{BE}{EC}\xrightarrow{(۱)}K=\cos x$$



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AEB}}}{S_{\overset{\Delta}{EDC}}}=K^۲=\cos^۲ x$$

۲- گزینهٔ «۳»

M را به **A** و **B** وصل می‌کنیم.

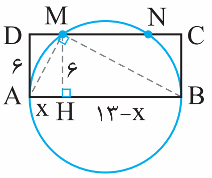
$A\hat{M}B=۹۰$ محاطی روبه‌رو به قطر

در مثلث قائم‌الزاویه **AMB**، ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم فرض کنیم $AH=x$ باشد، در این صورت $HB=۱۳-x$ است.

$$MH^۲=AH\times HB \Rightarrow ۳۶=x(۱۳-x) \Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۹)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۴\\ x=۹\end{cases}$$

چون $x<\frac{۱۳}{۲}$ است پس $x=۴$ یعنی $DM=۴$ و به طریق $NC=۴$ است.



$$MN=DC-(DM+WC)$$
$$=۱۳-(۴+۴)=۱۳-۸=۵$$

۳- گزینهٔ «۱»

B را به **D** وصل می‌کنیم، زاویه **D** محاطی رو به قطر است پس $\hat{D}=۹۰^\circ$.

$$ED=EH\xrightarrow{\text{عکس قضیه نیمساز}}\hat{B}_۱=\hat{B}_۲ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$$

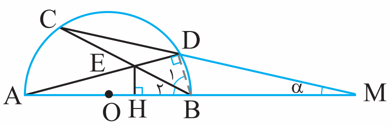
در چهارضلعی **HEDB** مجموع زوایا ۳۶۰ است پس داریم:

$$۹۰+۱۱۰+۹۰+B=۳۶۰ \Rightarrow \hat{B}=۷۰ \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲=۳۵$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=۷۰$$

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰ \Rightarrow ۷۰+۷۰+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰ \Rightarrow \overset{\frown}{DB}=۴۰$$

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{۷۰-۴۰}{۲}=۱۵^\circ$$

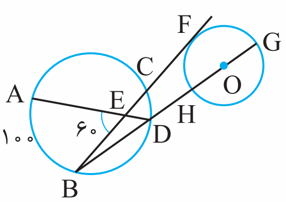


۴- گزینهٔ «۴»

$$A\hat{E}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow ۶۰=\frac{۱۰۰+\overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۲۰$$

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{۲۰}{۲} \Rightarrow \hat{B}=۱۰$$

اگر فرض کنیم $\overset{\frown}{FH}=x$ آن‌گاه $\overset{\frown}{FG}=۱۸۰-x$ است و در دایره کوچک‌تر داریم:



$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{FG}-\overset{\frown}{FH}}{۲} \Rightarrow ۱۰=\frac{۱۸۰-x-x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰=۱۸۰-۲x$$

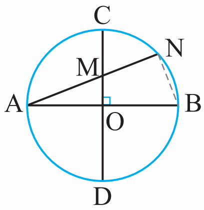
$$\Rightarrow ۲x=۱۶۰ \Rightarrow x=۸۰$$

۵- گزینهٔ «۱»

B را به **N** وصل می‌کنیم، زاویه **N** محاطی رو به قطر است پس $\hat{N}=۹۰$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}=\hat{N}=۹۰\\ \text{مشترک}\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{AOM}\sim\overset{\Delta}{ABN}\xrightarrow{\text{ا.م}}\frac{AM}{AB}=\frac{AO}{AN}$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{۱۰}=\frac{۵}{۸}\Rightarrow AM=\frac{۵۰}{۸}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow AM=۶/۲۵$$



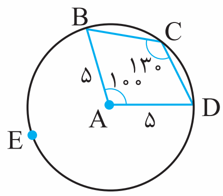
۶- گزینهٔ «۲»

به مرکز **A** و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم چون $AB=AD=۵$ است حتماً روی این دایره می‌باشد، ثابت می‌کنیم **C** هم روی این دایره است.

$$\text{مرکزی}\ \hat{A}=\widehat{BCD}\Rightarrow\widehat{BCD}=۱۰۰\Rightarrow\widehat{BEC}=۳۶۰-۱۰۰=۲۶۰$$

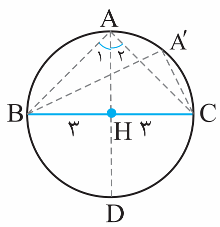
$\hat{C}=\frac{\widehat{BED}}{۲}=۱۳۰\Rightarrow$ C روی دایره است.

پس $AC=R=۵$ است.



۷- گزینهٔ «۴»

قاعده $BC=۶$ ثابت است و زمانی مساحت ماکزیمم می‌شود که ارتفاع آن ماکزیمم شود و برای این منظور **A** باید روی قطر عمود بر **BC** در دایره محیطی مثلث **ABC** قرار گیرد که می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند و کمان آن را هم نصف می‌کند پس $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۳۰$



$$\tan A_۱=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۳}{AH}$$

$$\Rightarrow AH=۳\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times۳\sqrt{۳}\times۶=۹\sqrt{۳}$$

۸- گزینهٔ «۳»

A را به **N** وصل می‌کنیم، چون **N** محاطی رو به قطر است، $\hat{N}=۹۰^\circ$

$$\overset{\Delta}{ANP}:PA^۲=PN^۲+AN^۲\Rightarrow۱۰۰=۳۶+NA^۲$$

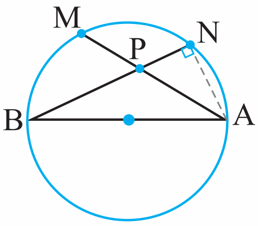
$$\Rightarrow NA^۲=۶۴\Rightarrow NA=۸$$

$$PB\cdot PN=PM\cdot PA\Rightarrow PB\times۶=۵/۴\times۱۰\Rightarrow PB=۹$$

$$BN=BP+PN=۹+۶=۱۵$$

$$\overset{\Delta}{NBA}:BA^۲=BN^۲+NA^۲\Rightarrow(۲R)^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹$$

$$\Rightarrow۲R=۱۷\Rightarrow R=۸/۵$$



۹- گزینهٔ «۳»

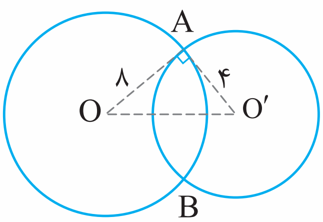
روش اول:

$$\overset{\Delta}{OAO'}:OO'^۲=OA^۲+O'A^۲=۶۴+۱۶=۸۰\Rightarrow OO'=\sqrt{۸۰}$$

$$TT'=\sqrt{OO'-(R-R')^۲}=\sqrt{۸۰-(۸-۴)^۲}=\sqrt{۸۰-۱۶}=\sqrt{۶۴}=۸$$

روش دوم: اگر دو دایره در نقطه **A** متقاطع باشند و $O\hat{A}O'=۹۰^\circ$ باشد طول مماس مشترک خارجی دو دایره از دستور $TT'=\sqrt{۲RR'}$ به دست می‌آید.

$$TT'=\sqrt{۲RR'}=\sqrt{۲\times۴\times۸}=\sqrt{۶۴}\Rightarrow TT'=۸$$

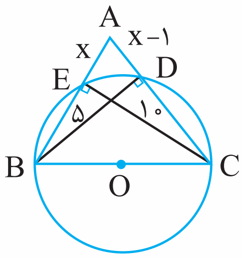


۱۰- گزینهٔ «۲»

دایره به قطر **BC** حتماً از **D** و **E** می‌گذرد چون **D** و **E** محاطی رو به قطر هستند که $\hat{D}=\hat{E}=۹۰$ است و امتداد دو وتر **BE** و **CD** از این دایره در خارج دایره همدیگر را قطع کرده‌اند پس داریم:

$$AE\cdot AB = AD\cdot AC \Rightarrow x(x+۵)=(x-۱)(x+۹)$$

$$\Rightarrow x^۲+۵x = x^۲+۸x-۹ \Rightarrow ۳x=۹ \Rightarrow x=۳$$



۱۱- گزینهٔ «۴»

O را به O' وصل می‌کنیم.

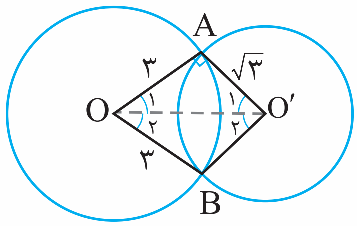
$$\left.\begin{array}{l} OA=OB=۳ \\ O'A=O'B=\sqrt{۳} \\ OO'=OO' \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} \overset{\Delta}{OAO'} \cong \overset{\Delta}{OBO'}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \left\{\begin{array}{l} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲=\dfrac{\hat{O}}{۲} \\ \hat{O}'_۱=\hat{O}'_۲=\dfrac{\hat{O}'}{۲} \end{array}\right.$$

$$\overset{\Delta}{OAO'} = \tan\hat{O}'_۱=\frac{OA}{O'A} \Rightarrow \tan\frac{\hat{O}'}{۲}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{O}'}{۲}=۶۰ \Rightarrow \hat{O}'=۱۲۰^\circ$$

$$|\widehat{AB}|=\frac{\hat{O}'\times\pi R'}{۱۸۰}=\frac{۱۲۰\pi\times\sqrt{۳}}{۱۸۰} \Rightarrow |\widehat{AB}|=\frac{۲\pi\sqrt{۳}}{۳}$$



۱۲- گزینهٔ «۱»

از مرکز دایره به وتر **BC** عمود می‌کنیم، می‌دانیم این پاره‌خط وتر **BC** را نصف می‌کند یعنی $BH=HC=۶$

$$\overset{\Delta}{OBH}: OB^۲=OH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۱۰۰=OH^۲+۳۶$$

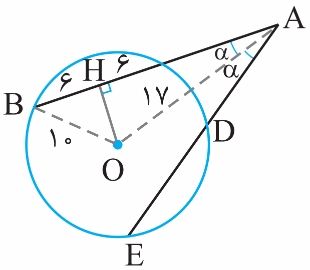
$$\Rightarrow OH^۲=۶۴ \Rightarrow OH=۸$$

$$\overset{\Delta}{OHA}: OA^۲=OH^۲+HA^۲ \Rightarrow ۲۸۹=۶۴+HA^۲$$

$$\Rightarrow HA^۲=۲۲۵ \Rightarrow HA=۱۵$$

$$\overset{\Delta}{OHA}: \tan\alpha=\frac{OH}{HA} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۸}{۱۵}$$

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{\frac{۱۶}{۲۵}}{۱-\frac{۶۴}{۲۲۵}}=\frac{\frac{۱۶}{۱۵}}{\frac{۱۶۱}{۲۲۵}}=\frac{۲۴۰}{۱۶۱}$$



۱۳- گزینهٔ «۳»

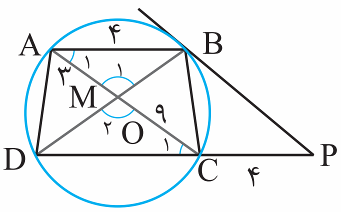
$$AB \parallel DC, \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A}_۱=\hat{C}_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱=\hat{C}_۱ \\ \text{متقابل به راس } \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AMB} \sim \overset{\Delta}{MDC}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{AM}{MC}=\frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۹}=\frac{۶}{DC} \Rightarrow DC=۱۸$$

از نقطه **P**، مماس **PB** و قاطع **PD** رسم شده است بنابراین داریم:

$$PB^۲=PC\cdot PD \Rightarrow PB^۲=۶\times ۲۴=۱۴۴ \Rightarrow PB=۱۲$$

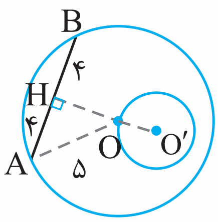


۱۴- گزینهٔ «۲»

ابتدا مکان هندسی نقاطی را پیدا می‌کنیم که وسط وتری به طول ۸ از دایره بزرگ‌تر باشد، می‌دانیم اگر از نقطه **O** (مرکز دایره) به وسط وتر وصل کنیم بر آن عمود است.

$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^{۲} = AH^{۲} + OH^{۲} \Rightarrow ۲۵ = ۱۶ + OH^{۲}$$
$$\Rightarrow OH^{۲} = ۹ \Rightarrow OH = ۳$$

پس مکان هندسی وسط وترهای به طول ۸ از دایره بزرگ‌تر، دایره‌ای به مرکز **O** و شعاع ۳ است که با C'' نمایش می‌دهیم پس $C''(O,۳)$



دو دایره $C'(O',۲)$ و $C''(O,۳)$ چون $OO' = ۲$ است و

$$|R'' - R| < OO' < R' + R''$$

$(۱ < OO' < ۵)$ متقاطع هستند و دو مماس مشترک دارند.

۱۵- گزینهٔ «۱»

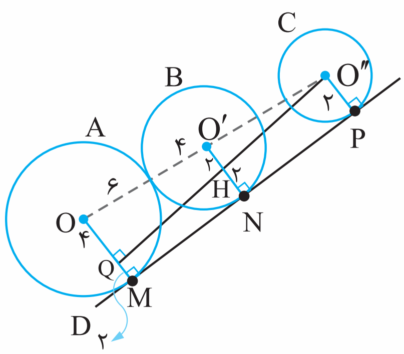
شعاع‌های $O''P$ و $O'N$ و **OM** بر خط Δ عمود، از O'' به **OM** عمود رسم می‌کنیم $O''P = HN = QM = ۲$ پس $O'H = ۴ - ۲ = ۲$ و $OQ = ۶ - ۲ = ۴$ است چون دایره **C** و C' مماس خارج هستند

$$OO' = R + R' = ۶ + ۴ = ۱۰$$

$$\overset{\Delta}{OQO''}: O'H \parallel OQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O''O'}{O''O} = \frac{O'H}{OQ}$$

$$\Rightarrow \frac{O''O'}{O''O' + ۱۰} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow ۲O''O' = ۱۰ + O''O' \Rightarrow O''O' = ۱۰$$

$$\Rightarrow R' + BC + R'' = ۱۰ \Rightarrow ۴ + BC + ۲ = ۱۰ \Rightarrow BC = ۴$$

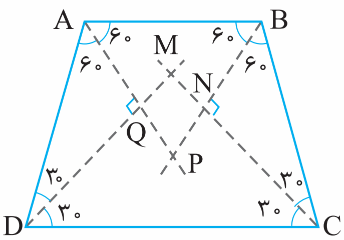


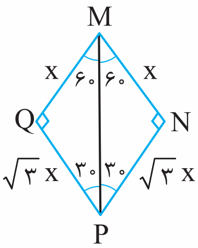
۱۶- گزینهٔ «۳»

شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی ذوزنقه یک کایت قائم‌الزاویه است، می‌دانیم قطر بزرگ کایت نیمساز هم می‌باشد، پس چون در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است پس با فرض $MP = ۲x$ داریم $MQ = MN = x$ و $QP = PN = \sqrt{۳}x$ چون مثلث **MNP** در رأس **N** قائمه است شعاع دایره محیطی نصف وتر است یعنی $R = \frac{MP}{۲} = \frac{۲x}{۲} = x$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{MQ \times MN}{MQ + QP} = \frac{x \times x\sqrt{۳}}{x + x\sqrt{۳}} = \frac{x^{۲}\sqrt{۳}}{x(۱+\sqrt{۳})} \Rightarrow r = \frac{x\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{\frac{x\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}} = \frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۳}$$





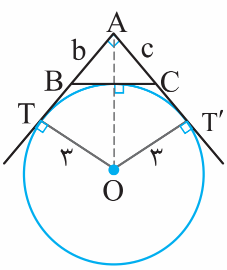
۱۷- گزینهٔ «۱»

O را به **T** و T' وصل کنیم حتماً $\hat{T} = \hat{T}' = ۹۰$ است چون چهارضلعی $ATOT'$ دارای ۴ زاویه قائمه است و طول عرض آن با هم برابر است $OT = OT' = R = ۳$ پس مربع است بنابراین $AT = AT' = ۳$

$$AT = P \Rightarrow P = ۳$$

$$r_a = \frac{s}{p-a} \Rightarrow ۳ = \frac{۶}{۳-a} \Rightarrow ۳ - a = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

شعاع دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است پس $R = \frac{a}{۲} = \frac{۱}{۲}$



۱۸- گزینهٔ «۱»

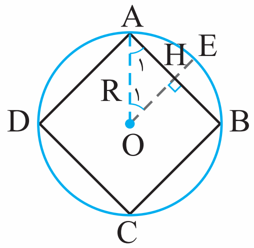
O را به **A** وصل می‌کنیم چون از مرکز دایره به وتر **AB** عمود شده است پس $AH=HB$ است و می‌دانیم قطر **AC** مربع، قطر دایره هم می‌باشد و قطرهای مربع نیمساز هستند پس $\hat{A}_۱=۴۵^\circ$ در نتیجه $\hat{O}_۱=۴۵$ است.

$$\overset{\Delta}{OAH}:\hat{O}_۱=\hat{A}_۱\xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}}AH=HO$$

$$AO^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow R^۲=۲OH^۲\Rightarrow R=\sqrt{۲}OH$$

$$\Rightarrow OH+HE=\sqrt{۲}OH\Rightarrow \sqrt{۲}-۱=(\sqrt{۲}-۱)OH\Rightarrow OH=۱$$

$$R^۲=۲OH^۲=۲(۱)^۲=۲\Rightarrow R=\sqrt{۲}$$



۱۹- گزینهٔ «۲»

در مثلث متساوی‌الساقین می‌دانیم، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم می‌باشد پس $BH=HC=\frac{BC}{۲}=۸$، اگر فرض کنیم $AB=AC=x$ داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH}:AB^۲=AH^۲+BH^۲\Rightarrow x^۲=AH^۲+۶۴\Rightarrow AH=\sqrt{x^۲-۶۴}$$

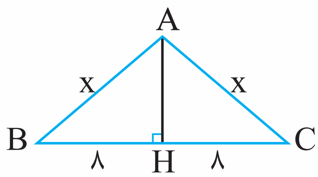
$$S=\frac{AH\times BC}{۲}=\frac{\sqrt{x^۲-۶۴}\times ۱۶}{۲}=۸\sqrt{x^۲-۶۴}$$

$$۲p=x+x+۱۶\Rightarrow p=x+۸$$

$$r=\frac{s}{p}\Rightarrow \frac{۸}{۳}=\frac{۸\sqrt{x^۲-۶۴}}{x+۸}\Rightarrow x+۸=۳\sqrt{x^۲-۶۴}$$

$$\Rightarrow x^۲+۱۶x+۶۴=۹x^۲-۵۷۶\Rightarrow ۸x^۲-۱۶x-۶۴۰=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۲x-۸۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x+۸)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۱۰\\ x=-۸ \text{ غق}\end{cases}$$



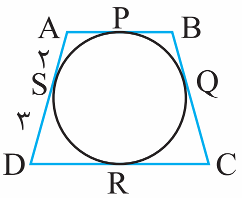
۲۰- گزینهٔ «۴»

واضح است که $BQ=۲$ و $QC=۳$ است و می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر هستند.

$$\left.\begin{array}{l}AP=AS=۲\\ PB=PQ=۲\end{array}\right\}\Rightarrow AB=AP+PB=۴$$

$$\left.\begin{array}{l}DS=DR=۳\\ CR=CQ=۳\end{array}\right\}\Rightarrow DC=DR+RC=۳+۳=۶$$

می‌دانیم اگر یک ذوزنقه متساوی‌الساقین محیطی باشد (چون محاطی هم می‌باشد) مساحت آن برابر است با حاصل‌ضرب واسطه حسابی در واسطه هندسی قاعده‌ها



$$S=\frac{AB\times CD}{۲}\sqrt{AB\cdot CD}$$
$$=\frac{۴+۶}{۲}\times\sqrt{۴\times ۶}$$
$$=۵\times ۲\times\sqrt{۶}=۱۰\sqrt{۶}$$