اصلاحیه

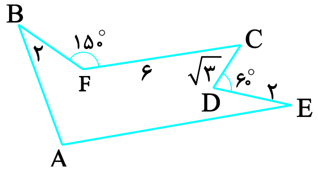
- فصل دوم - بخش ۱ تشریحی – سوال ۶ – شکل صحیح سوال به صورت زیر است:

مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A}=۹۰^\circ)$ را نسبت به یک خط ثابت بازتاب می‌کنیم که رأس‌های B و C نقـاط ثابـت این تبدیل باشند. اگر $AB=۱۲$ و $AC=۱۶$ و A' تصویر A نسبت به این محور بازتاب باشد، طول AA' را به دست آورید.

- فصل دوم - بخش ۱ تستی – سوال ۱۶ – شکل صحیح سوال به صورت زیر است:

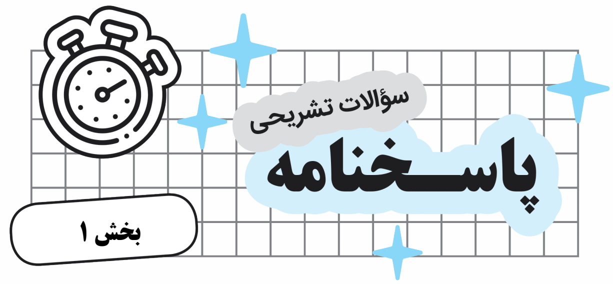
نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA'=۱۲$ و $OA=۱۰$ و O نقطه‌ای روی خط L باشد، آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط شامل پاره‌خط OA' کدام است؟

- فصل دوم – بخش ۳ تشریحی – سوال ۳ – نام‌گذاری صحیح شکل (آ) به صورت زیر است:



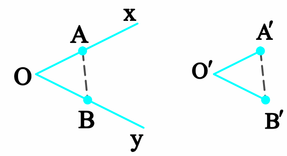
- فصل دوم – بخش آزمون پلاس – سوال ۱۰ – شکل صحیح گزینه ۴ به صورت زیر است:

$۴\sqrt{۲}-۴$



۱- متوسط

نقطه A را روی Ox و نقطه B را روی Oy انتخاب می‌کنیم. اگر $T(O)=O'$، $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ باشد:

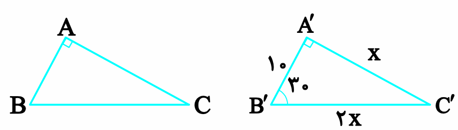


$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}T(O)=O'\\T(A)=A'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} OA=O'A'\\ \left.\begin{matrix}T(O)=O'\\T(B)=B'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} OB=O'B'\\ \left.\begin{matrix}T(A)=A'\\T(B)=B'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AB=A'B'\end{matrix}\right| \xrightarrow{\text{ض ض ض}}$$

$$\overset{\triangle}{OAB}\cong \overset{\triangle}{O'A'B'} \xrightarrow{\text{ا.م}} \hat{O}=\hat{O}'$$

۲- متوسط

چون تبدیل T طولپا است $\hat{A}=\hat{A}'=۹۰$.



$$\sin B'=\frac{A'C'}{B'C'} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{A'C'}{B'C'} \Rightarrow A'C'=x\ ,\ B'C'=۲x$$

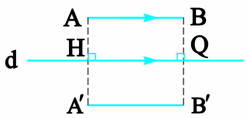
$$B'C'^{۲}=A'B'^{۲}+A'C'^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲}=۱۰۰+x^{۲}$$

$$\Rightarrow ۳x^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow x^{۲}=\frac{۱۰۰}{۳} \Rightarrow x=\frac{۱۰}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}A'B'\times A'C' \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow S=\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$$

۳- دشوار

مسئله را در ۵ حالت بررسی می‌کند.

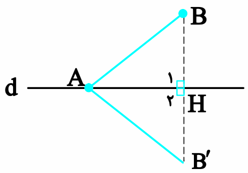


حالت ۱) پاره‌خط **AB** موازی محور **d** باشد.

$$\left.\begin{matrix}S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=\frac{AA'}{۲}\ ,\ AA'\perp d\\ S(B)=B' \Rightarrow BQ=QB'=\frac{BB'}{۲}\ ,\ BB'\perp d\end{matrix}\right| \xrightarrow{AH=BQ \Rightarrow AA'=BB'}$$

$$AA' \parallel BB'\ ,\ AA'=BB' \Rightarrow \square ABB'A'\ \text{متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow AB=A'B'$$

حالت ۲) نقطه **A** روی محور **d** و نقطه **B** روی محور **d** نباشد.

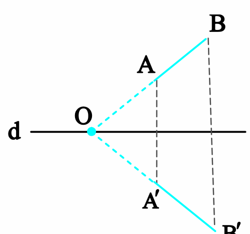


در اینصورت $S(A)=A$ و $S(B)=B'$ داریم:

$$S(B)=B' \Rightarrow BH=HB'\ ,\ \hat{H}=۹۰$$

$$\left.\begin{matrix}BH=B'H\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰\\ \text{مشترک}\ AH=AH\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABH}\cong \overset{\triangle}{AB'H} \xrightarrow{\text{ا.م}} AB=AB'$$

حالت ۳) امتداد پاره‌خط **AB**، محور **d** را قطع کند.

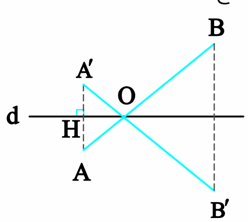


$$\text{از حالت ۲} \Rightarrow OA=OA'$$

$$\text{از حالت ۲} \Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=OB-OA$$
$$=OB'-OA'=A'B'$$

حالت ۴) پاره‌خط **AB** در نقطه **O** محور **d** را قطع کند.



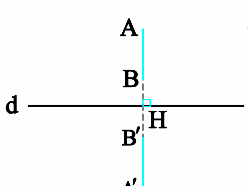
اگر $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$:

$$\text{از حالت ۲} \Rightarrow OA=OA'$$

$$\text{از حالت ۲} \Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=AO+OB$$
$$=A'O+OB'=A'B'$$

حالت ۵) امتداد پاره‌خط **AB** عمود بر **d** باشد.



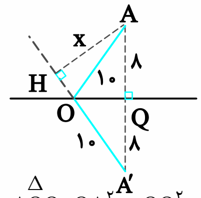
$$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H$$

$$S(B)=B' \Rightarrow BH=B'H$$

$$AB=AH-HB=A'H-B'H=A'B'$$

پس بازتاب یک تبدیل طولپاست.

۴- دشوار



$S(A)=A' \Rightarrow AQ=QA'=۸$

$\left.\begin{array}{l}S(A)=A'\\ S(O)=O\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} OA=OA'=۱۰$

$\overset{\triangle}{AOQ}: OA^{۲}=OQ^{۲}+AQ^{۲} \Rightarrow ۱۰۰=OQ^{۲}+۶۴$

$\Rightarrow OQ^{۲}=۳۶ \Rightarrow OQ=۶$

$S_{\overset{\triangle}{OAA'}}=\frac{۱}{۲}OQ\times AA'=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۶ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{OAA'}}=۴۸$

$S_{\overset{\triangle}{OAA'}}=\frac{۱}{۲}AH\times OA' \Rightarrow ۴۸=\frac{۱}{۲}\times x\times ۱۰$

$\Rightarrow ۹۶=۱۰x \Rightarrow x=۹/۶$

۵- آسان

آ) A - $S(A)=A' \Rightarrow S(A')=A$

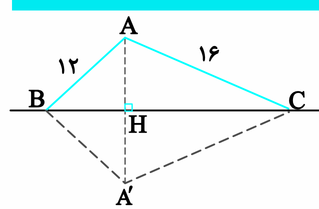
ب) خود آن نقطه - $S(A')=A$ - $(A)'=A$

پ) مثلث - همنهشت

ت) عمود یا موازی

ث) خودشان هستند - بی‌شمار

۶- دشوار



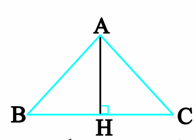
چون نقاط **B** و **C**، نقاط ثابت بازتاب هستند، پس محور بازتاب خطی است که **BC** بر آن منطبق است و برای به‌دست آوردن نقطهٔ A'، از **A** به **BC** عمود می‌کنیم و به اندازه خودش ادامه می‌دهیم پس که $AH=A'H=\frac{AA'}{۲}$ ارتفاع وارد بر وتر در مثلث **ABC** است.

$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۱۴۴+۲۵۶=۴۰۰ \Rightarrow BC=۲۰$

$AH\times BC=AB\times AC=۲S \Rightarrow AH\times ۲۰=۱۲\times ۱۶ \Rightarrow AH=۹/۶$

$AA'=۲AH=۲(۹/۶)=۱۹/۲$

۷- متوسط



فرض : $AB=AC$

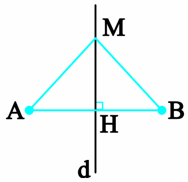
حکم : $\hat{B}=\hat{C}$

ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم و آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم.

$\left.\begin{array}{l}S(A)=A\\ S(B)=C\\ S(H)=H\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABH}=\widehat{ACH} \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$

۸- آسان

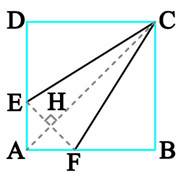
اگر خط **d** عمودمنصف پاره‌خط **AB** باشد و نقطه **M** روی خط **d** باشد داریم:



$\left.\begin{array}{l}S_d(M)=M\\ S_d(A)=B\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AM=MB$

۹- آسان

قطر **AC** را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم و چون $AE=AF$ است پس **A** روی محور عمودمنصف پاره‌خط **EF** است.

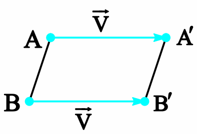


$\left.\begin{array}{l}S(C)=C\\ S(E)=F\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} CE=CF$

۱۰- دشوار

مسئله را در ۳ حالت اثبات می‌کنیم.

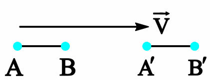
حالت ۱) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** نباشد.



$\left.\begin{array}{l}T(A)=A' \Rightarrow AA'\overset{\parallel}{=}\vec{V}\\ T(B)=B' \Rightarrow BB'\overset{\parallel}{=}\vec{V}\end{array}\right\} \Rightarrow AA'\overset{\parallel}{=}BB'$

$\Rightarrow \square_{AA'B'B}$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow AB=A'B'$

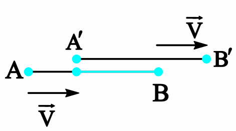
حالت ۲) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** و طول آن بلندتر از **AB** باشد.



$\left.\begin{array}{l}T(A)=A' \Rightarrow AA'=\vec{V}\\ T(B)=B' \Rightarrow BB'=\vec{V}\end{array}\right\} \Rightarrow AA'=BB'$

$AB=AA'-BA'=BB'-BA'=A'B' \Rightarrow AB=A'B'$

حالت ۳) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** و طول آن کوتاه‌تر از **AB** باشد.



$\left.\begin{array}{l}T(A)=A' \Rightarrow AA'=\vec{V}\\ T(B)=B' \Rightarrow BB'=\vec{V}\end{array}\right\} \Rightarrow AA'=BB'$

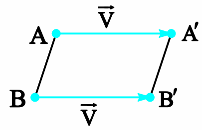
$AB=AA'+A'B=BB'+A'B=A'B' \Rightarrow AB=A'B'$

پس انتقال یک تبدیل طولپاست.

۱۱- متوسط

قضیه را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

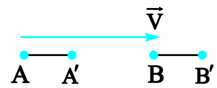
حالت ۱) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** نباشد.



$$\left.\begin{array}{l} T(A)=A' \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} BB'$$

$$\Rightarrow \square AA'B'B \text{ متوازی‌الاضلاع } \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

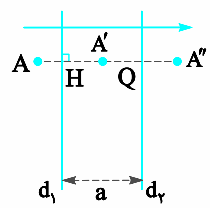
حالت ۲) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** باشد.



در این‌صورت نقاط **A** و **B** و A' و B' روی یک خط هستند پس $AB \parallel A'B'$ یعنی انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۱۲- متوسط

تبدیلی که مستقیماً **A** را به A'' تبدیل کند، انتقالی است که بردار آن AA'' است که هم بر محور d_1 و هم بر محور d_2 عمود است.



$$S_{d_1}(A)=A' \Rightarrow AH=HA'$$

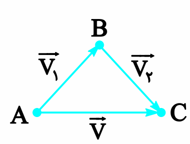
$$S_{d_2}(A')=A'' \Rightarrow A'Q=QA''$$

$$AA''=AA'+A'A''=AH+HA'+A'Q+QA''$$

$$=HA'+HA'+A'Q+A'Q=2\underbrace{(HA'+A'Q)}_{a}=2a$$

۱۳- متوسط

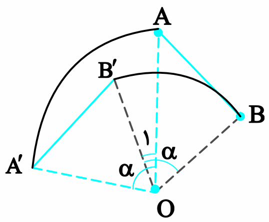
اگر نقطه **A** تحت انتقال با بردار $\vec{V}_1$ به نقطه **B** و نقطه **B** تحت انتقال با بردار $\vec{V}_2$ به نقطه **C** تبدیل شود با توجه به خواص بردارها می‌توان نقطه **A** را با بردار $\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$ مستقیم به **C** تبدیل کرد، بنابراین ترکیب دو انتقال با هم یک انتقال است، که بردار انتقال جمع برداری دو بردار است.



۱۴- دشوار

مسئله را در ۴ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت اول) مرکز دوران در امتداد یا روی پاره‌خط **AB** نباشد و زاویه دوران بیشتر از $\widehat{AOB}$ باشد.



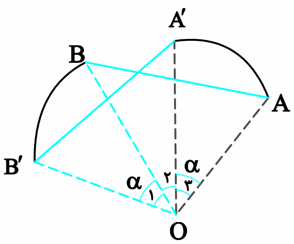
$$\widehat{AOA'}=\widehat{BOB'}=\alpha \Rightarrow \widehat{AOA'}-\hat{O}_1=\widehat{BOB'}-\hat{O}_1 \Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$\left.\begin{array}{l} OA=OA' \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'} \\ OB=OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OA'B'} \xrightarrow{\text{ا.م}} AB=A'B'$$

حالت دوم) مرکز دوران در امتداد یا روی پاره‌خط **AB** نباشد و زاویه دوران کمتر از $\widehat{AOB}$ باشد.



$$\widehat{AOA'}=\widehat{BOB'}=\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA'}+\hat{O}_3=\widehat{BOB'}+\hat{O}_3$$

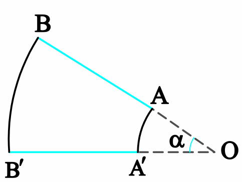
$$\Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$\left.\begin{array}{l} OA=OA' \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'} \\ OB=OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OA'B'} \xrightarrow{\text{ا.م}} AB=A'B'$$

حالت سوم) مرکز دوران در امتداد **AB** باشد.

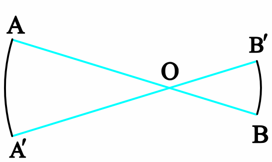


$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=OB-OA$$
$$=OB'-OA'=A'B'$$

حالت چهارم) مرکز دوران روی پاره‌خط **AB** باشد.



$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

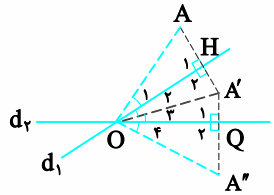
$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=AO+OB$$
$$=OA'+OB'=A'B'$$

دوران یک تبدیل طولپا است.

۱۵- دشوار

O را به A و A' و A'' وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \Rightarrow AH=HA' \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰ \\ OH=OH\ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAH}\cong \overset{\Delta}{OHA'}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} OA=OA' & (۱) \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ & (۲) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A')=A'' \Rightarrow A'Q=QA'' \\ \hat{Q}_۱=\hat{Q}_۲=۹۰ \\ OQ=OQ\ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OA'Q}\cong \overset{\Delta}{OQA''}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} OA'=OA'' & (۳) \\ \hat{O}_۳=\hat{O}_۴ & (۴) \end{cases}$$

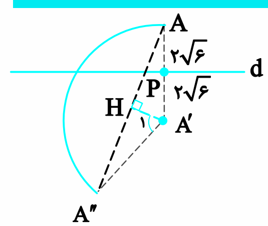
$\left.\begin{array}{l} OA'=OA \\ OA''=OA' \end{array}\right\} \Rightarrow OA''=OA \Rightarrow$ A و A'' روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA هستند.

$$\text{زاویه دوران} = \widehat{AOA''} = \hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۴$$

$$\xrightarrow[\text{زاویه دوران}=\alpha]{\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\ ,\ \hat{O}_۳=\hat{O}_۴} \alpha=\hat{O}_۲+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۳$$

$$=۲(\hat{O}_۲+\hat{O}_۳) \Rightarrow \alpha=۲\widehat{HOQ}$$

۱۶- متوسط



$$S(A)=A' \Rightarrow AP=A'P=۲\sqrt{۶} \Rightarrow AA'=۴\sqrt{۶}$$

$$R^{۱۲۰}_{A'}(A)=A'' \Rightarrow \begin{cases} AA''=A'A=۴\sqrt{۶} \\ \widehat{AA'A''}=۱۲۰ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AA'A''}: A'A=A'A'' \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}}$$

ارتفاع AH هم میانه و هم نیمساز است.

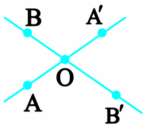
پس $\hat{A}'_۱=۶۰$ و $A''H=AH=\frac{۱}{۲}AA''$.

$$\overset{\Delta}{A'HA''}: \sin\hat{A}'_۱=\frac{A''H}{A'A''} \xrightarrow{\hat{A}'_۱=۶۰} \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}AA''}{۴\sqrt{۶}}$$

$$\Rightarrow AA''=۴\sqrt{۱۸} \Rightarrow AA''=۱۲\sqrt{۲}$$

۱۷- متوسط

R را دوران به مرکز O و زاویه °۱۸۰ تعریف می‌کنیم.

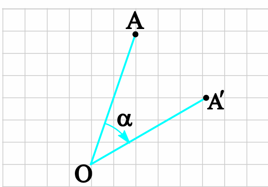


$$\left.\begin{array}{l} R(A)=A' \\ R(O)=O \\ R(B)=B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خواص دوران}} \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

۱۸- آسان

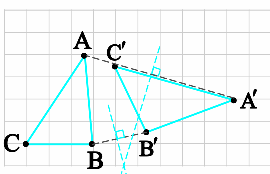
آ)

O روی عمودمنصف AA' $\xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}}$ $OA=OA'$: خواص دوران



ب)

عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AA' و BB' را رسم می‌کنیم، محل برخورد این خطوط (نقطه O) مرکز دوران است.



۱۹- آسان

آ) درست

ب) درست

پ) نادرست

ت) نادرست

ث) درست

ج) نادرست

۲۰- آسان

آ) طولپا (ایزومتری)

ب) طولپا

پ) بی‌شمار

ت) انتقال

ث) یک

ج) دوران

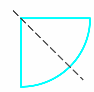
چ) مضرب π

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینه «۲» آسان

مثلث متساوی‌الاضلاع ۳ خط تقارن (هر سه ارتفاع) دارد و متوازی‌الاضلاع در حالتی که مستطیل و لوزی و مربع نباشد محور تقارن ندارد و لوزی ۲ محور تقارن دارد (قطرهای لوزی).



ربع دایره فقط یک محور تقارن دارد.

۲- گزینه «۴» آسان

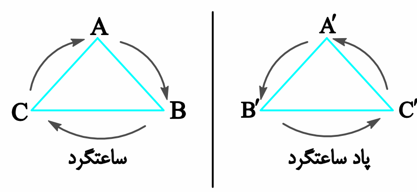
بازتاب تنها در ۲ حالت شیب خط را حفظ می‌کند، حالت اول اینکه محور بازتاب موازی خط باشد و حالت دوم اینکه محور بازتاب عمود بر خط باشد.

۳- گزینه «۳» آسان

هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند و جهت شکل را می‌تواند تغییر دهد.

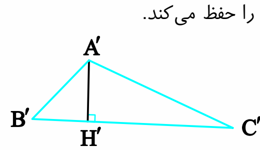
۴- گزینه «۱» آسان

در بازتاب جهت شکل حفظ نمی‌شود.



۵- گزینه «۱» دشوار

می‌دانیم تبدیل طولپا، اندازه زاویه و طول ضلع را حفظ می‌کند.



$$\hat{A}=\frac{۶}{۵}\hat{B}=۶\hat{C}=۶x \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'=۶x\\ \hat{B}=\hat{B}'=۵x\\ \hat{C}=\hat{C}'=x\end{cases}$$

$$\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=۱۸۰ \Rightarrow ۶x+۵x+x=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۱۲x=۱۸۰ \Rightarrow x=۱۵^\circ$$

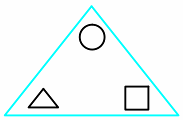
پس $\hat{A}'=۹۰^\circ$ و $\hat{B}'=۷۵^\circ$ و $\hat{C}'=۱۵^\circ$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه چنانچه اندازه زوایا حاده ۱۵° و ۷۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

$$A'H'=\frac{۱}{۴}B'C'=\frac{۱}{۴}(۲۰) \Rightarrow A'H'=۵$$

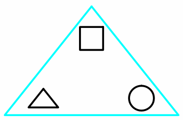
$$S=\frac{۱}{۲}A'H'\times B'C'=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۲۰=۵۰$$

۶- گزینه «۱» متوسط

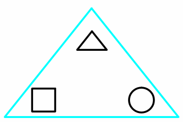
در بازتاب نسبت به خط $L_۱$ جای مثلث و مربع عوض می‌شود.



در بازتاب نسبت به خط $L_۲$ جای مربع و دایره عوض می‌شود.

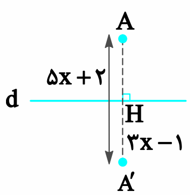


در بازتاب نسبت به خط $L_۳$ جای مثلث و مربع عوض می‌شود.



۷- گزینه «۳» آسان

می‌دانیم محور بازتاب عمودمنصف پاره‌خط AA' است. پس داریم:



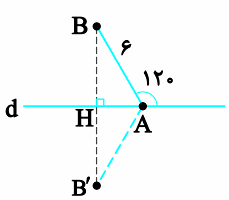
$$AA'=۲A'H \Rightarrow ۵x+۲=۲(۳x-۱)$$

$$\Rightarrow ۵x+۲=۶x-۲ \Rightarrow x=۴$$

$$AH=A'H=۳x-۱=۳(۴)-۱=۱۱$$

۸- گزینه «۳» دشوار

اگر S بازتاب نسبت به خط d باشد داریم:

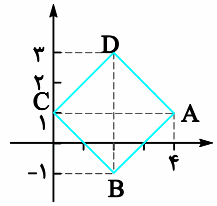


$$\left.\begin{matrix}S(B)=B'\\ S(A)=A\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AB=AB'=۶$$

می‌دانیم در بازتاب اندازه زاویه حفظ می‌شود پس ($\widehat{BAH}=\widehat{B'AH}=۱۸۰-۱۲۰=۶۰$) پس در مثلث ABB' اندازه زاویه A برابر ($۲\times ۶۰=۱۲۰$) است.

$$S_{\underset{ABB'}{\triangle}}=\frac{۱}{۲}AB\times AB'\times \sin A=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۹\sqrt{۳}$$

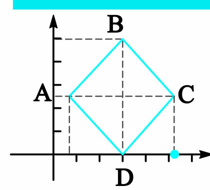
۹- گزینه «۱» دشوار



چون نقطه C، نقطه ثابت بازتاب با محور yها است پس نقطه C روی محور yها است پس $A(۴,۱)$ و $C(۰,۱)$ است پس محور بازتاب یعنی پاره‌خط AC، خط $y=۱$ است و اندازه قطر مربع $AC=۴$ است و چون قطرهای مربع عمودمنصف‌های هم هستند پس $BD=۴$ و B و D روی خط $x=۲$ قرار دارند که $D(۲,۳)$ و $B(۲,-۱)$ است.

$$OB=\sqrt{(x_B-x_O)^۲+(y_B-y_O)^۲}=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

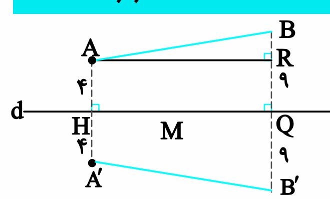
۱۰- گزینه «۲» دشوار



چون نقطه D، نقطه ثابت بازتاب نسبت به محور x است، پس D روی محور xها قرار دارد است پس $D(۳,۰)$ و $B(۳,۵)$ می‌باشد که اندازه قطر مربع $BD=۵$ است و معادله BD، خط $x=۳$ است و چون قطرهای مربع هم اندازه و عمودمنصف هستند $AC=۵$ و معادله خط آن $y=۲/۵$ است پس $C(۵/۵,۲/۵)$ و نقطه A که بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD است به‌صورت $A(۵/۵-۵,۲/۵)$ است.

$$AO=\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}=\sqrt{(۰/۵-۰)^۲+(۲/۵-۰)^۲}$$
$$=\sqrt{۰/۲۵+۶/۲۵}\Rightarrow OA=\sqrt{۶/۵}$$

۱۱- گزینه «۲» دشوار



$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۴ \Rightarrow AA'=۸$

$S(B)=B' \Rightarrow BQ=QB'=۹ \Rightarrow BB'=۱۸$

چون بازتاب طولپا است پس $AB=A'B'$ است و چون چهارضلعی $ABB'A'$ محیطی است، مجموع دو ضلع مقابل این چهارضلعی با هم برابر است.

$$AA'+BB'=AB+A'B' \Rightarrow ۸+۱۸=۲AB \Rightarrow AB=۱۳$$

از A به BB' عمود می‌کنیم.

$$AH=QR=۴ \Rightarrow BR-RQ=۹-۴ \Rightarrow BR=۵$$

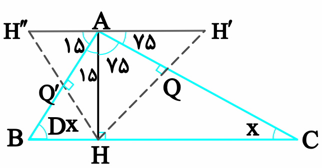
$$\overset{\triangle}{ABR}: AB^۲=AR^۲+RB^۲ \Rightarrow ۱۶۹=AR^۲+۲۵$$

$$\Rightarrow AR^۲=۱۴۴ \Rightarrow AR=۱۲$$

$$S=\frac{AA'+BB'}{۲}\times AR \Rightarrow S=\frac{(۸+۱۸)}{۲}\times ۱۲=۱۳\times ۱۲ \Rightarrow S=۱۵۶$$

۱۲- گزینه «۲» دشوار

طبق فرض مسئله $\hat{A}=۶x$ و $\hat{B}=۵x$ و $\hat{C}=x$ است.



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۶x+۵x+x=۱۸۰$$
$$\Rightarrow ۱۲x=۱۸۰ \Rightarrow x=۱۵$$
$$\hat{A}=۶(۱۵)=۹۰\ ,\ \hat{B}=۵(۱۵)=۷۵\ ,\ \hat{C}=۱۵$$

در مثلث AHC، $\hat{H}=۹۰$ و $\hat{C}=۱۵$ است پس $\widehat{CAH}=۷۵^\circ$ است پس $\widehat{BAH}=۱۵^\circ$ است و چون بازتاب اندازه زاویه را حفظ می‌کند $\widehat{H'AQ}=۷۵$ و $\widehat{H''AQ'}=۱۵$ است پس $\widehat{H''AH'}=۱۸۰^\circ$ است که یعنی H' و A و H'' روی یک خط هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}S_{AB}(A)=A\\ A_{AB}(H)=H''\end{array}\right\}\Rightarrow AH=AH''\\ \left.\begin{array}{l}S_{AC}(A)=A\\ A_{AC}(H)=H'\end{array}\right\}\Rightarrow AH=AH'\end{array}\right\}\xrightarrow{+} ۲AH=AH''+AH'$$

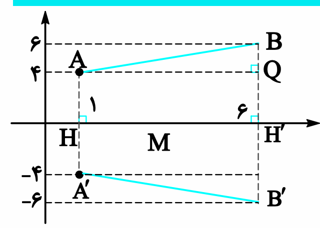
$$\Rightarrow ۲AH=H'H'' \Rightarrow ۲AH=۴ \Rightarrow AH=۲$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه زاویه‌های حاده ۱۵ و ۷۵ باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است، پس داریم:

$$AH=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow ۲=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow BC=۸$$

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۸ \Rightarrow S=۸$$

۱۳- گزینه «۱» — متوسط



$HH' = AQ = ۶ - ۱ = ۵$

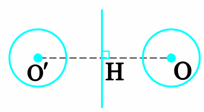
$AH = HA' = ۴ \Rightarrow AA' = ۸$

$BH' = H'B' = ۶ \Rightarrow BB' = ۱۲$

$$S = \frac{(AA' + BB')}{۲} \times AQ = \frac{(۸ + ۱۲)}{۲} \times ۵ = ۵۰$$

۱۴- گزینه «۱» — متوسط

چون بازتاب یک تبدیل طولپا است پس شعاع دو دایره C و C' با هم برابر است:



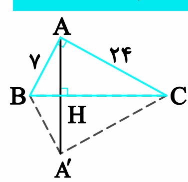
$۴a + ۱ = ۶a - ۱ \Rightarrow ۲a = ۲$

$\Rightarrow a = ۱ \Rightarrow R = R' = ۵$

$OO' = ۲OH = ۲(۳a + ۷) = ۲(۳ + ۷) = ۲۰$

$$TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R + R')^۲} = \sqrt{۲۰^۲ - (۵ + ۵)^۲} = \sqrt{۳۰۰} = ۱۰\sqrt{۳}$$

۱۵- گزینه «۴» — متوسط



$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۴۹ + ۵۷۶ = ۶۲۵ \Rightarrow BC = ۲۵$

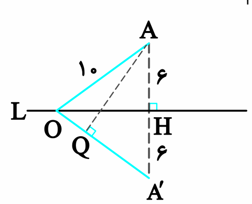
$$S = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{AH \times BC}{۲} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

$\Rightarrow ۷ \times ۲۴ = AH \times ۲۵ \Rightarrow AH = ۶/۷۲$

$S(A) = A' \Rightarrow AA' = ۲AH = ۲(۶/۷۲) = ۱۳/۴۴$

۱۶- گزینه «۲» — دشوار

اگر S را بازتاب نسبت به خط L درنظر بگیریم:



$$S(A) = A' \Rightarrow AH = HA' = \frac{AA'}{۲} = ۶$$

$\overset{\triangle}{OAH} : OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = OH^۲ + ۳۶$

$\Rightarrow OH^۲ = ۶۴ \Rightarrow OH = ۸$

چون بازتاب طولپا است $OA = OA' = ۱۰$.

می‌دانیم در هر مثلث نسبت ارتفاع‌ها برابر عکس نسبت اضلاع است.

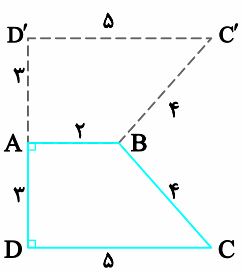
$$\frac{AQ}{OH} = \frac{AA'}{OA'} \Rightarrow \frac{AQ}{۸} = \frac{۱۲}{۱۰} \Rightarrow AQ = ۹/۶$$

۱۷- گزینه «۳» — آسان

دو خط متقاطع نسبت به نیمسازهای دو زاویه مجانب خود بازتاب یکدیگرند، پس به ۲ طریق می‌توانند بازتاب یکدیگر باشند.

۱۸- گزینه «۳» — متوسط

اگر ذوزنقه را نسبت به کوچکترین ضلع (AB) بازتاب کنیم، شکل حاصل با خود ذوزنقه یک چهارضلعی با بیشترین محیط را دارد که چون بازتاب طولپا است، $AD = AD'$ و $DC = D'C'$ و $BC' = BC$ است.

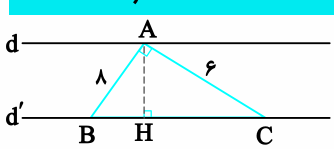


$$\text{محیط}\ DD'C'BC = DD' + D'C' + C'B + BC + DC = ۶ + ۵ + ۴ + ۴ + ۵ = ۲۴$$

۱۹- گزینه «۴» — آسان

بازتاب تنها در حالتی که خط با محور موازی یا منطبق و یا بر هم عمود باشند، شیب خط را حفظ می‌کند.

۲۰- گزینه «۴» — متوسط



$\overset{\triangle}{ABC} : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$

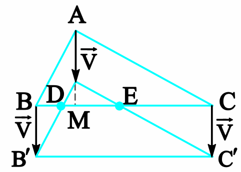
$$S = \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{AH \times BC}{۲} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

$\Rightarrow ۶ \times ۸ = AH \times ۱۰ \Rightarrow AH = ۴/۸$

پس کوتاه‌ترین برداری که به کمک آن بتوان خط d را به خط d' انتقال داد دارای طول ۴/۸ است.

۲۱- گزینه «۳» — دشوار

در انتقال شیب خط حفظ می‌شود، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \,,\ \text{مورب}\ BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}=\hat{D} \\ AC \parallel A'C' \,,\ \text{مورب}\ BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{C}=\hat{E} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{A'DE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

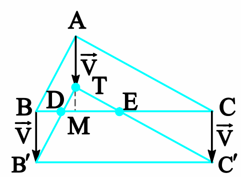
می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌ها برابر نسبت تشابه است و همواره فاصله محل همرسی میانه‌ها از یک ضلع $\frac{۱}{۳}$ طول میانه است پس $k=\frac{A'M}{AM}=\frac{۱}{۳}$.

در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{A'DE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=k^{۲} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{A'DE}}}{۷۲}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{A'DE}}=۸$$

۲۲- گزینه «۱» — دشوار

در انتقال شیب خط حفظ می‌شود، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel TB' \,,\ \text{مورب}\ BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}=\hat{D} \\ AC \parallel TC' \,,\ \text{مورب}\ BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{C}=\hat{E} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{TDE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مربع نسبت اضلاع است پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{TDE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=k^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}=k^{۲} \Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

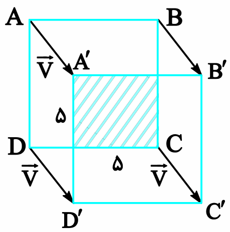
در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است $AM=\frac{BC}{۲}=۴$ و نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه برابر نسبت اضلاع است.

$$\frac{TM}{AM}=k \Rightarrow \frac{TM}{۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow TM=۱$$

$$AT=AM-TM=۴-۱ \Rightarrow AT=۳$$

۲۳- گزینه «۴» — آسان

ناحیه مشترک بین این دو مربع، یک مربع به ضلع ۵ است.



$$S_{\text{رنگی}}=۵\times ۵=۲۵$$

۲۴- گزینه «۳» — آسان

هر دایره‌ای را به اندازه قطرش در هر جهتی انتقال دهیم، تصویر آن با خودش مماس بیرون می‌شود پس اندازه بردار انتقال برابر قطر دایره است ($۲R=۲(۶)=۱۲$).

۲۵- گزینه «۴» — متوسط

انتقال یک تبدیل طولپا است پس شعاع دایره با شعاع تصویر آن برابر است.

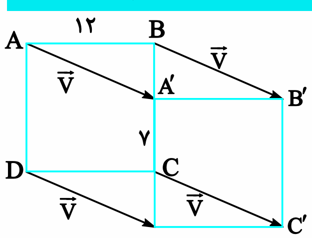
$$۳a-۲=a+۲ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$R=۳(۲)-۲=۴ \Rightarrow R=R'=۴$$

$$TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R+R')^{۲}} \Rightarrow ۶=\sqrt{OO'^{۲}-(۴+۴)^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۳۶=OO'^{۲}-۶۴ \Rightarrow OO'^{۲}=۱۰۰ \Rightarrow OO'=۱۰$$

۲۶- گزینه «۳» — متوسط

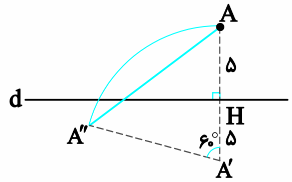


$$A'B=BC-A'C=۱۲-۷=۵$$

$$\overset{\Delta}{ABA'}: AA'^{۲}=AB^{۲}+BA'^{۲}=۱۴۴+۲۵=۱۶۹ \Rightarrow AA'=۱۳$$

$$|\vec{V}|=\overline{AA'}=\overline{DD'}=۱۳$$

۲۷- گزینه «۴» — متوسط



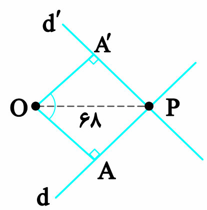
$S_d(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۵ \Rightarrow AA'=۱۰$

اگر به مرکز A' و زاویه $۶۰°$ نقطه **A** را دوران دهیم تا A'' به دست آید اولاً $\widehat{A''A'A}=۶۰°$ و ثانیاً $A'A''=A'A=۱۰$.

در مثلث $AA'A''$ چون $A'A=A'A''$ است پس $\hat{A}=\hat{A}''$ است و چون $\hat{A}'=۶۰°$ است پس $\hat{A}=\hat{A}'=\hat{A}''=۶۰$ یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است و $AA''=۱۰$.

۲۸- گزینه «۲» — متوسط

از نقطه **O** به دو خط **d** و d' عمود می‌کنیم، چون نقطه **O** روی نیمساز **OP** قرار می‌گیرد پس **OA** و OA' با هم برابر است و یعنی A' تصویر نقطه **A** در دوران به مرکز **O** و زاویه ۶۸ است و در چهارضلعی $OA'PA$ داریم:



$\hat{O}+\hat{A}'+\hat{P}+\hat{A}=۳۶۰ \Rightarrow ۶۸+۹۰+\hat{P}+۹۰=۳۶۰ \Rightarrow \hat{P}=۱۱۲$

OP نیمساز زاویه **P** است پس:

$\widehat{OPA}=\frac{۱۱۲}{۲}=۵۶$

۲۹- گزینه «۲» — آسان

دوران تنها با اندازه‌ی زاویه‌ی $k\pi$، شیب خط را حفظ می‌کند.

۳۰- گزینه «۱» — دشوار

ضابطه دوران حول مبدأ مختصات و زاویه α درجه نقطه (x,y) را به نقطه $(x\cos\alpha-y\sin\alpha, x\sin\alpha+y\cos\alpha)$ به‌دست می‌آید که $\alpha=۲۷۰°$ و $x=-۲$ و $y=۳$ است.

$O(-۲,۳) \xrightarrow{\text{دوران به مرکز مبدأ}, \alpha=۲۷۰} O'(۳,۲)$

$OO'=\sqrt{(-۲-۳)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶}$

دوران طولپا است پس $R=R'=\frac{۵}{۲}$.

$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۲۶-۲۵}=۱$

پاسخنامه
سؤالات تشریحی

بخش ۲

۱- آسان

آ) نادرست — ب) نادرست

پ) نادرست — د) درست

۲- آسان

آ) مرکز تجانس — ب) ۹

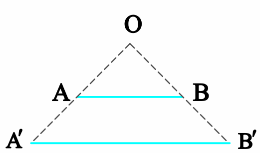
پ) $\frac{۲}{۵}$ — ت) $k>۰$ (تجانس مستقیم)

ث) طول بردار انتقال صفر باشد. — ج) $k=۱$

۳- دشوار

مسئله را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

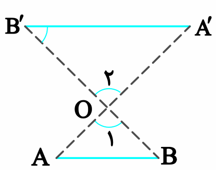
حالت ۱) $k>۰$



ویژگی تجانس $\frac{OB'}{OB}=k$ ، ویژگی تجانس $\frac{OA'}{OA}=k$

$\overset{\Delta}{OA'B'}: \frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{۱}{k} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AB \parallel A'B'$

حالت ۲) $k<۰$



$$\left.\begin{array}{l}\text{ویژگی تجانس}: \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=|k| \\ \text{متقابل به راس}: \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض زض}} \overset{\Delta}{OA'B'} \sim \overset{\Delta}{OAB} \Rightarrow \hat{B}'=\hat{B}$$

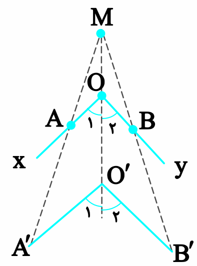
$\hat{B}'=\hat{B}$, مورب BB' $\xrightarrow{\text{عکس قضیه خطوط موازی}} A'B' \parallel AB$

۴- دشوار

مسئله را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت ۱) $k>0$

نقطه **A** و **B** را روی اضلاع **Ox** و **Oy** به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اگر A' و B' مجانس نقاط **A** و **B** به مرکز **M** و نسبت **k** باشد چون تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، داریم:

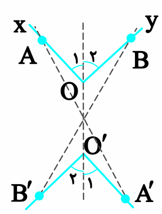


$$\left.\begin{array}{l} OA \parallel O'A' \ ,\ \text{مورب } OO' \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_1=\hat{O}'_1 \\ OB \parallel O'B' \ ,\ \text{مورب } OO' \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_2=\hat{O}'_2 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}'_1+\hat{O}'_2 \Rightarrow \hat{O}=\hat{O}'$$

حالت ۲) $k<0$

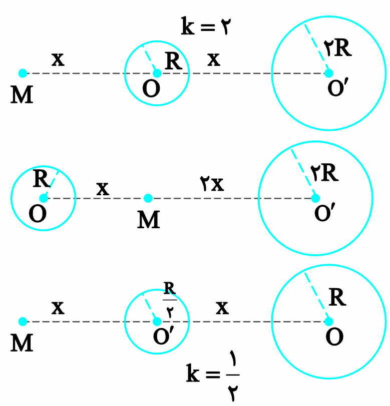
نقطه **A** و **B** را روی اضلاع **Ox** و **Oy** به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اگر A' و B' مجانس نقاط **A** و **B** به مرکز **M** و نسبت **k** باشد چون تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، داریم:



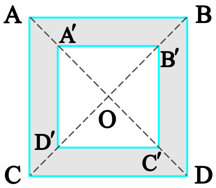
$$\left.\begin{array}{l} OA \parallel O'A' \ ,\ \text{مورب } OO' \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_1=\hat{O}'_1 \\ OB \parallel O'B' \ ,\ \text{مورب } OO' \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_2=\hat{O}'_2 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}'_1+\hat{O}'_2 \Rightarrow \hat{O}=\hat{O}'$$

۵- آسان



۶- متوسط



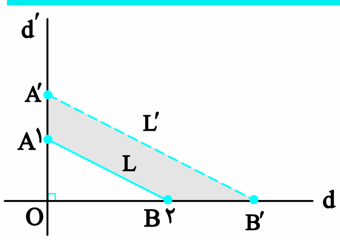
$$\frac{A'B'}{AB}=|k| \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} A'B'=2x \\ AB=3x \end{cases}$$

$$S_{\text{رنگی}}=(AB)^2-(A'B')^2 \Rightarrow 5=9x^2-4x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2=5 \xrightarrow{x>0} x=1$$

$$\text{محیط}_{ABCD}=4(AB)=4(3x)=12x=12(1)=12$$

۷- متوسط



$$OA'=|k|OA \Rightarrow OA'=\frac{7}{4}\times 1=\frac{7}{4}$$

$$OB'=|k|OB \Rightarrow OB'=\frac{7}{4}\times 2=\frac{7}{2}$$

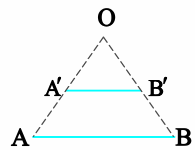
$$S_{\overset{\triangle}{OA'B'}}=\frac{1}{2}OA'\times OB'=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{16}$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$$

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\triangle}{OA'B'}}-S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{49}{16}-1 \Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{33}{16}$$

۸- دشوار

اگر **k** مثبت باشد، طبق خواص تجانس داریم:

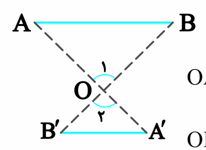


$$\left.\begin{array}{l} OA'=k.OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=k \\ OB'=k.OB \Rightarrow \frac{OB'}{OB}=k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} A'B' \parallel AB$$

$$\overset{\triangle}{ABO}: A'B' \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=K$$

اگر $k<0$ باشد، طبق خواص تجانس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} OA'=|k|OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=|k| \\ OB'=|k|OB \Rightarrow \frac{OB'}{OA}=|k| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=|k| \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \ \text{متقابل به رأس} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OA'B'} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=|k|$$

۹- متوسط

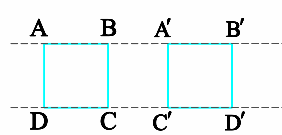
می‌دانیم اگر $A'_1A'_2$ مجانس A_1A_2 در تجانس به مرکز **O** و نسبت **k** باشد رابطه $\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}=|k|$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}=\frac{A'_2A'_3}{A_2A_3}=\dots=\frac{A'_nA'_1}{A_nA_1}=|k|$$

$$\Rightarrow A_1A_2A_3\dots A_n \sim A'_1A'_2A'_3\dots A'_n$$

۱۰- متوسط

می‌دانیم هر دو مربع با هم متشابه هستند. حال اگر دو مربع هم‌اندازه به ضلع واحد را مطابق شکل در نظر بگیریم دو خطی که از **A** و A' و **C** و C' می‌گذرد با هم موازی‌اند و می‌دانیم در تجانس هر خطی که مجانس نقطه را به خود نقطه وصل می‌کند از مرکز تجانس می‌گذرد پس نتیجه می‌گیریم دو مربع مجانس هم نیستند.



سؤالات تستی پاسخنامه

بخش ۲

۱- گزینه «۴» آسان

تبدیلات دوران، بازتاب و انتقال طولپا هستند، اما تجانس فقط زمانی طولپاست که $k=1$ یا $k=-1$ باشد.

۲- گزینه «۳» آسان

تجانس زمانی طولپاست که $k=1$ یا $k=-1$ باشد.

$$t^2+6t+8=1 \Rightarrow t^2+6t+7=0$$

$$\Delta=36-4(1)(7)=8$$

$$t=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t=-3-\sqrt{2} \\ t=-3+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$t^2+6t+8=-1 \Rightarrow t^2+6t+9=0$$

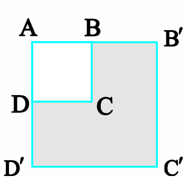
$$\Rightarrow (t+3)^2=0 \Rightarrow t=-3$$

بنابراین به ازای ۳ مقدار متمایز **t**، تجانس با نسبت t^2+6t+8 طولپا است.

۳- گزینه «۲» متوسط

اگر اندازه هر ضلع مربع اولیه را $2x$ فرض کنیم اندازه هر ضلع تصویر آن برابر است با:

$$AB'=|k|AB \Rightarrow AB'=\frac{5}{2}\times 2x \Rightarrow AB'=5x$$



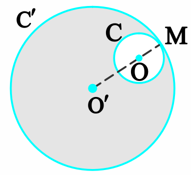
$$S_{\text{رنگی}}=(5x)^2-(2x)^2 \Rightarrow 84=25x^2-4x^2$$

$$\Rightarrow 84=21x^2 \Rightarrow x^2=4 \xrightarrow{x>0} x=2$$

$$ABCD_{\text{محیط}}=4(2x)=8x=8(2)=16$$

۴- گزینه «۲» دشوار

چون دو دایره دارای یک مماس مشترک هستند، پس مماس خارج هستند و چنانچه نقطه تماس دو دایره را **M** بنامیم، چون **M** تصویر خودش شده است پس نقطه **M** مرکز تجانس است و در تجانس می‌دانیم:



$$|k|=\frac{O'M}{OM} \Rightarrow ۵=\frac{OO'+OM}{OM} \Rightarrow ۵OM=۱۶+OM$$

$$\Rightarrow ۴OM=۱۶ \Rightarrow OM=۴ \Rightarrow R=۴$$

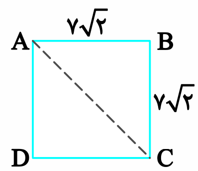
$$O'M=OO'+OM=۱۶+۴ \Rightarrow O'M=R'=۲۰$$

$$S_{\text{رنگی}}=\pi R'^{۲}-\pi R^{۲}=\pi(۲۰)^{۲}-\pi(۴)^{۲}=۴۰۰\pi-۱۶\pi$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=۳۸۴\pi$$

۵- گزینه «۱» دشوار

می‌دانیم اگر اندازه ضلع مربعی برابر **x** باشد، اندازه قطر آن $x\sqrt{۲}$ است.



پس قطر مربع **ABCD** برابر ۱۴ است و قطر مربع تصویر آن در تجانس به مرکز **O** و نسبت **k** برابر ۲۸ شده است، بنابراین داریم:

$$|k|=\frac{A'C'}{AC}=\frac{۲۸}{۱۴} \Rightarrow |k|=۲$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است. پس داریم:

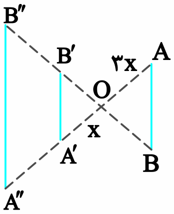
$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۵)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}$$

در تجانس به نسبت **k**، نسبت مساحت تصویر به مساحت جسم اولیه برابر $k^{۲}$ است.

$$\frac{S'}{S}=k^{۲} \Rightarrow \frac{S'}{\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}}=۴ \Rightarrow S'=۲۵\sqrt{۳}$$

۶- گزینه «۴» دشوار

طبق خواص تجانس داریم:



$$\frac{OA'}{OA}=|k|=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases}OA'=x\\ OA=۳x\end{cases}$$

$$AA''=۴AA' \Rightarrow A''A'+A'O+OA=۴(OA+OA')$$

$$\Rightarrow A''A'+x+۳x=۴(۳x+x) \Rightarrow A''A'=۱۲x$$

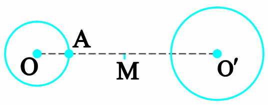
می‌دانیم تجانس شیب خط را حفظ می‌کند پس در تجانس اول $A'B' \parallel AB$ و در تجانس دوم $A''B'' \parallel AB$ است، در نتیجه $A'B' \parallel A''B''$.

$$\overset{\triangle}{OA''B''}: A'B' \parallel A''B'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA'}{OA''}=\frac{A'B'}{A''B''}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۱۲x}=\frac{A'B'}{A''B''} \Rightarrow \frac{A''B''}{A'B'}=۱۳$$

۷- گزینه «۲» متوسط

اگر **M** مرکز تجانس باشد:



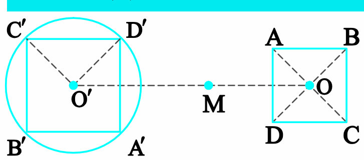
$$\frac{R'}{R}=|k| \Rightarrow \frac{۷}{۳}=|k|$$

$$\frac{O'M}{OM}=|k| \Rightarrow \frac{O'M}{OM}=\frac{۷}{۳} \Rightarrow \frac{O'M+OM}{OM}=\frac{۷+۳}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{OO'}{OM}=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \frac{۳۰}{OM}=\frac{۱۰}{۳} \Rightarrow OM=۹$$

$$\text{کمترین فاصله M تا دایره C}=OM=MO-R=۹-۳ \Rightarrow OM=۶$$

۸- گزینه «۳» دشوار



$$S_{\text{دایره}}=\pi r^{۲} \Rightarrow ۸\pi=\pi r^{۲} \Rightarrow r=۲\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{O'C'D'}: C'D'^{۲}=O'C'^{۲}+O'D'^{۲}=۸+۸=۱۶ \Rightarrow C'D'=۴$$

طبق خواص تجانس می‌دانیم: $|k|=\frac{C'D'}{CD} \Rightarrow |k|=\frac{۴}{۱}=۴$

چون تجانس معکوس است، نقطه **M** بین O' و **O** است.

$$|k|=\frac{O'M}{OM} \Rightarrow ۴=\frac{O'M}{OM} \Rightarrow O'M=۴OM$$

$$OO'=OM+O'M \Rightarrow ۲۰=OM+۴OM \Rightarrow OM=۴ \Rightarrow O'M=۱۶$$

۹- گزینه «۳» — متوسط

می‌دانیم در تجانس به نسبت **k**، نسبت اندازه اضلاع $|k|$ و نسبت مساحت‌ها $k^۲$ است.

$$\frac{S'}{S}=k^۲ \Rightarrow \frac{۵۰}{۱۶۲}=k^۲ \Rightarrow k^۲=\frac{۲۵}{۸۱} \Rightarrow k=\frac{۵}{۹}$$

$$k=\frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{۵}{۹}=\frac{A'B'}{۱۳/۵} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{A'B'}{۳} \Rightarrow A'B'=۷/۵$$

۱۰- گزینه «۱» — دشوار

اگر $A(۵,۳)$ و $B(۷,۱)$ و $C(۱,-۱)$ باشد داریم:

$$AB=\sqrt{(۷-۵)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$AC=\sqrt{(۱-۵)^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

$$BC=\sqrt{(۱-۷)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۳۶+۴}=۲\sqrt{۱۰}$$

چون $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ است پس رأس **A** قائمه است.

$$S=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۲}\times ۴\sqrt{۲} \Rightarrow S=۸$$

طبق خواص تجانس داریم:

$$\frac{S'}{S}=k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{۸}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S'=۲$$

۱۱- گزینه «۳» — متوسط

چون $k>۰$ است **O**، خارج فاصله **M** و M' است و طبق خواص تجانس داریم:

$$\underset{O}{\bullet}\text{- - -}\underset{M'}{\cdot}\text{- - - }\overset{۶}{}\text{- - -}\underset{M}{\bullet}$$

$$|k|=\frac{OM'}{OM} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{OM'}{OM} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{OM'}{OM'+MM'}$$

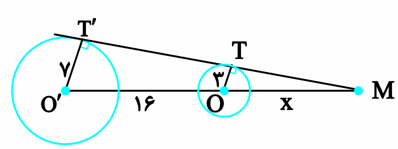
$$\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{OM'}{OM'+۶} \Rightarrow ۵OM'=۲OM'+۱۲$$

$$\Rightarrow ۳OM'=۱۲ \Rightarrow OM'=۴ \Rightarrow OM=۱۰$$

$$OM^۲+OM'^۲=(۱۰)^۲+(۴)^۲=۱۰۰+۱۶=۱۱۶$$

۱۲- گزینه «۱» — متوسط

مرکز تجانس مستقیم دو دایره محل تلاقی مماس مشترک خارجی با خط‌المرکزین است.

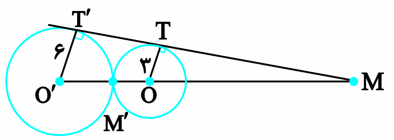


$$\left.\begin{matrix}OT\perp T'M\\ O'T'\perp T'M\end{matrix}\right\} \Rightarrow OT\parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO}{MO'}=\frac{OT}{O'T}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۱۶}=\frac{۳}{۷} \Rightarrow ۷x=۳x+۴۸ \Rightarrow ۴x=۴۸ \Rightarrow x=۱۲$$

۱۳- گزینه «۴» — دشوار

محل برخورد ۲ دایره (که محل تلاقی خط‌المرکزین با مماس مشترک داخلی دو دایره است) نقطه M' یعنی مرکز تجانس معکوس است و محل تلاقی خط‌المرکزین با مماس مشترک خارجی دو دایره نقطه **M**، یعنی مرکز تجانس مستقیم دو دایره است و چون دو دایره مماس خارج هستند $(OO'=R+R'=۹)$ است.



$$\left.\begin{matrix}OT\perp T'M\\ O'T'\perp T'M\end{matrix}\right\} \Rightarrow OT\parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO}{MO'}=\frac{OT}{O'T'}$$

$$\Rightarrow \frac{MO}{MO+OO'}=\frac{۳}{۶} \Rightarrow \frac{MO}{MO+۹}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲OM=MO+۹ \Rightarrow MO=۹$$

$$MM'=MO+OM'=۹+۳ \Rightarrow MM'=۱۲$$

۱۴- گزینه «۴» — آسان

تجانس فقط زمانی که $k=۱$ باشد تبدیل همانی است و انتقال زمانی همانی است که طول بردار انتقال صفر باشد، بازتاب هیچ وقت تبدیل همانی نیست و دوران با زاویه $۲k\pi$ یک تبدیل همانی است.

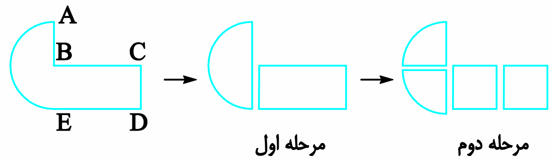
۱۵- گزینه «۳» — آسان

در تبدیل همانی، چون هر نقطه تصویر خودش است، پس بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل داریم و همواره طولپا است.

تجانس تنها هنگامی که $k=۱$ باشد تبدیل همانی است و $k=-۱$ تبدیل همانی نمی‌باشد.

پاسخنامه
سؤالات تشریحی
بخش ۳

۱- آسان



۲- آسان

آ) اضلاع **BC** و **CD** را نسبت به **BD** بازتاب می‌کنیم در این‌صورت:

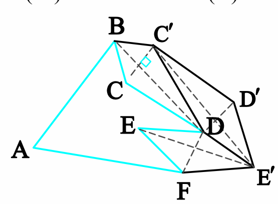
$S(B)=B \quad S(C)=C' \quad S(D)=D$

اضلاع **DE** و **EF** را نسبت به **DF** بازتاب می‌کنیم:

$S(D)=D \quad S(E)=E' \quad S(F)=F$

اضلاع DC' و DE' را نسبت به $C'E'$ بازتاب می‌کنیم:

$S(C')=C' \quad S(D)=D' \quad S(E')=E'$

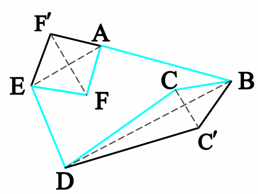


ب) اضلاع **EF** و **AF** را نسبت به **AE** بازتاب می‌کنیم:

$S(E)=E \quad S(F)=F' \quad S(A)=A$

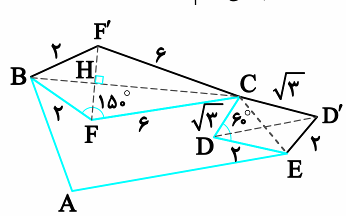
اضلاع **DC** و **BC** را نسبت به **BD** بازتاب می‌کنیم:

$S(D)=D \quad S(C)=C' \quad S(B)=B$



۳- متوسط

آ) اضلاع **BF** و **FC** را نسبت به **BC** بازتاب می‌کنیم:



$$\left.\begin{matrix} S(B)=B \\ S(F)=F' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} BF=BF'=۲$$

$$\left.\begin{matrix} S(F)=F' \\ S(C)=C \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} FC=F'C=۶$$

می‌دانیم در تبدیل طولپا اندازه زاویه حفظ می‌شود یعنی $\hat{F}=\hat{F}'$.

$$\left.\begin{matrix} BF=BF' \\ \hat{F}=\hat{F}' \\ FC=F'C \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{BFC} \cong \overset{\triangle}{BF'C}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BF'C}}=S_{\overset{\triangle}{BFC}}=\frac{۱}{۲}BF\times FC\times \sin F=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\times \frac{۱}{۲}=۳$$

اضلاع **CD** و **DE** را نسبت به **CE** بازتاب می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} S(D)=D' \\ S(C)=C \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} DC=D'C=\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{matrix} S(D)=D' \\ S(E)=E \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} DE=D'E=۲$$

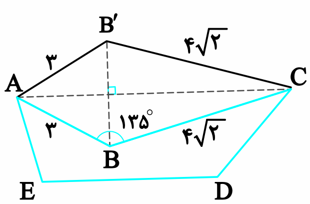
می‌دانیم در تبدیل طولپا اندازه زاویه حفظ می‌شود پس $\hat{D}=\hat{D}'$.

$$\left.\begin{matrix} DC=D'C \\ \hat{D}=\hat{D}' \\ DE=D'E \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{DCE} \cong \overset{\triangle}{CD'E}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{DCE}}=S_{\overset{\triangle}{CD'E}}=\frac{۱}{۲}DC\times DE\times \sin D=\frac{۱}{۲}\times ۲\times \sqrt{۳}\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{افزایش } S=۲(S_{\overset{\triangle}{BFC}}+S_{\overset{\triangle}{DCE}})=۲(۳+\frac{۳}{۲})=۶+۳=۹$$

ب) اضلاع **AB** و **BC** را نسبت به **AC** بازتاب می‌کنیم:



$$\left.\begin{matrix} S(A)=A \\ S(B)=B' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AB=AB'=۳$$

$$\left.\begin{matrix} S(C)=C \\ S(B)=B' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} BC=B'C=۴\sqrt{۲}$$

در تبدیل طولپا اندازه زاویه حفظ می‌شود پس $\hat{B}=\hat{B}'$.

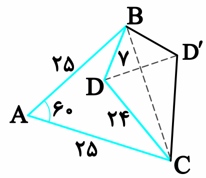
$$\left.\begin{matrix} AB=AB' \\ \hat{B}=\hat{B}' \\ BC=B'C \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{AB'C}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=\frac{۱}{۲}AB'\times B'C\times \sin\hat{B}'=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴\sqrt{۲}\times \frac{\sqrt{۲}}{۲}=۶$$

$$\text{افزایش مساحت } S=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=۶+۶=۱۲$$

۴- دشوار

اضلاع **BD** و **DC** را نسبت به پاره‌خط **BC** بازتاب می‌کنیم:



$S(B)=B \quad S(C)=C \qquad S(D)=D'$

$$\overset{\triangle}{ABC}: AB=AC=۲۵ \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \left.\begin{matrix}\widehat{ABC}=\widehat{ACB}\\ \hat{A}=۶۰\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{ABC}=\hat{A}=۶۰$$

بنابراین مثلث **ABC** متساوی‌الاضلاع است و $BC=۲۵$ است و چون در مثلث **BDC** رابطه $BC^۲=BD^۲+DC^۲$ برقرار است پس این مثلث در رأس **D** قائم‌الزاویه است.

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}S(B)=B\\S(D)=D'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} BD=BD'\\ \left.\begin{matrix}S(C)=C\\S(D)=D'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} CD=CD'\\ BC=BC\ \text{مشترک}\end{matrix}\right\}$$

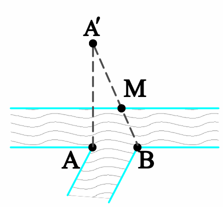
$$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{BCD}\cong \overset{\triangle}{BD'C}$$

میزان افزایش مساحت دو برابر مساحت مثلث **BCD** است.

$$\text{افزایش مساحت}=۲S_{\overset{\triangle}{BCD}}=۲(\frac{۱}{۲}DC\times BD)=۷\times ۲۴=۱۶۸$$

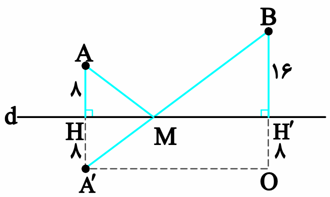
۵- آسان

بازتاب نقطه **A** را نسبت به خطی که لبه دیگر رودخانه دارد به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. سپس A' را به **B** وصل می‌کنیم، هر کجا این پاره‌خط لبه ساحل را قطع کند، نقطه **M** و جواب مسئله است.



۶- متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را A' می‌نامیم.



$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۸$

A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند، مسیر **AMB** جواب مسئله است.

$$\left.\begin{matrix}S(A)=A'\\S(M)=M\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A'M$$

کوتاه‌ترین مسیر $=AM+MB=A'M+MB=A'B$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B$ وتر آن باشد.

$BO=۱۶+۸=۲۴$

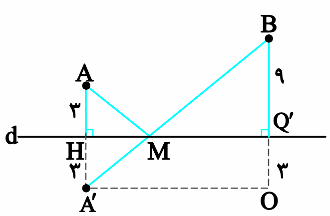
$A'O=HH'=۱۰$

$\overset{\triangle}{A'OB}: A'B^۲=BO^۲+A'O^۲=۵۷۶+۱۰۰=۶۷۶$

$\Rightarrow A'B=۲۶ \Rightarrow AM+MB=۲۶$

۷- متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را بدست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. مسیر **AMB** جواب مسئله است.



$$\left.\begin{matrix}S(A)=A'\\S(M)=M\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A'M$$

کوتاه‌ترین مسیر $=AM+MB=A'M+MB=A'B$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B$ می‌سازیم.

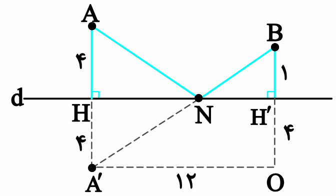
$OA'=HQ=۹$

$OB=۳+۹=۱۲$

$A'B^۲=A'O^۲+OB^۲=۹^۲+۱۲^۲=۸۱+۱۴۴=۲۲۵ \Rightarrow A'B=۱۵$

۸- دشوار

نقطه **A** را نسبت به خط d' را A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط d' را در **N** قطع کند، $AN+NB$ کمترین مقدار ممکن را دارد.



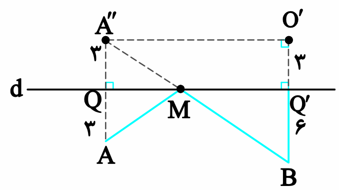
$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(N)=N \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AN=A'N$$

$$AN+NB=A'N+NB=A'B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B$ می‌سازیم. $A'O=HH'=۱۲$ و $BO=OH'+H'B=۵$ است.

$$A'B^۲=BO^۲+A'O^۲=۲۵+۱۴۴=۱۶۹ \Rightarrow A'B=۱۳$$

نقطه **A** را نسبت به خط **d** بازتاب می‌کنیم و آن را A'' می‌نامیم و A'' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند، $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن را دارد.



$$\left.\begin{matrix} S(A)=A'' \\ S(M)=M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A''M$$

$$AM+MB=A''M+MB=A''B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که وتر آن $A''B$ باشد.

$$BO'=BQ'+Q'O'=۶+۳=۹$$

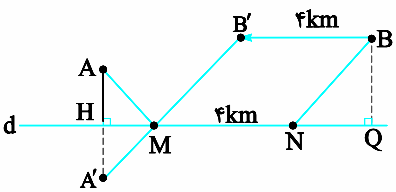
$$A''O'=QQ'=۱۲$$

$$A''B^۲=BO'^۲+A''O'^۲=۹^۲+۱۲^۲=۸۱+۱۴۴=۲۲۵ \Rightarrow A''B=۱۵$$

$$\text{کمترین محیط }AMBN=AM+MB+BN+NA$$
$$=A'B+A''B=۱۳+۱۵=۲۸$$

۹- متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به **d** را A' می‌نامیم و نقطه **B** را با برداری موازی **d** به طول ۴ به سمت **A** انتقال می‌دهیم تا نقطه B' بدست آید، سپس A' را به B' وصل می‌کنیم تا **d** را در نقطه **M** قطع کند. از **M** به طول ۴ واحد به سمت **B** روی خط **d** حرکت می‌کنیم تا به نقطه **N** برسیم مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



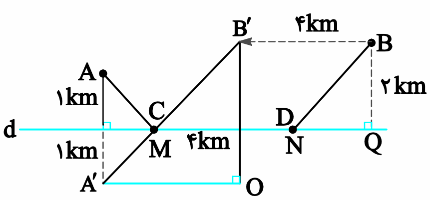
$$MN \overset{\parallel}{=} BB' \Rightarrow \square MNBB' \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow MB'=NB$$

$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A'M$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر}=AM+MN+NB=A'M+۴+MB'=A'B'+۴$$

۱۰- متوسط

بازتاب **A** نسبت لبه رودخانه (خط **d**) را A' می‌نامیم و سپس نقطه **B** را به اندازه ۴ km موازی لبه رودخانه به سمت **A** انتقال می‌دهیم. سپس A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. سپس از **M** روی خط به اندازه ۴ km به طرف **Q** می‌رویم و آن را N می‌نامیم. مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بازتاب طولپا}} AM=A'M$$

$$MN \parallel BB' \ ,\ MN=BB'=۴ \Rightarrow \square BB'MN \text{ متوازی‌الاضلاع}$$
$$\Rightarrow B'M=BN$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر}=AM+MN+NB=A'M+۴+B'M=A'B'+۴$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B'$ وتر آن باشد.

$$A'O=۸-۴=۴$$

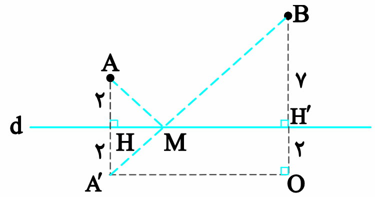
$$B'O=۲+۱=۳$$

$$\overset{\triangle}{A'OB'}: A'B'^۲=A'O^۲+B'O^۲=۱۶+۹=۲۵ \Rightarrow A'B'=۵$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین مسیر}=A'B'+۴=۵+۴=۹\ km$$

۱۱- دشوار

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. مسیر **AMN** کوتاه‌ترین مسیر است.



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AM=A'M$$

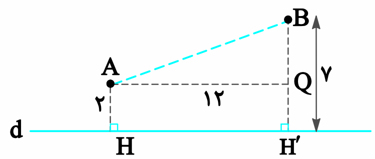
کوتاه‌ترین مسیر $= AM+MB = A'M+MB = A'B = ۱۵$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B$ می‌سازیم. $BO = BH'+H'O = ۹$

$$A'B^{۲} = OB^{۲} + A'O^{۲} \Rightarrow ۲۲۵ = ۸۱ + A'O^{۲}$$

$$\Rightarrow A'O^{۲} = ۱۴۴ \Rightarrow A'O = ۱۲ \Rightarrow HH' = ۱۲$$

حال می‌خواهیم فاصله **A** تا **B** را بدست آوریم از **A** بر BH' عمود **AQ** را رسم می‌کنیم. در این صورت $AQ = HH' = ۱۲$ و $BQ = BH' - QH' = ۷ - ۲ = ۵$.

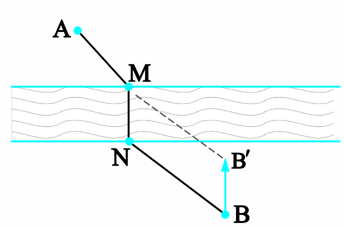


$$\overset{\triangle}{ABQ}: AB^{۲} = AQ^{۲} + QB^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = ۱۲^{۲} + ۵^{۲} = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow AB = ۱۳$$

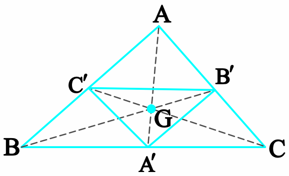
۱۲- آسان

نقطه **B** را با برداری موازی و هم‌اندازه عرض رودخانه (**MN**) انتقال می‌دهیم تا نقطه B' بدست آید. **A** را به B' وصل می‌کنیم تا لبه رودخانه را در نقطه **M** قطع کند، پس از **M** به لبه دیگر رودخانه عمود می‌کنیم نقطه **N** بدست آید، مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



۱۳- دشوار

آ) از خواص میانه‌ها می‌دانیم:



$$\frac{GA'}{AG} = \frac{GB'}{BG} = \frac{GC'}{GC} = \frac{۱}{۲}$$

مجانس نقطه **A** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ نقطه A' می‌شود.

مجانس نقطه **B** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ نقطه B' می‌شود.

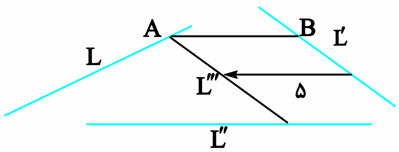
مجانس نقطه **C** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ نقطه C' می‌شود.

ب) پس مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث **ABC** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ است و می‌دانیم در تجانس نسبت مساحت‌ها برابر $k^{۲}$ است.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^{۲} = (-\frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴- آسان

خط L' را با برداری به طول ۵ موازی L'' انتقال می‌دهیم تا L''' به وجود آید. L'''، **L** را در نقطه **A** قطع می‌کند، از **A** موازی L'' رسم می‌کنیم تا L' را در **B** قطع کند، طول پاره‌خط **AB** برابر ۵ است و موازی L'' است و یک سر آن روی **L** و سر دیگر روی L' است.



۱۵- متوسط

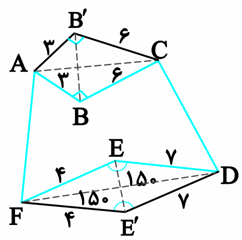
خط **d** را به مرکز **A** و با زاویه ۶۰° دوران می‌دهیم تا خط d' را در نقطه **B** قطع کند، پس نقطه **B** را به مرکز **A** و زاویه $(-۶۰)^\circ$ دوران می‌دهیم تا نقطه **C** بدست آید. نقطه **C** حتماً روی خط **d** است. حال مثلث **ABC** جواب مسئله است.

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۳

۱- گزینه «۲» آسان

دو ضلع **AB** و **BC** را نسبت به پاره‌خط **AC** و دو ضلع **EF** و **ED** را نسبت به پاره‌خط **FD** بازتاب می‌کنیم. طبق خواص بازتاب دو مثلث **ABC** و $AB'C$ با هم و دو مثلث **EFD** و $FE'D$ با هم همنهشت هستند.



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = \frac{۱}{۲}AB.BC = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۶ = ۹$$

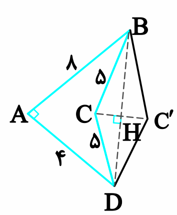
$$S_{\overset{\triangle}{EFD}} = S_{\overset{\triangle}{E'FD}} = \frac{۱}{۲}EF\times ED\times \sin ۱۵۰ = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۷\times \frac{۱}{۲} = ۷$$

$$S_{AB'CDE'F} = S_{ABCDEF} + ۲S_{\overset{\triangle}{ABC}} + ۲S_{\overset{\triangle}{EFD}}$$

$$= ۴۰ + ۲(۹) + ۲(۷) = ۴۰ + ۱۸ + ۱۴ = ۷۲$$

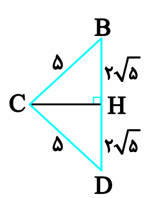
۲- گزینه «۴» متوسط

اضلاع **BC** و **CD** را نسبت با پاره‌خط **BD** بازتاب می‌کنیم. طبق خواص بازتاب دو مثلث **BCD** و $BC'D$ همنهشت هستند.



$$\overset{\triangle}{ABD}: BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} = ۶۴ + ۱۶ = ۸۰ \Rightarrow BD = ۴\sqrt{۵}$$

چون مثلث **CBD** متساوی‌الساقین است، ارتفاع وارد بر قاعده میانه هم می‌باشد. $BH = HD = ۲\sqrt{۵}$



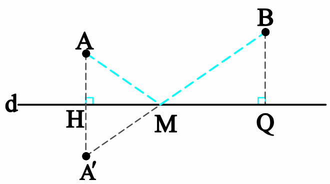
$$\overset{\triangle}{BCH}: BC^{۲} = CH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۲۵ = CH^{۲} + ۲۰$$

$$\Rightarrow CH^{۲} = ۵ \Rightarrow CH = \sqrt{۵}$$

$$S_{\text{زمین}} = S_{\overset{\triangle}{ABD}} + S_{\overset{\triangle}{BC'D}} = \frac{۱}{۲}\times ۸\times ۴ + \frac{۱}{۲}\times \sqrt{۵}\times ۴\sqrt{۵} = ۱۶ + ۱۰ = ۲۶$$

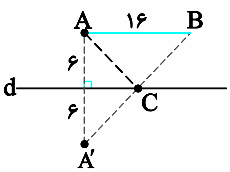
۳- گزینه «۱» آسان

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** (نقطه A') را بدست می‌آوریم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در نقطه **M** قطع کند. مسیر **AMB** کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



۴- گزینه «۳» متوسط

روش ۱) $S = \frac{۱}{۲}AB\times h \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱}{۲}\times ۱۶\times h \Rightarrow h = ۶$



به فاصله ۶ واحد از پاره‌خط **AB**، خط **d** را موازی **AB** رسم می‌کنیم. سپس بازتاب نقطه **A** را نسبت به خط **d**، A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در نقطه **C** قطع کند، مثلث **ABC** جواب مسئله است. چون بازتاب طولپا است $AC = A'C$.

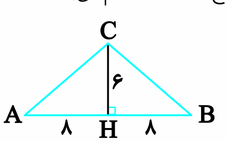
$$AC + BC = A'C + BC = A'C$$

$$\overset{\triangle}{AA'B}: A'B^{۲} = A'A^{۲} + AB^{۲} = (۱۲)^{۲} + (۱۶)^{۲} = ۱۴۴ + ۲۵۶ = ۴۰۰$$

$$\Rightarrow A'C = ۲۰$$

$$\text{محیط مثلث } ABC = \underbrace{AC + CB}_{A'B} + AB = A'B + AB = ۲۰ + ۱۶ = ۳۶$$

روش ۲) برای اینکه مثلث **ABC** کم‌ترین محیط را داشته باشد، این مثلث حتماً باید متساوی‌الساقین باشد ($AC = BC$) پس ارتفاع **CH** میانه هم می‌باشد.



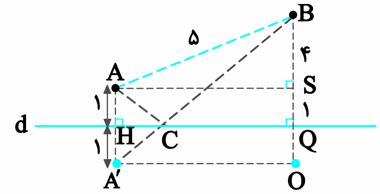
$$S = \frac{۱}{۲}CH\times AB \Rightarrow ۴۸ = \frac{۱}{۲}\times CH\times ۱۶ \Rightarrow CH = ۶$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: AC^{۲} = AH^{۲} + CH^{۲} = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ \Rightarrow AC = BC = ۱۰$$

$$\text{محیط } ABC = AC + BC + AB = ۱۰ + ۱۰ + ۱۶ = ۳۶$$

۵- گزینه «۳» — متوسط

از **A** به **BQ** عمود **AS** را رسم می‌کنیم $AH = SQ = ۱$ و $BS = ۴$ است.



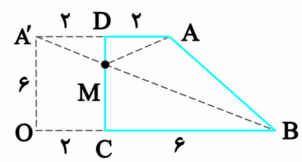
$$\overset{\triangle}{ASB}: AB^۲ = AS^۲ + BS^۲ \Rightarrow ۲۵ = AS^۲ + ۱۶$$
$$\Rightarrow AS^۲ = ۹ \Rightarrow AS = ۳$$

بازتاب نقطه **A** نسبت به **d** (نقطه A') را پیدا می‌کنیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در نقطه **C** قطع کند. $AC + CB$ کوتاه‌ترین فاصله را دارد که برابر $A'B$ است، حال مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که وتر آن $A'B$ باشد. $A'O = AS = ۳$ و $BO = BQ + HA' = ۶$.

$$A'B^۲ = A'O^۲ + OB^۲ = ۹ + ۳۶ = ۴۵ = ۹ \times ۵$$
$$\Rightarrow A'B = ۳\sqrt{۵} \Rightarrow AC + CB = ۳\sqrt{۵}$$

۶- گزینه «۱» — متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به ضلع **BC** نقطه A' است ($A'D = DA = ۲$) که A' را به **B** وصل می‌کنیم تا ضلع **DC** را در **M** قطع کند. $AM + MB$ در این حالت کمترین مقدار را دارد که برابر $A'B$ است.

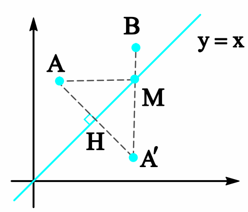


مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B$ وتر آن باشد در این‌صورت $OB = OC + CB = ۸$ و $A'O = DC = ۶$ است.

$$A'B^۲ = A'O^۲ + OB^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow A'B = ۱۰$$

۷- گزینه «۲» — متوسط

همواره بازتاب نقطه $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به صورت (y,x) است.

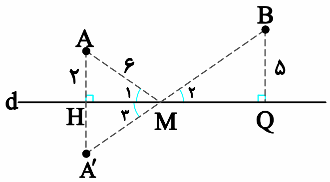


بازتاب **A** نسبت به خط $y = x$ را A' می‌نامیم پس $A'(۷,۲)$ است. اگر A' را به **B** وصل کنیم تا خط $y = x$ را در **M** قطع کند. مسیر **AMB** جواب مسئله است که $AM + MB = A'B$ است.

$$A'B = \sqrt{(x_{A'} - x_B)^۲ + (y_{A'} - y_B)^۲} = \sqrt{(۷-۳)^۲ + (۲-۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۸- گزینه «۴» — متوسط

ابتدا نقطه **A** را نسبت به خط **d** بازتاب داده و نقطه حاصل را A' می‌نامیم، محل تلاقی $A'B$ با خط **d** نقطه **M** است که طبق خواص بازتاب $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۳$ و چون $\hat{M}_۳$ و $\hat{M}_۲$ متقابل به رأس هستند پس با هم برابر هستند بنابراین $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ است یعنی **M** همان نقطه **N** است.



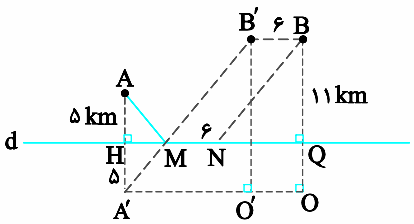
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_۱ = \hat{M}_۳ \\ \hat{H} = \hat{Q} = ۹۰\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AMH} \sim \overset{\triangle}{MBQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BQ} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۶}{BM} \Rightarrow BM = ۱۵$$

$$MA + MB = ۶ + ۱۵ = ۲۱$$

۹- گزینه «۲» — متوسط

بازتاب نقطه **A** را نسبت به خط **d** بدست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم و نقطه **B** را با برداری به طول ۶ موازی ساحل انتقال می‌دهیم تا به B' برسیم و A' را به B' وصل می‌کنیم تا ساحل را در **M** قطع کند، از **M** به اندازه ۶ km روی ساحل حرکت می‌کنیم تا به **N** برسیم. مسیر **AMNB** جواب مسئله است که $AM + NB$ برابر $A'B'$ است و $MN = ۶$ است، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B'$ وتر آن باشد.



$$A'O' = HQ - MN = ۱۲ \quad \text{و} \quad B'O' = BO = BQ + QO = ۱۱ + ۵ = ۱۶$$

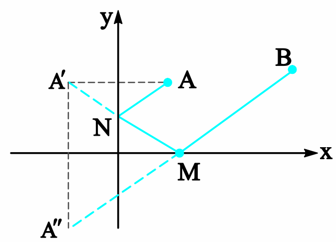
$$\overset{\triangle}{A'O'B'}: A'B'^۲ = A'O'^۲ + O'B'^۲ = ۱۲^۲ + ۱۶^۲ = ۱۴۴ + ۲۵۶ = ۴۰۰$$
$$\Rightarrow A'B' = ۲۰$$

کوتاه‌ترین مسیر $= AM + MN + NB = (AM + NB) + ۶$

$$= A'B' + ۶ = ۲۰ + ۶ = ۲۶$$

۱۰- گزینه «۳» — دشوار

روش اول) بازتاب **A** را نسبت به محور **y**، A' می‌نامیم و بازتاب A' را نسبت به محور **x**، A'' می‌نامیم، A'' را به **B** وصل می‌کنیم تا محور **x** را در **M** قطع کند، A' را به **M** وصل می‌کنیم تا محور **y** را در **N** قطع کند، مسیر **ANMB** جواب مسئله است، چون بازتاب طولپا است $AN=A'N$ و $A'M=A''M$ است.



کوتاه‌ترین مسیر $= AN+NM+MB = A'N+NM+MB$

$= A'M+MB = A'B$

$$A(۳,۵) \xrightarrow{\text{بازتاب محور y}} A'(-۳,۵) \xrightarrow{\text{بازتاب نسبت به محور x}} A''(-۳,-۵)$$

$$A''B=\sqrt{(x_{A''}-x_B)^۲+(y_{A''}-y_B)^۲}=\sqrt{(-۳-۹)^۲+(-۵-۱۱)^۲}$$

$$=\sqrt{۱۴۴+۲۵۶}=۲۰$$

روش دوم) اگر از نقطه **A** به محور **y** و سپس به محور **x** و بعد از آن به نقطه **B** بخواهیم برویم تا طول مسیر کوتاه‌ترین مقدار ممکن باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر از دستور $\sqrt{(x_A+x_B)^۲+(y_A+y_B)^۲}$ به دست می‌آید.

کوتاه‌ترین مسیر $=\sqrt{(۳+۹)^۲+(۵+۱۱)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۲۵۶}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$

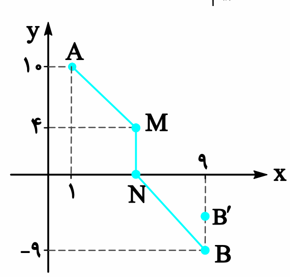
۱۱- گزینه «۴» — آسان

بنا به نکته تست قبلی کم‌ترین طول مسیر برابر $\sqrt{(x_A+x_B)^۲+(y_A+y_B)^۲}$ می‌باشد

طول کوتاه‌ترین مسیر $=\sqrt{(۱+۵)^۲+(۵+۳)^۲}=\sqrt{۳۶+۶۴}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

۱۲- گزینه «۱» — دشوار

چون $MN=۴$ است، **B** را با برداری به طول ۴ و موازی محور **y**ها به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نقطه B' بدست آید که $B'(۹,-۵)$ می‌شود، کوتاه‌ترین مسیر **AMNB** برابر $AB'+MN$ است که داریم:



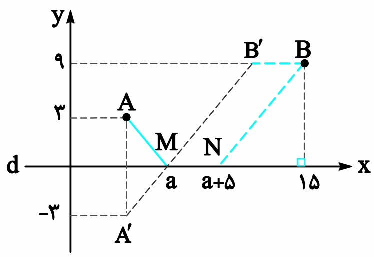
$$AB'=\sqrt{(x_A-x_{B'})^۲+(y_A-y_{B'})^۲}=\sqrt{(۱-۹)^۲+(۱۰-(-۵))^۲}$$

$$=\sqrt{۶۴+۲۲۵}=\sqrt{۲۸۹} \Rightarrow AB'=۱۷$$

کوتاه‌ترین مسیر $=AB'+MN=۱۷+۴=۲۱$

۱۳- گزینه «۳» — دشوار

نقطه **B** را با برداری به طول ۵ موازی محور **x** انتقال می‌دهیم تا نقطه $B'(۱۰,۹)$ بدست آید و بازتاب نقطه **A** نسبت به محور **x** را بدست می‌آوریم تا نقطه $A'(۱,-۳)$ بدست آید. می‌دانیم طول کوتاه‌ترین مسیر برابر $A'B'+BB'$ است که $BB'=۵$:



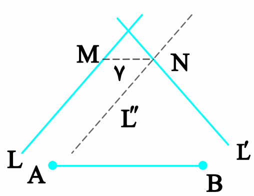
$$A'B'=\sqrt{(x_{A'}-x_{B'})^۲+(y_{A'}-y_{B'})^۲}=\sqrt{(۱-۱۰)^۲+(-۳-۹)^۲}$$

$$=\sqrt{۸۱+۱۴۴}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵$$

طول کوتاه‌ترین مسیر $=A'B'+BB'=۱۵+۵=۲۰$

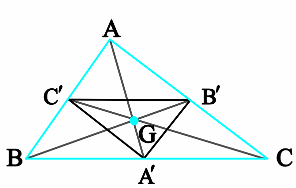
۱۴- گزینه «۲» — دشوار

خط **L** را با برداری موازی **AB** و طول ۷ انتقال می‌دهیم تا خط L' را در نقطه **N** قطع کند. از **N** خطی موازی **AB** رسم می‌کنیم تا خط **L** را در **M** قطع کند **NM** جواب مسئله است. حال می‌توانیم به جای خط **L**، خط L' را انتقال دهیم تا **L** را قطع کند و از آن نقطه موازی **AB** رسم می‌کنیم تا خط L' را قطع کند، پس مسئله ۲ جواب دارد.



۱۵- گزینه «۱» — آسان

چون **G** (مرکز ثقل) بین **A** و A' و همین‌طور بین **B** و B' و بین **C** و C' است پس $k<۰$ است و داریم:



$$\frac{A'G}{AG}=\frac{B'G}{BG}=\frac{C'G}{CG}=\frac{۱}{۲}=|k| \xrightarrow{k<۰} k=-\frac{۱}{۲}$$

پس با یک تجانس به مرکز، مرکز ثقل مثلث **ABC** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$، مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث **ABC** است.

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۱

۱- آسان

آ) نادرست   ب) نادرست

پ) درست   ت) نادرست

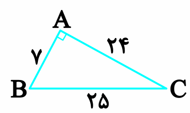
۲- آسان

آ) خط   ب) ندارد

پ) دوران   ت) حفظ می‌کند

۳- متوسط

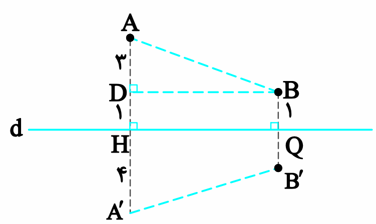
چون $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ است پس $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است و چون تبدیل **T** طولپا است پس مساحت دو مثلث **ABC** و $A'B'C'$ با هم برابر هستند.



$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۲۴ = ۸۴$$

۴- دشوار

اگر بازتاب نسبت به خط **d** را **S** فرض کنیم داریم:



$$S(A) = A' \Rightarrow AH = HA' = ۴ \Rightarrow AA' = ۸$$

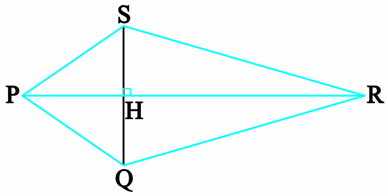
$$S(B) = B' \Rightarrow BQ = QB' = ۱ \Rightarrow BB' = ۲$$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')}{۲} \times BD \Rightarrow ۲۰ = \frac{(۸ + ۲)}{۲} \times BD \Rightarrow BD = ۴$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : AB^۲ = AD^۲ + BD^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵$$

۵- آسان

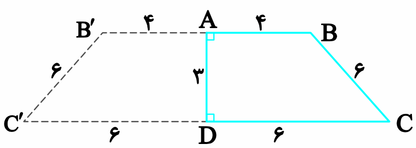
بازتاب نسبت به پاره‌خط **PR** را **S** می‌نامیم.



$$\left.\begin{array}{l} S(S) = Q \\ S(P) = P \\ S(R) = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خواص بازتاب}} \widehat{SPR} = \widehat{QPR}$$

۶- متوسط

برای اینکه شکل حاصل از ذوزنقه و تصویرش با هم بیش‌ترین محیط را داشته باشد، آن‌را نسبت به ضلع **AD** بازتاب می‌دهیم که **A** و **D** نقاط ثابت این تبدیل هستند.



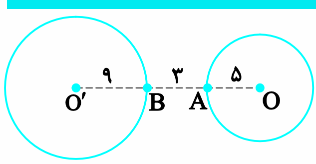
$$S(B) = B' \Rightarrow AB = AB' = ۴ \Rightarrow BB' = ۸$$

$$S(C) = C' \Rightarrow CD = DC' = ۶ \Rightarrow CC' = ۱۲$$

چون بازتاب طولپا است $BC = B'C' = ۶$.

$$\text{محیط}_{B'BCC'} = BB' + BC + CC' + B'C' = ۸ + ۶ + ۱۲ + ۶ = ۳۲$$

۷- آسان

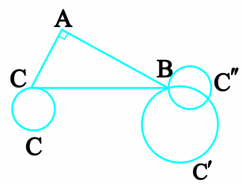


$$OO' = O'B + BA + AO = ۹ + ۳ + ۵ \Rightarrow OO' = ۱۷$$

طول بردار انتقالی که دو دایره را به دو دایره هم مرکز تبدیل می‌کند برابر $OO' = ۱۷$ است.

۸- دشوار

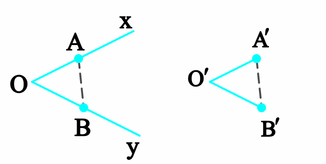
دایره C را به مرکز A و زاویه ۹۰° دوران می‌دهیم تا دایره C'' بدست آید. محل تقاطع دایره C'' و دایره C' یک رأس مثلث (مثلاً B) است. حال نقطه B را به مرکز A و زاویه (-۹۰°) دوران می‌دهیم تا نقطه C که حتماً روی دایره C است بدست آید که مثلث ABC جواب مسئله است، چون بنا به خاصیت دوران $AB=AC$ و $\widehat{BAC}$ برابر زاویه دوران یعنی ۹۰° است.



چون دایره C'' می‌تواند با دایره C' متقاطع یا مماس باشد و یا اصلاً همدیگر را قطع نکنند، مسئله می‌تواند ۲ جواب یا ۱ جواب داشته باشد و یا اینکه اصلاً جواب نداشته باشد.

۹- متوسط

نقطه A را روی Ox و نقطه B را روی Oy انتخاب می‌کنیم اگر $T(O)=O'$ و $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ باشد.

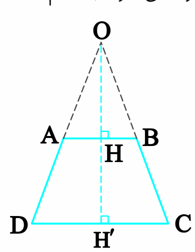


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}T(O)=O'\\T(A)=A'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}} OA=O'A'\\ \left.\begin{array}{l}T(O)=O'\\T(B)=B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}} OB=O'B'\\ \left.\begin{array}{l}T(A)=A'\\T(B)=B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}} AB=A'B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}$$

$$\overset{\triangle}{OAB}\cong\overset{\triangle}{O'A'B'}\xrightarrow{\text{ا.م}}\hat{O}=\hat{O}'$$

۱۰- دشوار

چون $k>۰$ است پس نقطه O خارج از فاصله AD قرار می‌گیرد و داریم:



$$\frac{OD}{OA}=k\Rightarrow\frac{OD}{OA}=۳\Rightarrow\frac{OA}{OD}=\frac{۱}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ODH'}:AH\parallel DH'\Rightarrow\frac{OA}{OD}=\frac{OH}{OH'}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{OH'}\Rightarrow OH'=۶$$

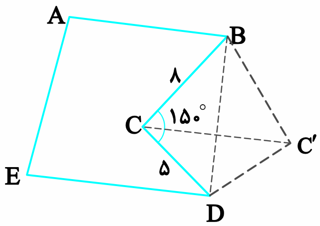
$$\Rightarrow OH+HH'=۶\Rightarrow ۲+HH'=۶\Rightarrow HH'=۴$$

از خواص تجانس می‌دانیم: $\frac{DC}{AB}=k\Rightarrow\frac{DC}{۵}=۳\Rightarrow DC=۱۵$

$$S=\frac{(AB+DC)}{۲}\times HH'\Rightarrow S=\frac{(۵+۱۵)}{۲}\times ۴\Rightarrow S=۴۰$$

۱۱- متوسط

اضلاع BC و CD را نسبت به پاره‌خط BD بازتاب می‌کنیم.



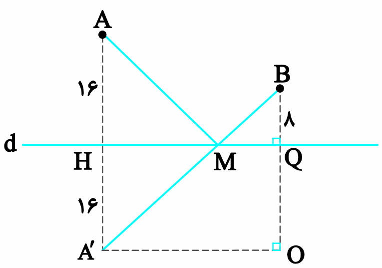
$$\left.\begin{array}{l}S(B)=B\\S(C)=C'\\S(D)=D\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{خواص بازتاب}}\overset{\triangle}{BCD}\cong\overset{\triangle}{BC'D}$$

$$S_{\text{افزایش}}=S_{\overset{\triangle}{BCD}}+S_{\overset{\triangle}{BC'D}}=۲S_{\overset{\triangle}{BCD}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times BC\times CD\sin C$$

$$=۲\times\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۵\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{\text{افزایش}}=۲۰$$

۱۲- دشوار

نقطه A'، بازتاب نقطه A نسبت به خط است، از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیری است که از A به خط d و سپس به نقطه B برویم.



$$\left.\begin{array}{l}S(A)=A'\\S(M)=M\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}}AM=A'M$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر}=AM+MB=A'M+MB=A'B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B$ وتر آن باشد.

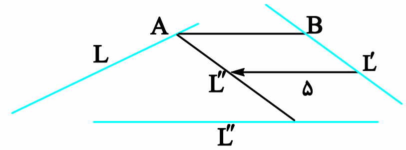
$A'O=HQ=۱۰$ و $BO=BQ+QO=۸+۱۶=۲۴$

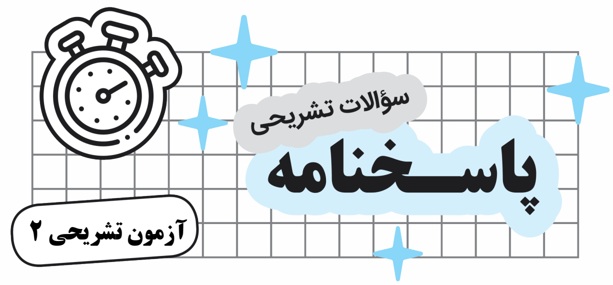
$$\overset{\triangle}{A'OB}:A'B'^{۲}=A'O^{۲}+OB^{۲}=(۱۰)^{۲}+(۲۴)^{۲}=۱۰۰+۵۷۶=۶۷۶$$

$$\Rightarrow A'B=۲۶$$

۱۳- متوسط

خط L' را با برداری به طول ۵ موازی L'' انتقال می‌دهیم تا L''' به‌وجود آید، L'''، L را در نقطه A قطع می‌کند، از A موازی L'' رسم می‌کنیم تا L' را در B قطع کند، طول پاره‌خط AB برابر ۵ است و موازی L'' است و یک سر آن روی L و سر دیگر روی L' است.





۱- آسان

آ) درست　　ب) درست

پ) نادرست　　ت) نادرست

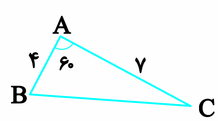
۲- آسان

آ) نقطه ثابت تبدیل　　ب) یک

پ) α یا $180-\alpha$　　ت) $k<0$

۳- آسان

چون تبدیل T، طولپا است پس مثلث $A'B'C'$ که تصویر مثلث ABC تحت این تبدیل است با مثلث ABC همنهشت است.

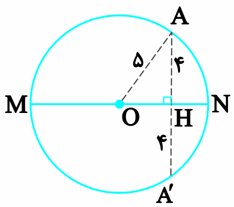


$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}AB\times AC\times \sin A=\frac{1}{2}\times 4\times 7\times \sin 60$$

$$=14\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$$

۴- دشوار

اگر دایره‌ای را نسبت به یک قطرش بازتاب کنیم، تصویر آن روی خودش قرار می‌گیرد و اگر این بازتاب را S بنامیم:

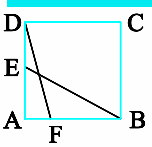


$$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=4$$

$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^2=AH^2+OH^2 \Rightarrow 25=16+OH^2$$

$$\Rightarrow OH^2=9 \Rightarrow OH=3$$

۵- متوسط

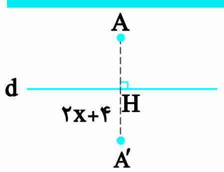


$$AE=AF \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} \text{روی عمودمنصف پاره‌خط } EF\ A$$

بازتاب نسبت به قطر AC را S می‌نامیم و می‌دانیم قطرهای مربع عمودمنصف هم هستند.

$$\left.\begin{array}{l} S(B)=D \\ S(E)=F \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} BE=DF$$

۶- آسان



$$S(A)=A' \Rightarrow AH=HA'=2x+4$$

$$AA'=2A'H \Rightarrow 7x+2=2(2x+4)$$

$$\Rightarrow 7x+2=4x+8 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2$$

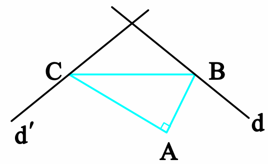
$$AH=2x+4=2(2)+4 \Rightarrow AH=8$$

۷- آسان

چون دو دایره بر هم منطبق شده‌اند پس طول بردار انتقال برابر OO' بوده است بنابراین $OO'=14$ و چون $OO'=R+R'=14$ بوده است پس دو دایره مماس خارج هستند.

۸- دشوار

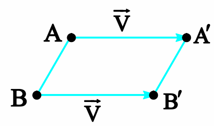
خط **d** را حول نقطه **A** با زاویه 90° دوران می‌دهیم تا خط d' را در نقطه **C** قطع کند. حال نقطه **C** را به مرکز **A** و زاویه (-90°) دوران می‌دهیم تا نقطه **B** که روی خط **d** است، بدست آید و طبق خواص دوران $AB = AC$ و زاویه **CAB** برابر زاویه دوران یعنی 90° است.



۹- متوسط

قضیه را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

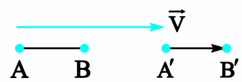
حالت ۱) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** نباشد.



$$\left.\begin{array}{l} T(A)=A' \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} BB'$$

$$\Rightarrow \square AA'B'B \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

حالت ۲) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** باشد.

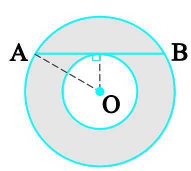


در اینصورت نقاط **A** و **B** و A' و B' روی یک خط هستند پس $AB \parallel A'B'$.

یعنی انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۱۰- دشوار

چون مرکز دایره ثابت مانده است پس مرکز دایره، مرکز تجانس بوده و $|k| = \frac{R'}{R}$ است.



$$\frac{R'}{R} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} R' = 5k \\ R = 3k \end{cases}$$

اگر از **O** به نقطه تماس پاره‌خط **AB** با دایره **C** وصل کنیم، چون بر پاره‌خط **AB** عمود است پس آن را نصف می‌کند $AH = HB = 8$.

$$\overset{\triangle}{AOH}: OA^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow 25k^2 = 9k^2 + 64$$

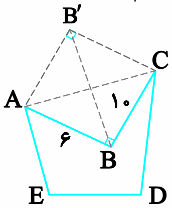
$$\Rightarrow 16k^2 = 64 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

پس $R = 6$ و $R' = 10$ است.

$$S_{\text{رنگی}} = \pi R'^2 - \pi R^2 = 100\pi - 36\pi = 64\pi$$

۱۱- متوسط

دو ضلع **AB** و **BC** را نسبت به پاره‌خط **AC** بازتاب می‌کنیم.

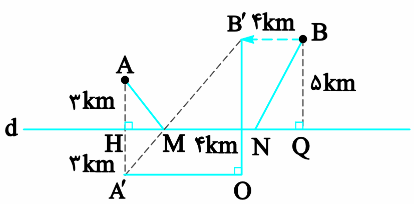


$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A \\ S(B)=B' \\ S(C)=C \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{AB'C}$$

$$S_{\text{افزایش}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = 2S_{\overset{\triangle}{ABC}} = 2 \times \frac{1}{2} AB \times BC = 6 \times 10 = 60$$

۱۲- دشوار

بازتاب **A** نسبت لبه رودخانه (خط **d**) را A' می‌نامیم و سپس نقطه **B** را به اندازه $4\ km$ موازی لبه رودخانه به سمت **A** انتقال می‌دهیم. سپس A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. سپس از **M** روی خط به اندازه $4\ km$ به طرف **Q** می‌رویم و آن را N می‌نامیم. مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بازتاب طول‌ها}} AM = A'M$$

$$MN \parallel BB',\ MN = BB' = 4 \Rightarrow \square BB'MN \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow B'M = BN$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر} = AM + MN + NB = A'M + 4 + B'M = A'B' + 4$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B'$ وتر آن باشد.

$$A'O = 10 - 4 = 6$$

$$B'O = 5 + 3 = 8$$

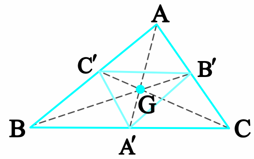
$$\overset{\triangle}{A'OB'}: A'B'^2 = A'O^2 + B'O^2 \Rightarrow A'B'^2 = 6^2 + 8^2$$

$$= 36 + 64 = 100 \Rightarrow A'B' = 10$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین مسیر} = A'B' + 4 = 10 + 4 = 14\ km$$

۱۳- متوسط

از خواص میانه‌ها می‌دانیم:



$$\frac{GA'}{AG}=\frac{GB'}{BG}=\frac{GC'}{GC}=\frac{۱}{۲}$$

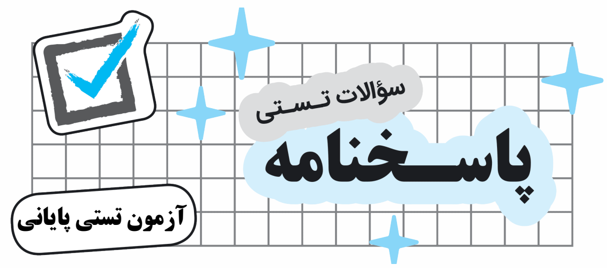
مجانس نقطه **A** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ نقطه A' می‌شود.

مجانس نقطه **B** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ نقطه B' می‌شود.

مجانس نقطه **C** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ نقطه C' می‌شود.

پس مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث **ABC** بـه مرکـز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ است و می‌دانیم در تجانس نسبت مساحت‌ها برابر $k^۲$ است.

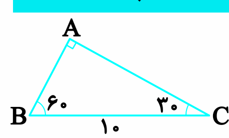
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^۲=(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$



۱- گزینه «۲» آسان

تجانس طولپا نیست مگـر $|k|=۱$ و بازتـاب و دوران الزاماً شـیب را حفـظ نمی‌کنند.

۲- گزینه «۳» متوسط



$$۲\hat{A}=۳\hat{B}=۶\hat{C}=۶x \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=۳x\\ \hat{B}=۲x\\ \hat{C}=x\end{cases}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۳x+۲x+x=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۶x=۱۸۰ \Rightarrow x=۳۰$$

پس $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۳۰^\circ$ است. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتـر است.

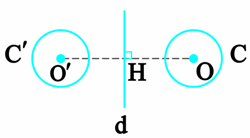
$$AB=\frac{۱}{۲}BC=۵ \qquad AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC=۵\sqrt{۳}$$

چون تبدیل طولپا است پس دو مثلث **ABC** و $A'B'C'$ همنهشـت هسـتند و مساحت برابر دارند.

$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵\sqrt{۳}=\frac{۲۵}{۲}\sqrt{۳}$$

۳- گزینه «۱» متوسط

می‌دانیم بازتاب تبدیل طولپا است پس $R=R'=۶$.



$$S(O)=O' \Rightarrow OH=O'H=۶/۵ \Rightarrow OO'=۱۳$$

حال طول مماس مشترک داخلی دو دایره را محاسبه می‌کنیم.

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۱۳^۲-(۶+۶)^۲}$$
$$=\sqrt{۱۶۹-۱۴۴}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۴- گزینه «۳» آسان

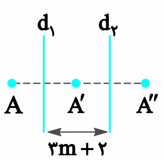
ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکـز دوران محـل تلاقی محورها است و زاویه دوران دو برابر زاویه بین دو محور است.

۵- گزینه «۲» آسان

در واقع متوازی‌الاضلاع نسبت به دو محور متقاطع بازتاب شده است و می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است و در دوران تنهـا نقطـه ثابت تبدیل مرکز دوران است که محل تقاطع دو قطر متوازی‌الاضلاع است.

۶- گزینه «۴» آسان

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است که بردار انتقـال عمود بر دو محور بازتاب عمود است و طول آن دو برابر فاصله دو خط است.



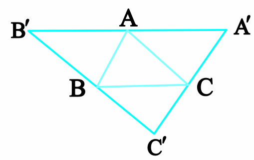
$$AA''=۲(۳m+۲) \Rightarrow ۹m-۲=۶m+۴ \Rightarrow ۳m=۶ \Rightarrow m=۲$$

می‌دانیم در انتقال $AA''=BB''$ است.

$$BB''=AA''=۹m-۲=۹(۲)-۲=۱۶$$

۷- گزینه «۲» — دشوار

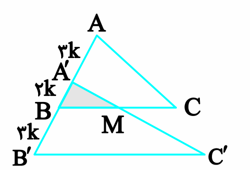
می‌دانیم انتقال شیب را حفظ می‌کند و همچنین انتقال طولپا است. پس دو چهارضلعی $BB'AC$ و $AA'CB$ متوازی‌الاضلاع هستند بنابراین $AA' = BC$ و $AB' = BC$ است پس $A'B' = ۲BC$ است، به همین ترتیب $B'C' = ۲AC$ و $A'C' = ۲AB$ می‌باشد پس چون $\frac{A'B'}{BC} = \frac{B'C'}{AC} = \frac{A'C'}{AB} = ۲$ است دو مثلث بنا به حالت سه ضلع متشابه هستند.



$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^۲ = ۴$$

۸- گزینه «۴» — دشوار

می‌دانیم در انتقال شیب حفظ می‌شود ($BC \parallel B'C'$) و انتقال طولپا است پس مساحت مثلث **ABC** با مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر است و $BB' = AA'$ است.



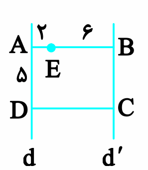
$$BM \parallel B'C' \xrightarrow{\text{اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{A'BM} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

نسبت تشابه $k = \frac{A'B}{A'B'} = \frac{۲k}{۵k} = \frac{۲}{۵}$ است پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = k^۲ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۴}{۲۵}$$

۹- گزینه «۴» — آسان

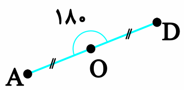
ترکیب دو بازتاب با محورهای موای یک انتقال است که طول بردار آن دو برابر فاصله بین دو محور است پس فاصله دو نقطه **E** و E' (بازتاب **E** نسبت به دو محور **d** و d') دو برابر فاصله **d** تا d' (**AB**) است.



$$EE' = ۲AB = ۲(۸) = ۱۶$$

۱۰- گزینه «۱» — متوسط

ترکیب چند دوران با یک مرکز، خود یک دوران با همان مرکز و مجموع زوایای دوران‌ها می‌باشد بنابراین نقطه **D** دوران نقطه **A** به مرکز مبدأ مختصات و زاویه ($۴۰ + ۸۰ + ۶۰ = ۱۸۰^\circ$) است.

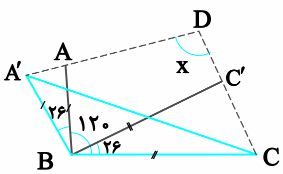


در دوران ۱۸۰° نقطه دوران دقیقاً وسط نقطه و تصویر آن است پس داریم:

$$AD = ۲AO = ۲\sqrt{(۴-۰)^۲ + (-۳-۰)^۲} = ۲\sqrt{۱۶+۹} = ۲\sqrt{۲۵} = ۱۰$$

۱۱- گزینه «۱» — دشوار

روش ۱) طبق خواص دوران $BA = BA'$ و $BC = BC'$ و $\widehat{ABA'} = \widehat{CBC'} = ۲۶^\circ$ است.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABA'} : BA = BA' \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \widehat{BAA'} = \widehat{BA'A} \\ \widehat{ABA'} = ۲۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BA'A} = ۷۷^\circ$$

به همین ترتیب $\widehat{BCC'} = ۷۷^\circ$ است، در چهارضلعی $BA'DC$ داریم:

$$\widehat{CBA'} + \widehat{BA'D} + \hat{D} + \widehat{DCB} = ۳۶۰ \Rightarrow (۱۲۰+۲۶) + ۷۷ + x + ۷۷ = ۳۶۰$$

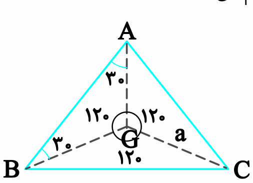
$$\Rightarrow ۳۰۰ + x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۶۰$$

روش ۲) همواره این زاویه مکمل زاویه **B** است یعنی:

$$\hat{B} + \hat{x} = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۲۰ + x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

۱۲- گزینه «۲» — متوسط

در مثلث متساوی‌الاضلاع، نیمساز، عمودمنصف و میانه نظیر یک ضلع بر هم منطبق هستند پس **G** محل تلاقی نیمسازها هم می‌باشد.



$$\widehat{GAB} = \widehat{GBA} = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$$

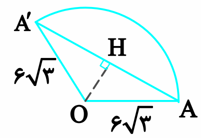
$$\overset{\triangle}{AGB} : \widehat{GAB} + \widehat{GBA} + \widehat{AGB} = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۳۰ + ۳۰ + \widehat{AGB} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{AGB} = ۱۲۰$$

به همین ترتیب $\widehat{BGC}$ و $\widehat{AGC}$ هم برابر ۱۲۰° است. پس با دوران به مرکز **G** و زاویه ۱۲۰، مثلث **ABC** بر خودش منطبق می‌شود.

۱۳- گزینه «۳» متوسط

چون کمان $\overset{\frown}{AA'}=۱۲۰^\circ$ است پس $AA'=R\sqrt{۳}$ است که



$AA'=۶\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}=۱۸$

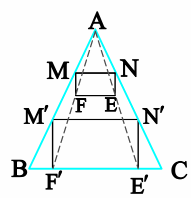
می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر از همان دایره عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند پس $AH=A'H=\frac{۱۸}{۲}=۹$.

$\overset{\triangle}{OAH}: OA^۲=OH^۲+AH^۲ \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲=OH^۲+۹^۲$

$\Rightarrow ۱۰۸=OH^۲+۸۱ \Rightarrow OH^۲=۲۷ \Rightarrow OH=۳\sqrt{۳}$

۱۴- گزینه «۴» دشوار

پاره‌خط **MN** را موازی **BC** رسم می‌کنیم، روی **MN** مربع **MNEF** را بنا می‌کنیم. از **A** به **E** و **F** وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا **BC** را در نقاط E' و F' قطع کنند. از نقاط E' و F' عمودهایی بر **BC** رسم می‌کنیم تا **AC** و **AB** را در N' و M' قطع کنند در این صورت $M'N'E'F'$ مجانس مربع **MNEF** به مرکز **A** خواهد بود.



۱۵- گزینه «۳» آسان

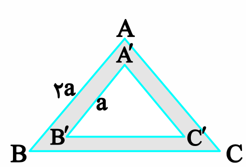
طبق تعریف تجانس اگر M' مجانس نقطه **M** به مرکز **O** و نسبت **k** باشد $(k>۰)$

$OM'=KOM \Rightarrow OM=\frac{۱}{k}OM'$

یعنی **M** مجانس M' به مرکز **O** و نسبت $\frac{۱}{k}$ است.

۱۶- گزینه «۱» دشوار

اگر فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث **ABC** برابر $۲a$ است طبق خواص تجانس داریم:



$\frac{A'B'}{AB}=|k| \Rightarrow \frac{A'B'}{۲a}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow A'B'=a$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** از دستور $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ بدست می‌آید.

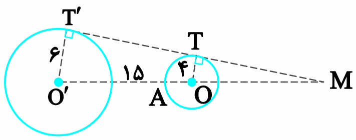
$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} \Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲a)^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

$\Rightarrow ۱۲\sqrt{۳}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow a^۲=۱۶ \Rightarrow a=۴$

$\text{محیط}_{ABC}+\text{محیط}_{A'B'C'}=۳(۲a)+۳a=۹a=۹(۴)=۳۶$

۱۷- گزینه «۳» متوسط

مرکز تجانس دو دایره محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین است.



می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس، در نقطه تماس به خط مماس عمود است، پس $OT\perp MT'$ و $O'T'\perp MT'$ است که یعنی $OT\parallel O'T'$.

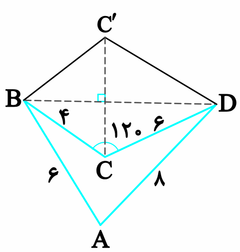
$\overset{\triangle}{O'MT'}: OT\parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO}{MO'}=\frac{OT}{OT'}$

$\Rightarrow \frac{MO}{MO+۱۵}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow ۳OM=۲OM+۳۰ \Rightarrow OM=۳۰$

$C_{\text{بیشترین فاصله M تا دایره}}=MA=MO+OA=۳۰+۴=۳۴$

۱۸- گزینه «۲» متوسط

اضلاع **BC** و **CD** را نسبت به پاره‌خط **BD** بازتاب می‌کنیم به دلیل خواص بازتاب دو مثلث **BCD** و $BC'D$ همنهشت هستند پس مساحت برابری دارند.

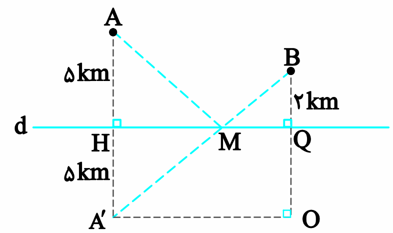


$S_{\text{افزایش مساحت}}=S_{\overset{\triangle}{BCD}}+S_{\overset{\triangle}{BC'D}}=۲S_{\overset{\triangle}{BCD}}$

$=۲\times\frac{۱}{۲}BC\times CD\times\sin۱۲۰=۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۲\sqrt{۳}$

۱۹- گزینه «۱» متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا **d** را در **M** قطع کند، مسیر **AMB** جواب مسئله است که کوتاه‌ترین مسیر $AM + MB$ است.



$$\left.\begin{array}{l}S(A)=A'\\ S(M)=M\end{array}\right\} \Rightarrow AM=A'M$$

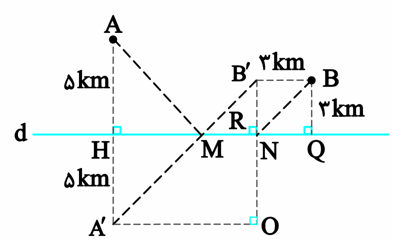
کوتاه‌ترین فاصله $= AM+MB=A'M+MB=A'B$

پس مثلث قائم‌الزاویه با وتر $A'B$ می‌سازیم که $BO=BQ+QO=۷$ و $A'O=HQ=۲۴$ است.

$$A'B^۲=A'O^۲+OB^۲=(۲۴)^۲+(۷)^۲=۵۷۶+۴۹=۶۲۵ \Rightarrow A'B=۲۵$$

۲۰- گزینه «۴» دشوار

ابتدا بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را پیدا می‌کنیم و آن را A' می‌نامیم و سپس نقطه **B** را با برداری به طول ۳ موازی ساحل انتقال می‌دهیم تا به نقطه B' برسیم. A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند، سپس **M** را با برداری برابر $\overrightarrow{BB'}$ روی ساحل رودخانه انتقال می‌دهیم تا نقطه **N** بدست آید، مسیر **AMNB** کوتاه‌ترین مسیر است.



$$\left.\begin{array}{l}S(A)=A'\\ S(M)=M\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AM=A'M$$

چون $MN \overset{\parallel}{=} BB'$ پس $B'BNM$ متوازی‌الاضلاع است پس $MB'=NB$.

کوتاه‌ترین فاصله $= AM+MN+NB=A'M+۳+MB'=A'B'+۳$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B'$ می‌سازیم که $B'O=B'R+RO=۸$ و $A'O=HQ-MN=۶$ است.

$$(A'B')^۲=A'O^۲+OB'^۲=۳۶+۶۴=۱۰۰ \Rightarrow A'B'=۱۰$$

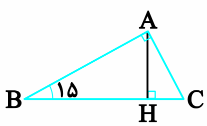
کوتاه‌ترین طول مسیر $= A'B'+۳=۱۰+۳=۱۳$

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون پلاس

۱- گزینه «۳»

اگر m_a و m_b و m_c میانه‌های مثلث قائم‌الزاویه باشد (m_a میانه وارد بر وتر است) داریم:



$$m_b^۲+m_c^۲=۵m_a^۲$$

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=۹۶ \Rightarrow m_a^۲+۵m_a^۲=۹۶$$

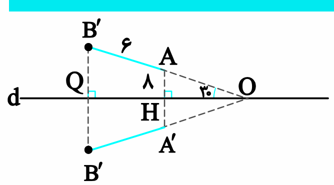
$$\Rightarrow ۶m_a^۲=۹۶ \Rightarrow m_a^۲=۱۶ \Rightarrow m_a=۴$$

می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس $BC=a=۲m_a=۸$ و در مثلث قائم‌الزاویه، اگر اندازه یک زاویه حاده ۱۵ درجه باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است پس داریم: $AH=\frac{BC}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$.

هم بازتاب و هم دوران تبدیلات طولپا هستند، پس مساحت شکل حاصل با مساحت شکل اولیه برابر است پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times۲\times۸=۸$$

۲- گزینه «۴»



$$\overset{\triangle}{OAH}:\sin ۳۰=\frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۸}{OA} \Rightarrow OA=۱۶$$

$$OB=OA+AB=۱۶+۶ \Rightarrow OB=۲۲$$

$$\overset{\triangle}{OBQ}:\sin ۳۰=\frac{BQ}{OB} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{BQ}{۲۲} \Rightarrow BQ=۱۱$$

$$S(A)=A' \Rightarrow AH=HA' \Rightarrow AA'=۲AH=۲(۸) \Rightarrow AA'=۱۶$$

$$S(B)=B' \Rightarrow BQ=QB' \Rightarrow BB'=۲BQ=۲(۱۱) \Rightarrow BB'=۲۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{OAH}: \cos ۳۰ = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{OH}{۱۶} \Rightarrow OH = ۸\sqrt{۳} \\ \overset{\triangle}{OBQ}: \cos ۳۰ = \frac{OQ}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{OQ}{۲۲} \Rightarrow OQ = ۱۱\sqrt{۳}\end{array}\right\}$$

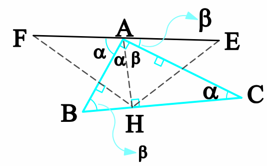
$$\Rightarrow HQ = OQ - OH$$

$$= ۱۱\sqrt{۳} - ۸\sqrt{۳} \Rightarrow HQ = ۳\sqrt{۳}$$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')}{۲} \times HQ = \frac{(۱۶+۲۲)}{۲} \times ۳\sqrt{۳} \Rightarrow S = ۵۷\sqrt{۳}$$

۳- گزینه «۱»

چون $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ است پس مثلث در رأس **A** قائمه است.



ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم و سپس بازتاب نقطه **H** را نسبت به اضلاع **AC** و **AB** به ترتیب **E** و **F** می‌نامیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه **AHB** و **AHC** داریم، $\widehat{HAB} = \alpha$ و $\widehat{HAC} = \beta$ است و چون $\alpha + \beta = ۹۰$ است پس $\widehat{EAF} = ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰$ است یعنی **E** و **A** و **F** روی یک خط قرار دارند.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}S_{AC}(A) = A \\ S_{AC}(H) = E\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AH = AE \\ \left.\begin{array}{l}S_{AB}(A) = A \\ S_{AB}(H) = F\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AH = AF\end{array}\right\} \Rightarrow AE + AF = ۲AH$$

$$\Rightarrow EF = ۲AH$$

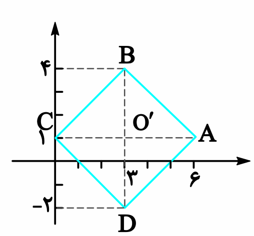
$$S = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} AB \times AC \Rightarrow AH \times BC = AB \times AC$$

$$\Rightarrow ۵AH = \sqrt{۱۰} \times \sqrt{۱۵} \Rightarrow AH = \sqrt{۶}$$

پس $EF = ۲AH = ۲\sqrt{۶}$.

۴- گزینه «۴»

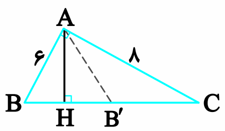
چون بازتاب نقطه **C** نسبت به محور **y**ها خودش است پس نقطه **C** نقطه ثابت تبدیل است و روی محور **y** قرار دارد یعنی $C(۰,۱)$ است و معادله قطر **AC** برابر $y = ۱$ است و $AC = ۶$ است و نقطه O' محل برخورد قطرهای مربع $O'(۳,۱)$ است پس قطر **BD** روی خط $x = ۳$ قرار دارد بنابراین $B(۳,۴)$ است و بازتاب نقطه **D** نسبت به قطر **AC** نقطه **B** است.



$$BO = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۴-۰)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۵- گزینه «۳»

با توجه به اینکه $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ آنگاه $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است. طبق روابط مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۳۶ = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = ۳/۶$$

پس $CH = BC - BH = ۱۰ - ۳/۶ = ۶/۴$.

$$S(B) = B' \Rightarrow BH = HB' = ۳/۶$$

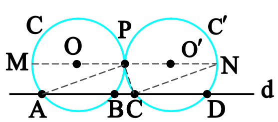
$$B'C = HC - HB' = ۶/۴ - ۳/۶ \Rightarrow B'C = ۲/۸$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۶ \times ۸ \Rightarrow AH = ۴/۸$$

$$S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = \frac{۱}{۲} AH \times B'C = \frac{۱}{۲} \times ۴/۸ \times ۲/۸ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = ۶/۷۲$$

۶- گزینه «۴»

چون دو دایره مساوی هستند، پس می‌توان گفت که دایره C'، انتقال یافته دایره **C** با بردار $OO' = ۲R$ است و می‌دانیم، انتقال طولپا است چون **d** موازی OO' است پس نقطه **C** تصویر نقطه **A** و نقطه **D** تصویر نقطه **B** در این انتقال است، بنابراین $AC = BD = ۲R$.



در چهارضلعی **APNC** چون $AC = PN = ۲R$ و $AC \parallel PN$ است، پس متوازی‌الاضلاع است بنابراین $AP \parallel CN$ است.

$$AP \parallel CN \ ,\ \text{مورب } CP \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \widehat{APC} = \widehat{PCN} \quad (۱)$$

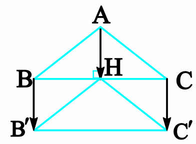
$$\widehat{PCN} = ۹۰^\circ \ \text{محاطی رو به قطر} \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\widehat{APC} = ۹۰^\circ$ و به همین ترتیب $\widehat{BPD} = ۹۰^\circ$ است.

$$\widehat{APC} + \widehat{BPD} = ۹۰ + ۹۰ = ۱۸۰^\circ$$

۷- گزینه «۲»

می‌دانیم اگر قطر یک متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم دو مثلث هم‌مساحت به وجود می‌آید.



$BB' \overset{\parallel}{=} AH \overset{\parallel}{=} \vec{V} \Rightarrow ABB'H$ متوازی‌الاضلاع $\xrightarrow{\text{قطر } BH} S_{\overset{\triangle}{ABH}} = S_{\overset{\triangle}{BB'H}}$

$CC' \overset{\parallel}{=} AH \overset{\parallel}{=} \vec{V} \Rightarrow ACC'H$ متوازی‌الاضلاع $\xrightarrow{\text{قطر } CH} S_{\overset{\triangle}{AHC}} = S_{\overset{\triangle}{HCC'}}$

چون انتقال یک تبدیل طولپا است پس دو مثلث **ABC** و $A'B'C'$ همنهشت هستند و مساحت برابری دارند.

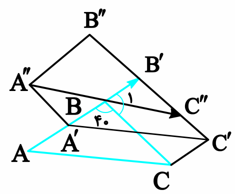
$$S_{ABB'C'C} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{BHB'}} + S_{\overset{\triangle}{HB'C'}} + S_{\overset{\triangle}{CC'H}}$$

$$= S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{ABH}} + S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{AHC}}$$

$$\Rightarrow S_{ABB'C'C} = ۲S_{\overset{\triangle}{ABC}} + (S_{\overset{\triangle}{ABH}} + S_{\overset{\triangle}{AHC}}) = ۳S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۳(۱۲) = ۳۶$$

۸- گزینه «۱»

می‌دانیم، انتقال شیب خط را حفظ می‌کند بنابراین داریم:



$\left.\begin{array}{l} BB' \parallel CC' \parallel V \\ BC \parallel B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow$ چهارضلعی $BB'C'C$ متوازی‌الاضلاع

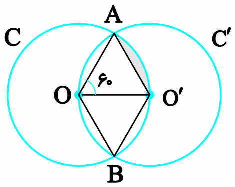
$$\hat{B}_1 = ۱۸۰ - ۴۰ = ۱۴۰$$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو برابر هستند پس:

$$\widehat{CC'C''} = B_1 = ۱۴۰^\circ$$

۹- گزینه «۱»

مرکز دایره **C** را با بردار $\vec{V} = ۶$ انتقال می‌دهیم تا نقطه O' بدست آید که چون $\vec{V} = R$ است پس O' روی دایره **C** است و چون انتقال طولپا است پس شعاع دایره C' هم برابر ۶ است و دایره C' هم از **O** می‌گذرد.



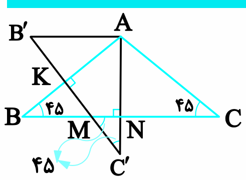
در مثلث $\overset{\triangle}{OAO'}$ و $\overset{\triangle}{OBO'}$ هر دو متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ هستند، حال می‌خواهیم مساحت قسمت رنگی که یک قطعه ۶۰° است را حساب کنیم.

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{۶۰\pi R^۲}{۳۶۰} - S_{\overset{\triangle}{AOO'}} = \frac{\pi}{۶} \times (۶)^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۶^۲ = ۶\pi - ۹\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{ناحیه مشترک}} = S_{\overset{\triangle}{AOO'}} + S_{\overset{\triangle}{BOO'}} + ۴S_{\text{رنگی}} = ۹\sqrt{۳} + ۹\sqrt{۳} + ۴(۶\pi - ۹\sqrt{۳})$$

$$= ۱۸\sqrt{۳} + ۲۴\pi - ۳۶\sqrt{۳} = ۲۴\pi - ۱۸\sqrt{۳}$$

۱۰- گزینه «۴»



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۸ + ۸ = ۱۶ \Rightarrow BC = ۴$$

مثلث **ABC** قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس $\hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ$ و چون $AB'C'$ دوران یافته مثلث **ABC** به مرکز **A** و زاویه ۴۵° است و دوران طولپا است و اندازه زاویه را حفظ می‌کند دو مثلث **ABC** و $AB'C'$ همنهشت هستند. پس داریم: $AB' = AB = ۲\sqrt{۲}$ و $AC' = AC = ۲\sqrt{۲}$ و

$$BC = B'C' = ۴$$

$$S_{\overset{\triangle}{AB'C'}} = \frac{۱}{۲} AK.B'C' = \frac{۱}{۲} AB' \times AC'$$

$$\Rightarrow AK \times B'C' = AB' \times AC' \Rightarrow AK \times ۴ = ۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} \Rightarrow AK = ۲$$

به طریق مشابه $AN = ۲$

$$BK = AB - AK = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

$$\overset{\triangle}{BKM}: \hat{B} = \hat{M} = ۴۵^\circ \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} BM = KM = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

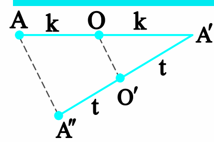
چون مثلث **ABC** متساوی‌الساقین است پس ارتفاع **AN** ضلع **BC** را نصف کرده است پس $BN = NC = ۲$.

$$S_{\text{ناحیه مشترک}} = S_{\overset{\triangle}{ANB}} - S_{\overset{\triangle}{BMK}} = \frac{۱}{۲} AN \times NB - \frac{۱}{۲} KM.BK$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲ - \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲} - ۲)(۲\sqrt{۲} - ۲)$$

$$\Rightarrow S = ۲ - \frac{۱}{۲}(۸ - ۸\sqrt{۲} + ۴) = ۲ - ۶ + ۴\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} - ۴$$

۱۱- گزینه «۳»



اگر A' دوران A به مرکز O و زاویه ۱۸۰ باشد: $OA = OA' = k$

اگر A'' دوران A' به مرکز O' و زاویه ۱۸۰ باشد: $O'A' = O'A'' = t$

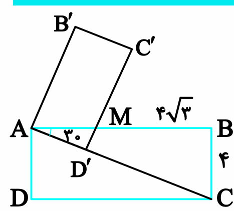
$$\overset{\Delta}{A'AA''}: \frac{OA'}{OA} = \frac{O'A'}{O'A''} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} OO' \parallel AA''$$

$$\overset{\Delta}{A'AA''}: OO' \parallel AA'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA'}{A'A} = \frac{OO'}{AA''}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۲k} = \frac{OO'}{AA''} \Rightarrow AA'' = ۲OO'$$

پس انتقال A را می‌توان با یک انتقال موازی OO' و طول ۲ برابر آن بر A'' تصویر کرد.

۱۲- گزینه «۲»



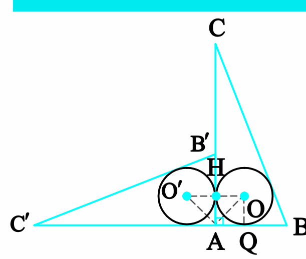
$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{۴}{۴\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \widehat{BAC} = ۳۰^\circ$$

دوران یک تبدیل طولپا است پس $AD' = AD = ۴$

$$\overset{\Delta}{AD'M}: \tan ۳۰ = \frac{MD'}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{MD'}{۴} \Rightarrow MD' = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{AD'M}} = \frac{۱}{۲} AD' \times D'M = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AD'M}} = \frac{۸}{۳}\sqrt{۳}$$

۱۳- گزینه «۳»



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه $r = \frac{s}{p}$ بدست می‌آید.

$$s = \frac{۱}{۲} AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۱۲ \Rightarrow S = ۳۰$$

$$۲p = AB + AC + BC \Rightarrow ۲p = ۵ + ۱۲ + ۱۳ = ۳۰ \Rightarrow p = ۱۵$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{۳۰}{۱۵} \Rightarrow r = ۲$$

$OH = AQ = r = ۲$ است پس در مثلث قائم‌الزاویه OQA داریم:

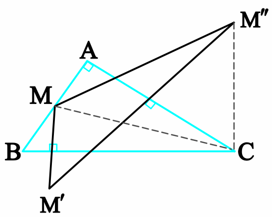
$$OA^۲ = OQ^۲ + AQ^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow OA = ۲\sqrt{۲}$$

چون دوران یافته نقطه O به مرکز A و زاویه ۹۰° نقطه O' است پس $OA = O'A = ۲\sqrt{۲}$ و $\widehat{OAO'} = ۹۰^\circ$.

$$\overset{\Delta}{AOO'}: OO'^۲ = OA^۲ + O'A^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲ = ۸ + ۸ = ۱۶$$
$$\Rightarrow OO' = ۴$$

۱۴- گزینه «۴»

چون $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲$ است پس $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است.



$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۳۰$$

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع یک دوران به مرکز تلاقی دو محور و زاویه دوران دو برابر زاویه تقاطع دو محور است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MC = M''C \\ \widehat{MCM''} = ۲(۳۰) = ۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{MCM''}_{\text{متساوی‌الاضلاع}} \Rightarrow MM'' = CM$$

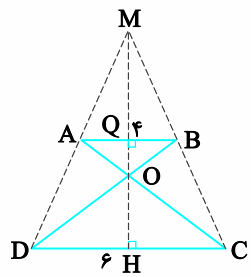
در مثلث ACM، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ و $AM = \frac{AB}{۲} = \frac{۳}{۲}$ و $AC = ۳\sqrt{۳}$ است.

$$CM^۲ = AM^۲ + AC^۲ = \frac{۹}{۴} + ۲۷ = \frac{۱۱۷}{۴}$$

$$\Rightarrow CM = \frac{۳\sqrt{۱۳}}{۶} \Rightarrow MM'' = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۱۵- گزینه «۲»

مرکز تجانس معکوس نقطه **O** و مرکز تجانس مستقیم، محل برخورد امتدادهای **AD** و **BC** است (نقطه **M**).



می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** اندازه هر ضلع ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است بنابراین $OQ = ۲\sqrt{۳}$ و $OH = ۳\sqrt{۳}$ است پس

$$HQ = ۲\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳}$$

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{ABM} \sim \overset{\triangle}{DCM} \Rightarrow k = \frac{AB}{DC} \Rightarrow k = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع است.

$$\frac{MQ}{MH} = k \Rightarrow \frac{MQ}{MQ + QH} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{MQ}{MQ + ۵\sqrt{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

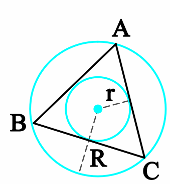
$$\Rightarrow ۳MQ = ۲MQ + ۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow MQ = ۱۰\sqrt{۳}$$

حال فاصله **MO** را بدست می‌آوریم:

$$MO = MQ + QO = ۱۰\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۳}$$

۱۶- گزینه «۱»

محل تلاقی نیمسازها مرکز دایره محاطی داخلی مثلث است و چون مرکز دایره محاطی داخلی و دایره محیطی دو مثلث یکسان است (نقطه ثابت تبدیل) پس مثلث متساوی‌الاضلاع است و اگر اندازه هر ضلع آن **a** باشد:



$$\text{محیط} = ۳a \Rightarrow ۱۲ = ۳a \Rightarrow a = ۴$$

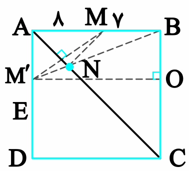
$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S = ۴\sqrt{۳}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره محیطی ۲ برابر شعاع دایره محاطی داخلی است پس $k = \frac{R}{r} = ۲$.

$$\frac{S'}{S} = k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{۴\sqrt{۳}} = ۴ \Rightarrow S' = ۱۶\sqrt{۳}$$

۱۷- گزینه «۱»

بازتاب نقطه **M** نسبت به خط **AC** را M' می‌نامیم و M' را به **B** وصل می‌کنیم تا **AC** را در **N** قطع کند، بنا به قضیه هرون مثلث **MNB** کمترین محیط ممکن را دارد.



$$\left.\begin{array}{l} S(N) = N \\ S(M) = M' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} NM = NM'$$

$$\text{محیط}_{MNB} = MN + NB + MB = M'N + NB + ۷ = M'B + ۷$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن $M'B$ باشد، می‌سازیم.

چون نقطه **A** روی عمودمنصف MM' است پس $AM = AM' = ۸$ و $BO = AM' = ۸$ است و $AB = M'O = ۱۵$.

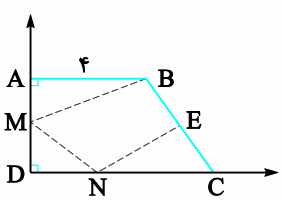
$$\overset{\triangle}{OM'B} : M'B^۲ = M'O^۲ + OB^۲ = ۱۵^۲ + ۸^۲$$

$$= ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹ \Rightarrow M'B = ۱۷$$

$$\text{محیط}_{MNB} = M'B + ۷ = ۱۷ + ۷ = ۲۴$$

۱۸- گزینه «۲»

فرض کنیم نقطه **D** روی مبدأ مختصات و اضلاع **DC** و **DA** به ترتیب روی محورهای **x** و **y** باشند در این‌صورت $A(۰,۶)$ و $C(۱۰,۰)$ و $B(۴,۶)$ است و چون **E** وسط **BE** است داریم:



$$E\left(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}\right) \Rightarrow E(۷,۳)$$

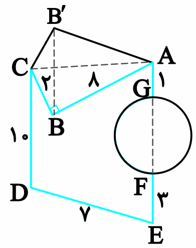
می‌خواهیم از **B** به محور **y** و سپس به محور **x** و بعد از آن به نقطه **E** برویم به طوری که کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد که می‌دانیم از دستور $\sqrt{(x_B + x_E)^۲ + (y_B + y_E)^۲}$ به‌دست می‌آید.

$$\text{کمترین مقدار } BM + MN + NE = \sqrt{(۴ + ۷)^۲ + (۶ + ۳)^۲}$$

$$= \sqrt{۱۲۱ + ۸۱} = \sqrt{۲۰۲}$$

۱۹-گزینه «۴»

نیم‌دایره را نسبت به قطر **GF** بازتاب می‌کنیم و مساحت زمین به اندازه مساحت دایره افزایش می‌یابد.



$S_{\text{دایره}} = \pi r^۲ = \pi(۴)^۲ = ۱۶\pi$

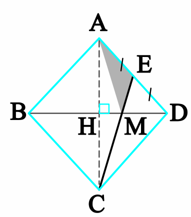
اضلاع **BC** و **AB** را نسبت به پاره‌خط **AC** بازتاب می‌کنیم چون بازتاب طولپا است پس ۲ مثلث **ABC** و $AB'C$ همنهشت هستند.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = \frac{۱}{۲} AB \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲ = ۸$$

$$S_{\text{افزایش مساحت}} = S_{\text{دایره}} + S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = ۱۶\pi + ۸ + ۸ = ۱۶(\pi + ۱)$$

۲۰- گزینه «۳»

نقاط **A** و **E** در یک طرف **BD** قرار دارند. بازتاب نقطه **A** نسبت به محور **BD** که قطر لوزی است نقطه **C** می‌شود (زیرا در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند) نقطه تلاقی **CE** و قطر **BD** را **M** می‌نامیم، بنابر قضیه هرون $MA + ME$ کمترین مقدار خود را دارد، پس محیط **MAE** کمترین مقدار خود را دارد.



در مثلث **ACD**، **M** نقطه همرسی میانه‌ها است پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{MAE}} = \frac{۱}{۶} S_{\overset{\triangle}{ACD}} \\ S_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{۱}{۶} S_{ABCD} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MAE}} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = ۱۲ S_{\overset{\triangle}{MAE}}$$