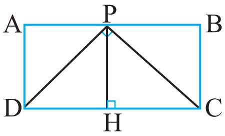
اصلاحیه

✍ فصل سوم - بخش ۱ تستی – سؤال ۴۱ پاسخ در گزینه‌ها نمی‌باشد، پاسخ صحیح: $MH = ۲$

✍ فصل سوم – بخش ۲ تستی – سؤال ۱۴ پاسخ در گزینه‌ها نمی‌باشد، پاسخ صحیح: $۱۸\sqrt{۳}$

✍ آزمون پایان فصل شکل صحیح سؤال:



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۱

۱- آسان

آ) قطر دایره محیطی ب) ۶

پ) $\frac{۵}{۳}$ ت) $\frac{۳}{۲}$

ث) ۳۰° ج) خارج

چ) $-\frac{۱}{۲}$

۲- آسان

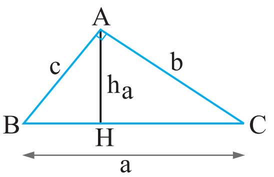
آ) درست ب) درست

پ) نادرست ت) درست

ث) نادرست ج) درست

چ) نادرست ح) نادرست

۳- آسان



$$\hat{A}=۹۰ \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲$$

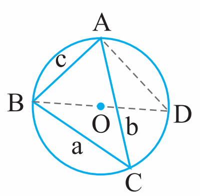
$$S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bc \Rightarrow ah_a=bc \Rightarrow h_a=\frac{bc}{a}$$

$$\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{c^۲+b^۲}{b^۲c^۲}=\frac{a^۲}{b^۲c^۲}=(\frac{a}{bc})^۲=\frac{۱}{h_a^۲}$$

۴- دشوار

مسئله را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت ۱) همه زاویه‌ها حاده باشند.



قطر گذرنده از **B** را رسم می‌کنیم تا دایره را در **D** قطع کند. **D** را به **A** وصل می‌کنیم.

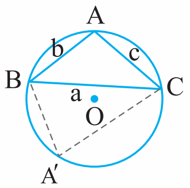
$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \text{ محاطی}\\ \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \text{ محاطی}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}=\hat{C}$$

$$\widehat{BAD}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \text{ محاطی} \Rightarrow \widehat{BAD}=۹۰^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \sin\hat{D}=\frac{AB}{BD} \xrightarrow{\hat{D}=\hat{C}} \sin\hat{C}=\frac{C}{۲R} \Rightarrow \frac{C}{\sin\hat{C}}=۲R$$

به همین ترتیب $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$

حالت ۲) مثلث دارای زاویه منفرجه باشد.



نقطه A' را روی دایره محیط و در طرف دیگر **BC** در نظر می‌گیریم و A' را به **B** و **C** وصل می‌کنیم.

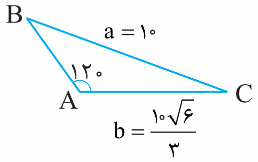
$$\hat{A}+\hat{A}'=۱۸۰ \Rightarrow \begin{cases}\sin A=\sin A'\\ \hat{A}>۹۰ \Rightarrow A'<۹۰\end{cases}$$

مثلث $A'BC$ دارای ۳ زاویه حاده است پس:

$$\frac{a}{\sin A'}=۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=۲R$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$$

۵- متوسط



$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰}=۲R \Rightarrow \frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۲R$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}R=۱۰ \Rightarrow R=\frac{۱۰}{\sqrt{۳}} \Rightarrow R=۱۰\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B} \Rightarrow ۱۰\sin B=\frac{۱۰\sqrt{۱۸}}{۶}$$

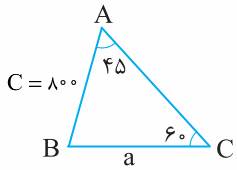
$$\Rightarrow \sin B=\frac{۳\sqrt{۲}}{۶}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\hat{B}=۴۵^\circ\\ \hat{B}=۱۳۵^\circ\end{cases}$$

$$\text{if } \hat{B}=۴۵ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۱۲۰+۴۵+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{C}=۱۵^\circ$$

$$\text{if } \hat{B}=۱۳۵ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۱۲۰+۱۳۵+\hat{C}=۱۸۰$$

$\Rightarrow \hat{C}=-۷۵^\circ$ غ ق ق

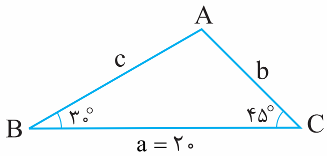
۶- آسان



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{800}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a=\frac{800\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=\frac{800\sqrt{6}}{3}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \Rightarrow 45+\hat{B}+60=180 \Rightarrow \hat{B}=75^\circ$$

۷- دشوار



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \Rightarrow \hat{A}+30+45=180 \Rightarrow \hat{A}=105$$

$$\sin A=\sin 105=\sin(45+60)=\sin 45\cos 60+\cos 45\sin 60$$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{20}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=\frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{80}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=2b$$

$$\Rightarrow b=\frac{40}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{40(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \Rightarrow b=10(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\frac{1}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow c=10(\sqrt{12}-2) \Rightarrow c=20(\sqrt{3}-1)$$

۸- دشوار

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R}\\ \frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \sin B=\frac{b}{2R}\\ \frac{c}{\sin C}=2R \Rightarrow \sin C=\frac{c}{2R}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin A+\sin B+\mathrm{cin}C$$

$$=\frac{2P}{2R}=\frac{20}{2(12)}=\frac{5}{6}$$

۹- متوسط

$$\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R}$$

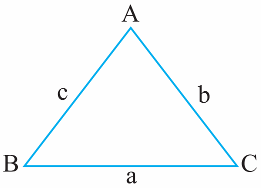
$$\frac{b}{\sin B}=2R \Rightarrow \sin B=\frac{b}{2R}$$

$$\frac{c}{\sin C}=2R \Rightarrow \sin C=\frac{c}{2R}$$

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C \Rightarrow \frac{a^2}{4R^2}=\frac{b^2}{4R^2}+\frac{c^2}{4R^2}$$

$$\xrightarrow{\times 4R^2} a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$$

۱۰- متوسط



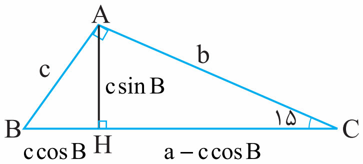
$$\frac{a}{2R}=\sin A \Rightarrow \sin A=\frac{a}{2R}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow S=\frac{1}{2}\frac{abc}{2R} \Rightarrow S=\frac{abc}{4R} \Rightarrow R=\frac{abc}{4S}$$

۱۱- دشوار

قضیه را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

آ) همه زاویه‌ها حاده باشند: ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin B=\frac{AH}{C} \Rightarrow AH=C\sin B$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \cos B=\frac{BH}{C} \Rightarrow BH=C\cos B \Rightarrow HC=a-\cos B$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: b^2=AH^2+HC^2 \Rightarrow b^2=c^2\sin^2 B+(a-c\cos B)^2$$

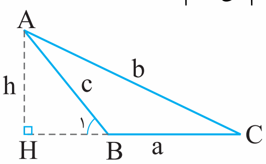
$$\Rightarrow b^2=c^2\underline{\sin^2 B}+a^2-2ac\cos B+c^2\underline{\cos^2 B}$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2\underbrace{(\sin^2 B+\cos^2 B)}_{1}-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

به طریق مشابه $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

ب) یک زاویه منفرجه باشد: ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم.



$$\hat{B}+\hat{B}_1=180 \Rightarrow \begin{cases}\sin B=\sin B_1\\ \cos B_1=-\cos B\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \begin{cases}\sin B_1=\frac{h}{c} \Rightarrow h=c\sin B_1 \Rightarrow h=c\sin B\\ \cos B_1=\frac{HB}{c} \Rightarrow HB=c\cos B_1\\ \Rightarrow HB=-c\cos B \Rightarrow HC=a-c\cos B\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: AC^2=AH^2+HC^2 \Rightarrow b^2=c^2\sin^2 B+(a-c\cos B)^2$$

$$\Rightarrow b^2=c^2\underline{\sin^2 B}+a^2+c^2\underline{\cos^2 B}-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2(\sin^2 B+\cos^2 B)-2ac\cos B$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

به همین ترتیب $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cos B$.

۱۲- متوسط

طبق روابط فیزیکی مسافت طی شده برابر است با سرعت ضرب زمان طی مسافت.

$$\Delta x = vt \Rightarrow OA = ۶۰\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow OA = ۳۰$$

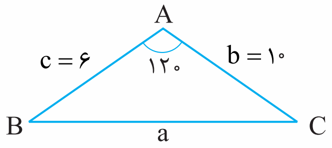
$$\Delta x = vt \Rightarrow OB = ۱۰۰\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow OB = ۵۰$$

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ - ۲OA\times OB\cos ۱۲۰$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۹۰۰ + ۲۵۰۰ - ۲(۳۰)(۵۰)(-\frac{۱}{۲})$$

$$= ۹۰۰ + ۲۵۰۰ + ۱۵۰۰ = ۴۹۰۰ \Rightarrow AB = ۷۰$$

۱۳- آسان

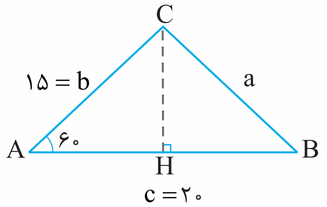


$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۱۰۰ + ۳۶ - ۲(۱۰)(۶)(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۳۶ + ۶۰ = ۱۹۶ \Rightarrow a = ۱۴$$

محیط $= a + b + c = ۱۴ + ۶ + ۱۰ = ۳۰$

۱۴- دشوار



آ) $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۲۲۵ + ۴۰۰ - ۲(۲۰)(۱۵)\cos ۶۰$

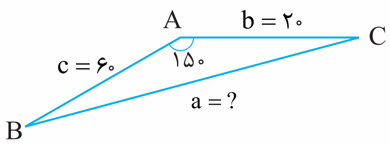
$$\Rightarrow a^۲ = ۶۲۵ - ۳۰۰ \Rightarrow a^۲ = ۳۲۵ = ۲۵\times ۱۳ \Rightarrow a = ۵\sqrt{۱۳}$$

ب) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۵\sqrt{۱۳}}{\sin ۶۰} = \frac{۱۵}{\sin B} \Rightarrow \frac{۱۰\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۵}{\sin B}$

$$\Rightarrow ۱۰\sqrt{۱۳}\sin B = ۱۵\sqrt{۳} \Rightarrow \sin B = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۰\sqrt{۱۳}}\times\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۳۹}}{۲۶}$$

پ) $\overset{\triangle}{ACH} : \sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \sin ۶۰ = \frac{CH}{۱۵} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{CH}{۱۵} \Rightarrow CH = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

۱۵- متوسط



$$\Delta x = vt \Rightarrow AB = ۶۰\times ۱ = ۶۰ \Rightarrow c = ۶۰$$

$$\Delta x = vt \Rightarrow AC = ۴۰\times\frac{۱}{۲} = ۲۰ \Rightarrow b = ۲۰$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۴۰۰ + ۳۶۰۰ - ۲(۲۰)(۶۰)(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$= ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} \Rightarrow a = \sqrt{۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳}}$$

۱۶- آسان

آ) $\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A < ۰ \xleftrightarrow{\times(-۲bc)} -۲bc\cos A > ۰$

$$\xleftrightarrow{b^۲+c^۲} b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$

ب) $\hat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A > ۰ \xleftrightarrow{\times(-۲bc)} -۲bc\cos A < ۰$

$$\xleftrightarrow{b^۲+c^۲} b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$

پ) $\hat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \cos A = ۰ \xleftrightarrow{\times(-۲bc)} -۲bc\cos A = ۰$

$$\xleftrightarrow{b^۲+c^۲} b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

۱۷- آسان

آ) $a^۲ = ۸۱$ $\qquad b^۲ + c^۲ = ۳۶ + ۱۰۰ = ۱۳۶$

$$a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

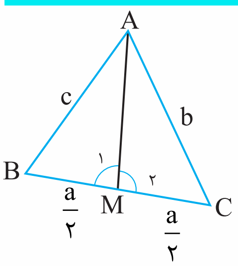
ب) $a^۲ = ۸۱$ $\qquad b^۲ + c^۲ = ۱۶ + ۶۴ = ۸۰$

$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

پ) $a^۲ = ۲۸۹$ $\qquad b^۲ + c^۲ = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

۱۸- دشوار



$$\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \cos M_۲ = -\cos M_۱$$

$$\overset{\triangle}{ABM} : c^۲ = m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} - ۲m_a(\frac{a}{۲})\cos M_۱$$

$$\Rightarrow c^۲ = m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} - m_a.a\cos M_۱ \quad (۱)$$

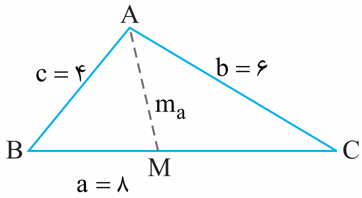
$$\overset{\triangle}{AMC} : b^۲ = m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} - ۲m_a(\frac{a}{۲})\cos M_۲$$

$$\Rightarrow b^۲ = m_a^۲ + \frac{a^۲}{۴} + m_a.a\cos M_۱ \quad (۲)$$

رابطه (۱) را با رابطه (۲) جمع می‌کنیم.

$$\boxed{b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲}}$$

۱۹- آسان

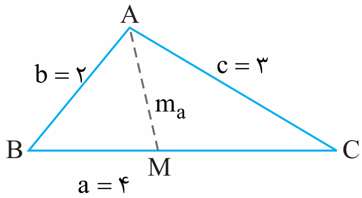


$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

$$36+16=2m_a^2+\frac{64}{2} \Rightarrow 52=2m_a^2+32 \Rightarrow 20=2m_a^2$$

$$\Rightarrow m_a^2=10 \Rightarrow m_a=\sqrt{10}$$

۲۰- متوسط

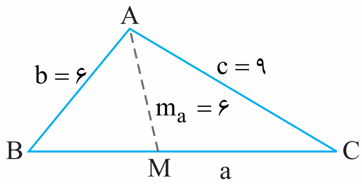


$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

$$4+9=2m_a^2+\frac{16}{2} \Rightarrow 5=2m_a^2 \Rightarrow m_a^2=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow m_a=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow m_a=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۲۱- متوسط



$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2} \Rightarrow 36+81=2(6)^2+\frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow 117=72+\frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2}=45 \Rightarrow a^2=90 \Rightarrow a=3\sqrt{10}$$

۲۲- دشوار

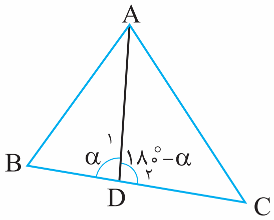
$$\left.\begin{array}{l} b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2} \\ a^2+b^2=2m_c^2+\frac{c^2}{2} \\ a^2+c^2=2m_b^2+\frac{b^2}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2a^2+2b^2+2c^2$$

$$=2m_a^2+2m_b^2+2m_c^2+\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+\frac{3}{2}c^2=2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=m_a^2+m_b^2+m_c^2$$

۲۳- دشوار



$$\hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ \Rightarrow \cos\hat{D}_2=-\cos\hat{D}_1$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\hat{D}_1$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2\cdot DC$$

$$=BD^2\cdot DC+AD^2\cdot DC-2BD\cdot AD\cdot DC\cos\hat{D}_1 \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: AC^2=DC^2+AD^2-2DC.AD\cos\hat{D}_2$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2\cdot DB=DC^2\cdot DB+AD^2\cdot DB$$

$$+2DC\cdot AD\cdot DB\cos\hat{D}_1 \quad (2)$$

رابطه (۱) را با رابطه (۲) جمع می‌کنیم.

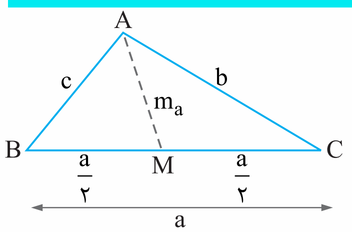
$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot DB$$

$$=\underline{\underline{BD^2\cdot DC}}+\underline{AD^2\cdot DC}+\underline{\underline{DC^2\cdot DB}}+\underline{AD^2\cdot DB} \Rightarrow$$

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot DB=AD^2(\underbrace{DC+DB}_{BC})+BD\cdot DC(\underbrace{BD+DC}_{BC})$$

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot DB=AD^2\cdot BC+BD\cdot DC\cdot BC$$

۲۴- متوسط

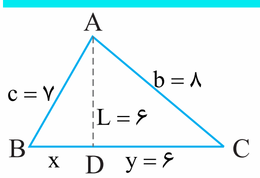


$$AB^2\cdot MC+AC^2\cdot MB=AM^2\cdot BC+BM\cdot MC\cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}c^2+\frac{a}{2}b^2=m_a^2\times a+\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times a$$

$$\xrightarrow{\times\frac{2}{a}} c^2+b^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$$

۲۵- متوسط



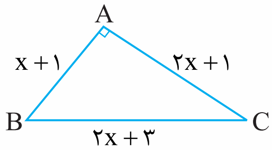
$$xb^2+yc^2=a(L^2+xy) \Rightarrow x(64)+6(49)=(6+x)(36+6x)$$

$$\Rightarrow 64x+294=216+36+36x+6x^2 \Rightarrow 6x^2+8x-78=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(6x+26)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{13}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پاسخنامه
سؤالات تستی
بخش ۱

۱- گزینه «۱» آسان



$\hat{A}=۹۰ \Rightarrow BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}$

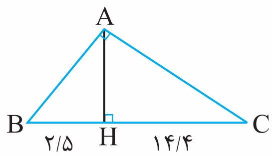
$\Rightarrow (۲x+۳)^{۲}=(x+۱)^{۲}+(۲x+۱)^{۲}$

$\Rightarrow ۴x^{۲}+۱۲x+۹=x^{۲}+۲x+۱+۴x^{۲}+۴x+۱ \Rightarrow x^{۲}-۶x-۷=۰$

$\Rightarrow (x-۷)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۷ \\ x=-۱ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$

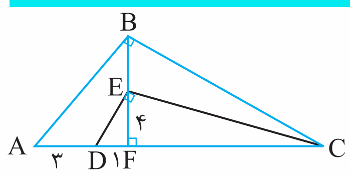
در این‌صورت $AB=۸$ و $S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۱۵=۶۰$

۲- گزینه «۲» آسان



$AH^{۲}=BH\times HC \Rightarrow AB^{۲}=۲/۵\times ۱۴/۴ \Rightarrow AB^{۲}=۳۶ \Rightarrow AB=۶$

۳- گزینه «۴» متوسط



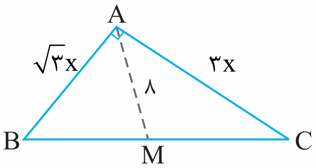
$\overset{\Delta}{EDC}: EF^{۲}=DF\times FC \Rightarrow ۱۶=۱\times FC \Rightarrow FC=۱۶$

$\overset{\Delta}{ABC}: BC^{۲}=FC\times AC \Rightarrow BC^{۲}=۱۶\times(۱۶+۱+۳)=۳۲۰$

$\Rightarrow BC=۸\sqrt{۵}$

۴- گزینه «۳» آسان

کوچک‌ترین میانه به بزرگ‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود، پس کوچک‌ترین میانه در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر است که نصف وتر است پس $BC=۲AM=۲(۸)=۱۶$.



$\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow AB=\sqrt{۳}x \ , \ AC=۳x$

$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲} \Rightarrow ۲۵۶=۳x^{۲}+۹x^{۲} \Rightarrow x^{۲}=\frac{۲۵۶}{۱۲}$

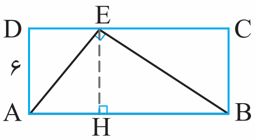
$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۶۴}{۳} \Rightarrow x=\frac{۸}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

پس $AB=۸$ و $AC=۸\sqrt{۳}$

$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۸\sqrt{۳} \Rightarrow S=۳۲\sqrt{۳}$

۵- گزینه «۲» متوسط

ابتدا **EH** را رسم می‌کنیم. $AD=EH=۶$



$S_{\overset{\Delta}{AHB}}=\frac{۱}{۲}EH\times AB \Rightarrow ۳۹=\frac{۱}{۲}\times ۶\times AB \Rightarrow AB=۱۳$

اگر $AH=x$ باشد، آنگاه $HB=۱۳-x$ است.

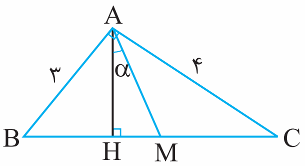
$\overset{\Delta}{AEB}: EH^{۲}=AH\times HB \Rightarrow ۶^{۲}=x\times(۱۳-x) \Rightarrow ۳۶=۱۳x-x^{۲}$

$\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=۹ \end{cases}$

چون $AH=DE=x$ و $HB=EC=۱۳-x$ و $DE<EC$ است پس $x=۴$ است بنابراین $DE=۴$ و $HB=۹$ است.

$\frac{DE}{HB}=\frac{۴}{۹}$

۶- گزینه «۱» متوسط



$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۹+۱۶=۲۵ \Rightarrow BC=۵$

می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس $AM=\frac{BC}{۲}=۲/۵$ است.

$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}AB\times AC \Rightarrow AH\times BC=AB\times AC$

$\Rightarrow AH\times ۵=۳\times ۴ \Rightarrow AH=۲/۴$

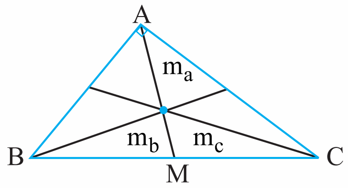
$\overset{\Delta}{AHM}: AM^{۲}=AH^{۲}+HM^{۲} \Rightarrow ۶/۲۵=۵/۷۶+HM^{۲}$

$\Rightarrow HM^{۲}=۰/۴۹ \Rightarrow HM=۰/۷$

$\sin\alpha=\frac{HM}{AM} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۰/۷}{۲/۵} \Rightarrow \sin\alpha=۰/۲۸$

۷- گزینه «۴» آسان

روش اول: چون $(2\sqrt{3})^2+(2)^2=(4)^2$ است بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات دو میانه وارد بر اضلاع قائمه، ۵ برابر مربع میانه وارد بر وتر است و میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.



$$\underbrace{m_a^2+m_b^2}_{5m_a^2}+m_c^2=6m_a^2=6\left(\frac{a}{2}\right)^2=6\left(\frac{4}{2}\right)^2=24$$

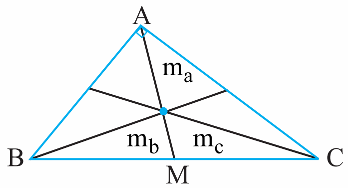
روش دوم:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(16+4+12)=\frac{3}{4}\times 32=24$$

۸- گزینه «۳» متوسط

در مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات دو میانه وارد بر اضلاع قائمه، ۵ برابر مربع میانه وارد بر وتر است و میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.



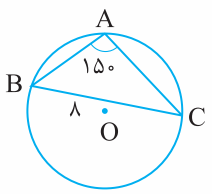
$$m_b^2+m_c^2=5m_a^2 \Rightarrow (2\sqrt{5})^2+(\sqrt{15})^2=5m_a^2$$

$$\Rightarrow 20+15=5m_a^2 \Rightarrow m_a^2=7 \Rightarrow m_a=\sqrt{7}$$

$$a=2m_a \Rightarrow a=2\sqrt{7}$$

۹- گزینه «۳» آسان

در هر مثلث اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن برابر قطر دایره محیطی است.

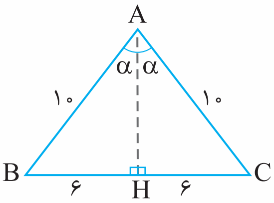


$$\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 150}=2R \Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{2}}=2R$$

$$\Rightarrow 2R=16 \Rightarrow R=8$$

۱۰- گزینه «۲» دشوار

می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر قاعده مثلث بر هم منطبق هستند. چنانچه $\hat{A}=2\alpha$ فرض شود، ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم و داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: AB^2=BH^2+AH^2 \Rightarrow 100=36+AH^2$$

$$\Rightarrow AH^2=64 \Rightarrow AH=8$$

$$\sin\alpha=\frac{BH}{AB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha=\frac{AH}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

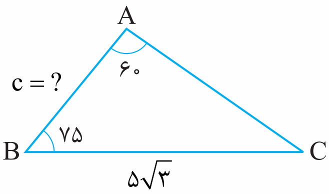
می‌دانیم $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ است پس داریم:

$$\sin A=2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

در هر مثلث اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن برابر قطر دایره محیطی است.

$$\frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{12}{\frac{24}{25}}=2R \Rightarrow 12/5=2R \Rightarrow R=6/25$$

۱۱- گزینه «۴» آسان



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \Rightarrow 60+75+\hat{C}=180 \Rightarrow \hat{C}=45^\circ$$

بنا به قضیه **sin**ها داریم:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow 5=\frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow c=5\sqrt{2}$$

۱۲- گزینه «۱» متوسط

$$\sin \text{ قضیه}: \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\frac{63}{65}}=\frac{b}{\frac{5}{13}}=\frac{c}{\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{65}{63}a=\frac{13}{5}b=\frac{5}{4}c=65k \Rightarrow \begin{cases} a=63k \\ b=25k \\ c=52k \end{cases}$$

$$2p=a+b+c \Rightarrow 280=63k+25k+52k$$

$$\Rightarrow 280=140k \Rightarrow k=2$$

$$a-b=63k-25k=38k=38(2)=76$$

۱۳- گزینه «۱» متوسط

قضیه سینوس‌ها : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$

$$\xrightarrow{\hat{A}=۹۰^\circ} \frac{۹}{۱}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R \Rightarrow \begin{cases} ۹=۲R \\ b=۲R\sin B=۹\sin B \\ c=۲R\sin C=۹\sin C \end{cases}$$

$$۲p=a+b+c=۹+۹\sin B+۹\sin C$$

$$=۹+۹(\sin B+\sin C)=۹+۹(\frac{۴}{۳})=۹+۱۲=۲۱$$

۱۴- گزینه «۱» متوسط

نکته: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k$

قضیه سینوس : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۰/۱}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{۰/۱}{\sin A}=\frac{b+c}{۵(b+c)} \Rightarrow \frac{۰/۱}{\sin A}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \sin A=۰/۵$$

$$\xrightarrow{A<۹۰} \hat{A}=۳۰^\circ$$

۱۵- گزینه «۲» متوسط

روش اول:

$$S=\pi R^۲ \Rightarrow ۳۶\pi=\pi R^۲ \Rightarrow R^۲=۳۶ \Rightarrow R=۶$$

قضیه سینوس : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R=۱۲$

$$\Rightarrow a=۱۲\sin A \;,\; b=۱۲\sin B \;,\; c=۱۲\sin C$$

$$۲p=a+b+c \Rightarrow ۱۶=۱۲\sin A+۱۲\sin B+۱۲\sin C$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} \sin A+\sin B+\sin C=\frac{۴}{۳}$$

روش دوم:

نکته:

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}(\text{نصف محیط } p)$$

با توجه به اینکه شعاع دایره محیطی $R=۶$ است و $p=۸ \Leftarrow ۲p=۱۶$

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

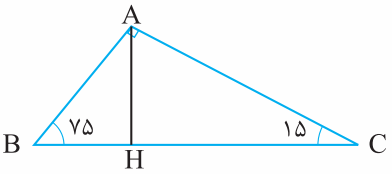
۱۶- گزینه «۴» آسان

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R} \Rightarrow \frac{۴}{۳}=\frac{p}{۴} \Rightarrow p=\frac{۱۶}{۳}$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از دستور $r=\frac{S}{p}$ به‌دست می‌آید.

$$r=\frac{S}{p}=\frac{۱۶}{\frac{۱۶}{۳}} \Rightarrow r=۳$$

۱۷- گزینه «۳» دشوار



$$\sin^۲ A+\cos^۲ B+\cos^۲ C=۲ \Rightarrow \sin^۲ A+۱-\sin^۲ B+۱-\sin^۲ C=۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ A=\sin^۲ B+\sin^۲ C$$

قضیه سینوس : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$

$$\Rightarrow \sin A=\frac{a}{۲R} \;,\; \sin B=\frac{b}{۲R} \;,\; \sin C=\frac{c}{۲R}$$

$$\sin^۲ A=\sin^۲ B+\sin^۲ C \Rightarrow \frac{a^۲}{۴R^۲}=\frac{b^۲}{۴R^۲}+\frac{c^۲}{۴R^۲}$$

$$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۹۰+۵\hat{C}+\hat{C}=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۶\hat{C}=۹۰ \Rightarrow \hat{C}=۱۵ \;,\; \hat{B}=۷۵$$

می‌دانیم اگر زاویه‌های حاده یک مثلث قائم الزاویه ۱۵ و ۷۵ باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است پس داریم:

$$AH=\frac{۱}{۴}BC=\frac{۱}{۴}\times ۱۲ \Rightarrow AH=۳$$

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۱۲=۱۸$$

۱۸- گزینه «۳» متوسط

$$\sin^۲ A+\sin^۲ B=\cos^۲ C \Rightarrow \sin^۲ A+\sin^۲ B=۱-\sin^۲ C$$

$$\Rightarrow \sin^۲ A+\sin^۲ B+\sin^۲ C=۱ \quad (۱)$$

قضیه سینوس‌ها : $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$

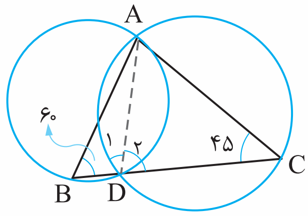
$$\Rightarrow \frac{a^۲}{\sin^۲ A}=\frac{b^۲}{\sin^۲ B}=\frac{c^۲}{\sin^۲ C}=۴R^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a^۲+b^۲+c^۲}{\sin^۲ A+\sin^۲ B+\sin^۲ C}=۴(۵)^۲ \xrightarrow{(۱)} \frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۱}=۱۰۰$$

$$\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۱۰۰$$

۱۹- گزینه «۴» دشوار

A را به **D** وصل می‌کنیم چون دو زاویه $D_۱$ و $D_۲$ مکملند پس $\sin D_۱ = \sin D_۲$.



$$\overset{\Delta}{ADB}: \frac{AB}{\sin D_۱} = ۲R_۱ \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AC}{\sin D_۲} = ۲R_۲ \quad (۲)$$

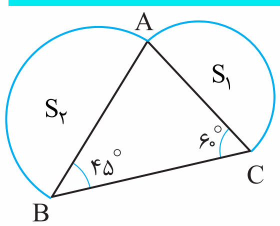
اگر رابطه (۲) را به رابطه (۱) تقسیم کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AC}{AB}=\frac{R_۲}{R_۱}\\ \overset{\Delta}{ABC}\ \text{در قضیه sin}: \frac{AC}{\sin ۶۰}=\frac{AB}{\sin ۴۵} \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{\sin ۶۰}{\sin ۴۵}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_۲}{R_۱}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

$$\frac{S_{\text{دایره محیطی}\ ADC}}{S_{\text{دایره محیطی}\ ADB}} = \frac{\pi R_۲^۲}{\pi R_۱^۲} = \left(\frac{R_۲}{R_۱}\right)^۲ = \frac{۳}{۲}$$

۲۰- گزینه «۲» آسان

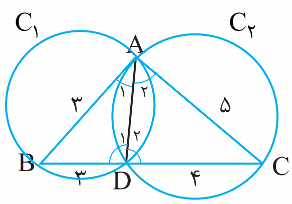


$$\text{طبق قضیه sinها}: \frac{AB}{\sin ۶۰} = \frac{AC}{\sin ۴۵} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{\frac{۱}{۲}\pi(\frac{AB}{۲})^۲}{\frac{۱}{۲}\pi(\frac{AC}{۲})^۲} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^۲ = \left(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۳}{۲}$$

۲۱- گزینه «۲» دشوار

دایره‌های محیطی دو مثلث **ABD** و **ADC** را رسم می‌کنیم، چون دو زاویه $\hat{D}_۱$ و $\hat{D}_۲$ مکمل پس $\sin\hat{D}_۱ = \sin\hat{D}_۲$.



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}: \frac{AB}{\sin D_۱} = ۲R_۱ \Rightarrow \frac{۳}{\sin D_۱} = ۲R_۱\\ \overset{\Delta}{ABD}: \frac{AC}{\sin D_۲} = ۲R_۲ \Rightarrow \frac{۵}{\sin D_۲} = ۲R_۲\end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{\frac{۳}{\sin D_۱}}{\frac{۵}{\sin D_۲}} = \frac{۲R_۱}{۲R_۲}$$

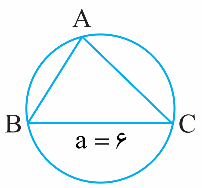
$$\xrightarrow{\sin\hat{D}_۱=\sin\hat{D}_۱} \frac{۳}{۵} = \frac{R_۱}{R_۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{BD}{\sin A_۱} = ۲R_۱ \Rightarrow \sin A_۱ = \frac{۳}{۲R_۱}$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{DC}{\sin A_۲} = ۲R_۲ \Rightarrow \sin A_۲ = \frac{۴}{۲R_۲}$$

$$\frac{\sin A_۲}{\sin A_۱} = \frac{\frac{۴}{۲R_۲}}{\frac{۳}{۲R_۱}} = \frac{۸R_۱}{۶R_۲} = \frac{۸}{۶} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۴}{۵}$$

۲۲- گزینه «۱» آسان



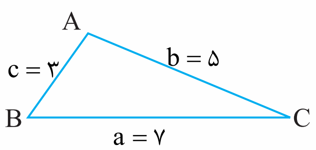
$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{۶}{\sin A} = ۲R \Rightarrow R = \frac{۳}{\sin A}$$

چون **R** با $\sin A$ رابطه معکوس دارد، هر چه $\sin A$ مقدار بیشتری باشد، **R** کوچکتر است و حداکثر مقدار $\sin A$ برابر ۱ است پس:

$$R_{max} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

۲۳- گزینه «۴» آسان

همواره در هر مثلث، بزرگ‌ترین زاویه، روبه‌رو بزرگ‌ترین ضلع مثلث است پس داریم:



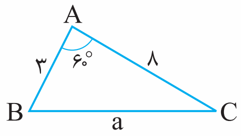
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ + ۹ - ۲(۵)(۳)\cos A$$

$$\Rightarrow ۴۹ = ۳۴ - ۳۰\cos A \Rightarrow ۳۰\cos A = -۱۵$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۱۲۰°$$

۲۴- گزینه «۳» آسان

طبق قضیه cosها داریم:

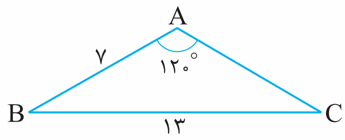


$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \cdot AC\cos A$$

$$a^۲ = ۹ + ۶۴ - ۲(۳)(۸)(\frac{۱}{۲}) = ۹ + ۶۴ - ۲۴ = ۴۹ \Rightarrow a = ۷$$

$$۲p = a + b + c = ۷ + ۸ + ۳ = ۱۸$$

۲۵- گزینه «۳» دشوار



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow ۱۶۹ = b^۲ + ۴۹ - ۲b(۷)(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow ۱۶۹ = b^۲ + ۷b + ۴۹ \Rightarrow b^۲ + ۷b - ۱۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (b + ۱۵)(b - ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = -۱۵ & \text{غ ق ق} \\ b = ۸ \end{cases}$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه $r = \frac{S}{p}$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

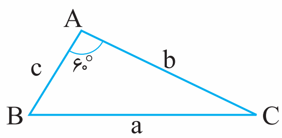
$$۲p = a + b + c \Rightarrow ۲p = ۱۳ + ۸ + ۷ = ۲۸ \Rightarrow p = ۱۴$$

$$S = \frac{۱}{۲}bc\sin A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۷ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow S = ۱۴\sqrt{۳}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{۱۴\sqrt{۳}}{۱۴} \Rightarrow r = \sqrt{۳}$$

۲۶- گزینه «۴» متوسط

مسافتی که یک متحرک با سرعت **v** در مدت **t** طی می‌کند، برابر $\Delta x = vt$



$$c = ۵۰ \times ۲ = ۱۰۰$$

$$b = ۸۰ \times ۲ = ۱۶۰$$

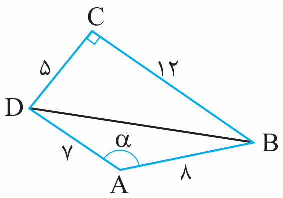
بنا به قضیه cosها داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۲۵۶۰۰ + ۱۰۰۰۰ - ۲(۱۶۰)(۱۰۰)(\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۹۶۰۰ \Rightarrow a = ۱۴۰$$

۲۷- گزینه «۳» دشوار

قطر **BD** را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{BDC}: BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹ \Rightarrow BD = ۱۳$$

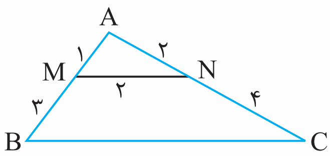
در مثلث **ADB** بنا به قضیه cosها داریم:

$$BD^۲ = AD^۲ + AB^۲ - ۲AD \cdot AB\cos\alpha$$
$$\Rightarrow ۱۶۹ = ۴۹ + ۶۴ - ۲(۷)(۸)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۱۲\cos\alpha = -۵۶ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۸- گزینه «۱» متوسط

در مثلث **AMN** بنا به قضیه cosها داریم:



$$MN^۲ = AM^۲ + AN^۲ - ۲AM \cdot AN\cos A \Rightarrow ۴ = ۱ + ۴ - ۲(۱)(۲)\cos A$$

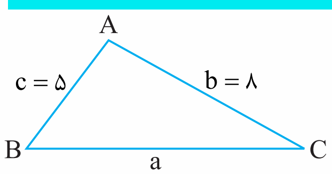
$$\Rightarrow ۴\cos A = ۱ \Rightarrow \cos A = \frac{۱}{۴}$$

در مثلث **ABC** بنا به قضیه cosها داریم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \cdot AC\cos A \Rightarrow BC^۲ = ۱۶ + ۳۶ - ۲(۴)(۶)(\frac{۱}{۴})$$

$$= ۱۶ + ۳۶ - ۱۲ = ۴۰ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰}$$

۲۹- گزینه «۲» متوسط



$$S = \frac{۱}{۲}bc\sin A \Rightarrow ۱۶ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۵ \times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{۴}{۵}$$

چون **a** ضلع متوسط است پس **A** زاویه متوسط است و می‌دانیم در هر مثلث، زاویه کوچک و متوسط حتماً حاده هستند ($A < ۹۰$)

$$\cos^۲ A = ۱ - \sin^۲ A = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \xrightarrow{\cos A > ۰} \cos A = \frac{۳}{۵}$$

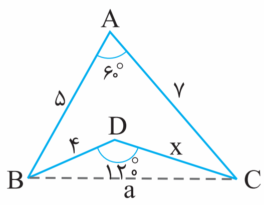
بنا به قضیه cosها داریم:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۶۴ + ۲۵ - ۲(۸)(۵)(\frac{۳}{۵})$$

$$= ۶۴ + ۲۵ - ۴۸ = ۴۱ \Rightarrow a = \sqrt{۴۱}$$

۳۰- گزینه «۱» دشوار

B را به **C** وصل می‌کنیم.



$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 + 49 - 2(5)(7)(\frac{1}{2}) \Rightarrow a^2 = 39 \Rightarrow a = \sqrt{39}$$

در مثلث **BDC** داریم:

$$a^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD.DC\cos D$$

$$\Rightarrow 39 = 16 + x^2 - 2(4)(x)(-\frac{1}{2}) \Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(-23) = 16 + 92 = 108 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-4 \mp 6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 - 3\sqrt{3} & \text{غ ق ق} \\ x = -2 + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

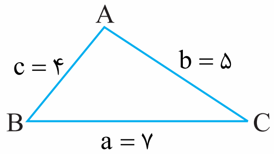
پس داریم:

$$x + 2 = -2 + 3\sqrt{3} + 2 = 3\sqrt{3}$$

۳۱- گزینه «۱» آسان

می‌دانیم در هر مثلث، بزرگ‌ترین زاویه، روبه‌رو بزرگ‌ترین ضلع مثلث است

پس داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 49 = 25 + 16 - 2(4)(5)\cos A$$

$$\Rightarrow 8 = -40\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{-1}{5}$$

۳۲- گزینه «۳» متوسط

$$a^3 - c^3 = b^2(a-c) \Rightarrow (a-c)(a^2 + ac + c^2) = b^2(a-c)$$

$$\Rightarrow a^2 + ac + c^2 = b^2$$

بنا به قضیه **cos**ها داریم: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ پس داریم:

$$a^2 + ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow ac = -2ac\cos B$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{-1}{2} \Rightarrow B = 120^\circ$$

۳۳- گزینه «۲» متوسط

$$b^3 - a^2c = a^2b - c^3 \Rightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$$

$$\Rightarrow (b+c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b+c) \Rightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2$$

بنا به قضیه **cos**ها داریم: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$b^2 - bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow 2bc\cos A = bc$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

۳۴- گزینه «۴» دشوار

$$\frac{b^2 - c^2}{a - c} = a \Rightarrow b^2 - c^2 = a(a-c) \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - ac$$

بنا به قضیه **cos**ها داریم: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ پس داریم:

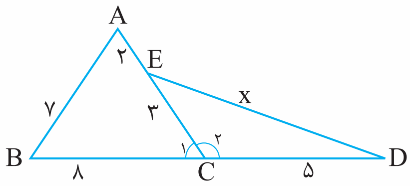
$$a^2 + c^2 - 2ac\cos B = a^2 + c^2 - ac \Rightarrow 2ac\cos B = ac$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60$$

$$\frac{S}{ac} = \frac{\frac{1}{2}ac\sin B}{ac} = \frac{1}{2}\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۳۵- گزینه «۲» دشوار

بنا به قضیه **cos**ها در مثلث **ABC** داریم:



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos C_1$$

$$\Rightarrow 49 = 25 + 64 - 2(5)(8)\cos C_1$$

$$\Rightarrow 80\cos C_1 = 40 \Rightarrow \cos C_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = 60$$

$$C_1 + C_2 = 180 \Rightarrow 60 + C_2 = 180 \Rightarrow C_2 = 120$$

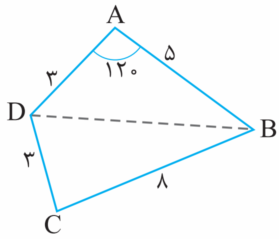
در مثلث **ECD** بنا به قضیه **cos**ها داریم:

$$ED^2 = EC^2 + DC^2 - 2EC.CD.\cos C_2$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 + 25 - 2(3)(5)(-\frac{1}{2}) \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

۳۶- گزینه «۳» — متوسط

قطر **BD** را رسم می‌کنیم. در مثلث **ADB** بنا به قضیه **cos**ها داریم:



$$BD^۲ = AD^۲ + AB^۲ - ۲AD.AB.\cos A$$

$$\Rightarrow BD^۲ = ۹ + ۲۵ - ۲(۳)(۵)(-\frac{۱}{۲}) = ۴۹ \Rightarrow BD = ۷$$

در مثلث **BCD** بنا به قضیه **cos**ها داریم:

$$BD^۲ = DC^۲ + BC^۲ - ۲DC.BC.\cos C \Rightarrow ۴۹ = ۹ + ۶۴ - ۲(۳)(۸)\cos C$$

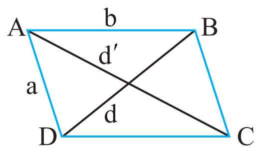
$$\Rightarrow ۴۸\cos C = ۲۴ \Rightarrow \cos C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow C = ۶۰^\circ$$

$$S = S_{\overset{\triangle}{ADB}} + S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}AD \times AB \times \sin A + \frac{۱}{۲}DC \times BC \times \sin C$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۲۴\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۳۹\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۷- گزینه «۳» — آسان

در متوازی‌الاضلاع به اضلاع **a** و **b** و قطرهای **d** و d' داریم:

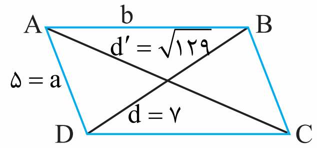


$$d^۲ + d'^۲ = ۲a^۲ + ۲b^۲ \Rightarrow d^۲ + (۲\sqrt{۱۰})^۲ = ۲(۶)^۲ + ۲(۴)^۲$$

$$\Rightarrow d^۲ + ۴۰ = ۷۲ + ۳۲ \Rightarrow d^۲ = ۶۴ \Rightarrow d = ۸$$

۳۸- گزینه «۴» — دشوار

در متوازی‌الاضلاع رابطه $d^۲ + d'^۲ = ۲a^۲ + ۲b^۲$ برقرار است، پس داریم:



$$(\sqrt{۱۲۹})^۲ + (۷)^۲ = ۲(۵)^۲ + ۲b^۲ \Rightarrow ۱۲۹ + ۴۹ = ۵۰ + ۲b^۲$$

$$\Rightarrow ۲b^۲ = ۱۲۸ \Rightarrow b^۲ = ۶۴ \Rightarrow b = ۸$$

در مثلث **ABD** بنا به قضیه **cos**ها داریم:

$$d^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos A \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ + ۶۴ - ۲(۵)(۸)\cos A$$

$$\Rightarrow ۸۰\cos A = ۴۰ \Rightarrow \cos A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A = ۶۰$$

$$S = ab\sin A = ۵ \times ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow S = ۲۰\sqrt{۳}$$

۳۹- گزینه «۳» — آسان

می‌دانیم اگر همه زاویه‌های مثلث حاده باشند، نقطه همرسی ارتفاع‌ها درون مثلث است، اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، نقطه همرسی ارتفاع‌ها روی رأس قائمه است و اگر مثلث منفرجه داشته باشد، نقطه همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث است و در هر مثلث دو زاویه کوچکتر همواره حاده هستند و زاویه بزرگتر روبه‌رو ضلع بزرگ‌تر است.

در این مثلث اگر $c = ۷$ و $b = ۹$ و $a = ۱۳$ باشد، زاویه **A** بزرگ‌ترین زاویه مثلث است و چون $a^۲ > b^۲ + c^۲$ است ($۱۶۹ > ۸۱ + ۴۹$) پس $A > ۹۰$، بنابراین نقطه همرسی ارتفاع‌ها خارج از مثلث است.

۴۰- گزینه «۲» — دشوار

مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل تلاقی عمودمنصف‌های آن است و اگر در مثلثی همه زاویه‌ها حاده باشند این نقطه داخل مثلث است و اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، این نقطه وسط وتر و اگر مثلث منفرجه‌الزاویه باشد، این نقطه خارج مثلث است.

با فرض $h_a = ۳$ و $h_{b=۴}$ و $h_b = ۴$ و $h_c = ۵$ داریم:

$$S = \frac{ah_a}{۲} \Rightarrow a = \frac{۲S}{h_a}$$

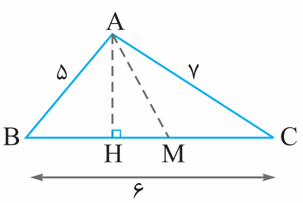
به همین ترتیب $b = \frac{۲S}{h_b}$ و $c = \frac{۲S}{h_c}$ است بنابراین $a = \frac{۲S}{۳}$ و $b = \frac{۲S}{۴}$ و $c = \frac{۲S}{۵}$ است (**a** بزرگ‌ترین ضلع مثلث است)

$$\left.\begin{aligned} a^۲ &= \frac{۴S^۲}{۹} = \frac{۴۰۰S^۲}{۹۰۰} \\ b^۲ + c^۲ &= \frac{S^۲}{۴} + \frac{۴S^۲}{۲۵} = \frac{۴۱S^۲}{۱۰۰} = \frac{۳۶۹S^۲}{۹۰۰} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

بنابراین مرکز دایره محیطی مثلث خارج از مثلث است.

۴۱- — آسان

بنا به قضیه کسینوس‌ها:



$$\overset{\triangle}{ABC} : b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ + ۳۶$$

$$۲(۵)(۶)\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{۱}{۵}$$

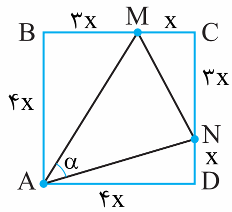
$$\overset{\triangle}{ABH} : \cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{۱}{۵} \Rightarrow BH = ۱ \quad (I)$$

$$BM = \frac{BC}{۲} \Rightarrow BM = ۳ \quad (II)$$

$$BM = BH + HM \xrightarrow{(I),(II)} HM = ۲$$

۴۲- گزینه «۱» — دشوار

اگر هر ضلع مربع را برابر $۴x$ فرض کنیم $BM = NC = ۳x$ و $ND = MC = x$ است.



$$\overset{\Delta}{ABM}: AM^{۲} = AB^{۲} + BM^{۲} = ۱۶x^{۲} + ۹x^{۲} = ۲۵x^{۲} \Rightarrow AM = ۵x$$

$$\overset{\Delta}{MCN}: MN^{۲} = MC^{۲} + NC^{۲} = x^{۲} + ۹x^{۲} = ۱۰x^{۲} \Rightarrow MN = x\sqrt{۱۰}$$

$$\overset{\Delta}{ADN}: AN^{۲} = ND^{۲} + AD^{۲} = x^{۲} + ۱۶x^{۲} = ۱۷x^{۲} \Rightarrow AN = x\sqrt{۱۷}$$

بنا به قضیه **cos**ها در مثلث **AMN** داریم:

$$MN^{۲} = AM^{۲} + AN^{۲} - ۲AM.AN\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۰x^{۲} = ۲۵x^{۲} + ۱۷x^{۲} - ۲(۵x)(x\sqrt{۱۷})\cos\alpha$$

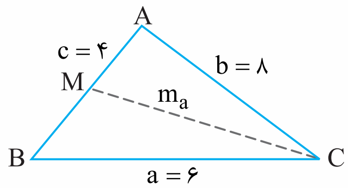
$$\Rightarrow ۱۰x^{۲}\sqrt{۱۷}\cos\alpha = ۳۲x^{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱۶}{۵\sqrt{۱۷}} \Rightarrow \alpha < ۹۰$$

$$\Rightarrow \tan\alpha > ۰ \Rightarrow ۱ + \tan^{۲}\alpha = \frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$\Rightarrow ۱ + \tan^{۲}\alpha = \frac{۲۵\times۱۷}{۲۵۶} \Rightarrow \tan^{۲}\alpha = \frac{۱۶۹}{۲۵۶} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱۳}{۱۶}$$

۴۳- گزینه «۲» — آسان

بنا به قضیه میانه‌ها داریم:

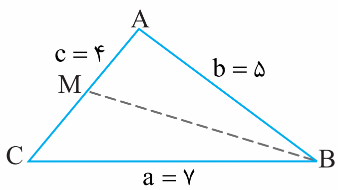


$$a^{۲} + b^{۲} = ۲m_c^{۲} + \frac{c^{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۶ + ۶۴ = ۲m_a^{۲} + ۸$$

$$\Rightarrow ۲m_a^{۲} = ۹۲ \Rightarrow m_a^{۲} = ۴۶ \Rightarrow m_a = \sqrt{۴۶}$$

۴۴- گزینه «۴» — آسان

همواره بزرگ‌ترین میانه به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود و بنا به قضیه میانه‌ها داریم:

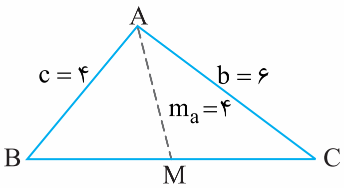


$$a^{۲} + b^{۲} = ۲m_c^{۲} + \frac{c^{۲}}{۲} \Rightarrow ۴۹ + ۲۵ = ۲m_c^{۲} + ۸$$

$$\Rightarrow ۲m_c^{۲} = ۶۶ \Rightarrow m_c^{۲} = ۳۳ \Rightarrow m_c = \sqrt{۳۳}$$

۴۵- گزینه «۲» — آسان

بنا به قضیه میانه‌ها در مثلث داریم:



$$b^{۲} + c^{۲} = ۲m_a^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow ۳۶ + ۱۶ = ۳۲ + \frac{a^{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{۲}}{۲} = ۲۰ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۱۰}$$

بنا به قضیه **cos**ها داریم:

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A \Rightarrow ۴۰ = ۳۶ + ۱۶ - ۲(۶)(۴)\cos A$$

$$\Rightarrow ۴۸\cos A = ۱۲ \Rightarrow \cos A = \frac{۱}{۴}$$

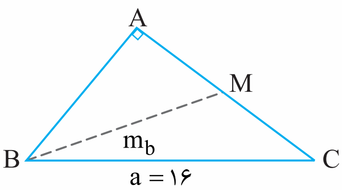
۴۶- گزینه «۳» — متوسط

$$\left.\begin{array}{l} b^{۲} + c^{۲} = ۲m_a^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \\ b^{۲} + c^{۲} = \frac{۳}{۴}a^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۳}{۴}a^{۲} = ۲m_a^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۴}a^{۲} = ۲m_a^{۲}$$

$$\Rightarrow a^{۲} = ۸m_a^{۲} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۲}m_a \Rightarrow \frac{m_a}{a} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۴۷- گزینه «۴» — متوسط

می‌دانیم فقط در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر (نصف ضلع وارد شده بر آن) است پس مثلث، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با وتر ۱۶ است.



$$AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲} \xrightarrow{AB=AC} ۲AB^{۲} = ۲۵۶$$

$$\Rightarrow AB^{۲} = ۱۲۸ \Rightarrow AB = AC = ۸\sqrt{۲}$$

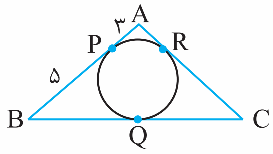
بنا به قضیه میانه‌ها داریم:

$$a^{۲} + c^{۲} = ۲m_b^{۲} + \frac{b^{۲}}{۲} \Rightarrow ۲۵۶ + ۱۲۸ = ۲m_b^{۲} + ۶۴$$

$$\Rightarrow ۲m_b^{۲} = ۳۲۰ \Rightarrow m_b^{۲} = ۱۶۰ \Rightarrow m_b = ۴\sqrt{۱۰}$$

۴۸- گزینه «۱» — آسان

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد، که طول مماس‌ها با هم برابر هستند، پس داریم:



$$BP = BQ = ۵ \Rightarrow QC = BC - BQ = ۹ - ۵ = ۴$$

$$AP = AR = ۳ \;,\; CR = CQ = ۴$$

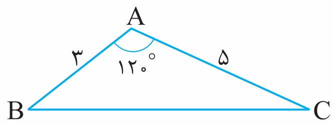
پس $AB = c = ۸$ و $BC = a = ۹$ و $AC = b = ۷$ است که بنا به قضیه میانه‌ها داریم:

$$a^۲ + b^۲ = ۲m_c^۲ + \frac{c^۲}{۲} \Rightarrow ۸۱ + ۴۹ = ۲m_c^۲ + ۳۲$$

$$\Rightarrow ۲m_c^۲ = ۹۸ \Rightarrow m_c^۲ = ۴۹ \Rightarrow m_c = ۷$$

۴۹- گزینه «۴» — متوسط

بنا به قضیه cosها داریم:



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۹ + ۲۵ - ۲(۳)(۵)(-\frac{۱}{۲}) = ۴۹$$

$$\Rightarrow a = ۷$$

حال از قضیه میانه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۲۵ + ۹ = ۲m_a^۲ + \frac{۴۹}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲m_a^۲ = \frac{۱۹}{۲} \Rightarrow m_a^۲ = \frac{۱۹}{۴} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{۱۹}}{۲}$$

۵۰- گزینه «۳» — دشوار

بنا به قضیه میانه‌ها داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲} = ۲m_a^۲$$

$$\Rightarrow ۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲ = ۴m_a^۲$$

$$۴m_a^۲ + ۲\sqrt{۲}bc = a^۲ \Rightarrow ۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲ + ۲\sqrt{۲}bc = a^۲$$

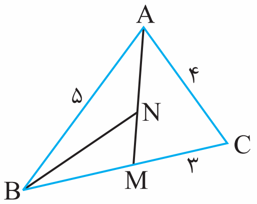
$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ + \sqrt{۲}bc = a^۲$$

$$\xrightarrow{\text{قضیه کسینوس}} b^۲ + c^۲ + \sqrt{۲}bc = b^۲ + c^۲ - ۲bc \cdot \cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۱۳۵$$

۵۱- گزینه «۲» — دشوار

ابتدا به کمک قضیه میانه‌ها طول میانه **AM** را در مثلث **ABC** حساب می‌کنیم.



$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۱۶ + ۲۵ = ۲m_a^۲ + ۱۸$$

$$\Rightarrow ۲۳ = ۲m_a^۲ \Rightarrow m_a^۲ = \frac{۲۳}{۲} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{۴۶}}{۲}$$

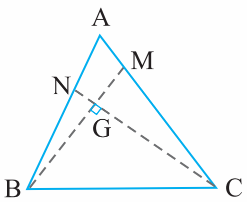
در مثلث **ABM**، طول میانه **BN** را محاسبه می‌کنیم.

$$AB^۲ + BM^۲ = ۲BN^۲ + \frac{AM^۲}{۲} \Rightarrow ۲۵ + ۹ = ۲BN^۲ + \frac{۲۳}{۴}$$

$$۲BN^۲ = \frac{۱۱۳}{۴} \Rightarrow BN^۲ = \frac{۱۱۳}{۸} \Rightarrow BN = \frac{\sqrt{۱۱۳}}{۲\sqrt{۲}} \Rightarrow BN = \frac{\sqrt{۲۲۶}}{۴}$$

۵۲- گزینه «۴» — دشوار

می‌دانیم اگر **G** نقطه تلاقی میانه‌ها باشد:



$$\frac{CG}{CN} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{CG}{۴/۵} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow CG = ۳$$

اگر ۳ میانه یک مثلث را رسم کنیم، ۶ مثلث هم مساحت داریم پس مساحت مثلث **BGC** برابر $\frac{۲}{۶}$ مساحت مثلث **ABC** است.

$$S_{\underset{BGC}{\triangle}} = \frac{۱}{۳} S_{\underset{ABC}{\triangle}} = \frac{۱}{۳} \times ۱۸ = ۶$$

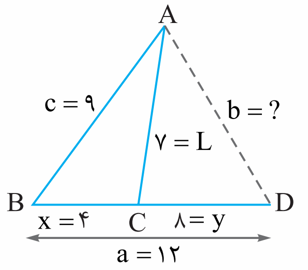
$$S_{\underset{BGC}{\triangle}} = \frac{۱}{۲} BG \times CG \Rightarrow ۶ = \frac{۱}{۲} \times BG \times ۳ \Rightarrow BG = ۴$$

$$\frac{BG}{BM} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۴}{BM} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow BM = ۶$$

$$\frac{BM}{CN} = \frac{۶}{۴/۵} = \frac{۴}{۳}$$

۵۳- گزینه «۱» **متوسط**

بنا به قضیه استوارت داریم:

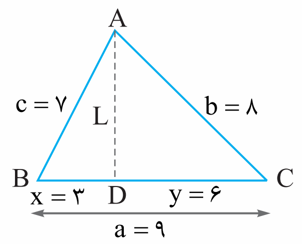


$$xb^2+yc^2=a(L^2+xy) \Rightarrow 4b^2+8(9)^2=12((7)^2+4(8))$$

$$\xrightarrow{\div 4} b^2+162=3(49+32) \Rightarrow b^2=81 \Rightarrow b=9$$

۵۴- گزینه «۲» **متوسط**

بنا به قضیه استوارت داریم:



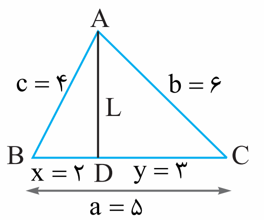
$$xb^2+yc^2=a(L^2+xy) \Rightarrow 3(8)^2+6(7)^2=9(L^2+3\times 6)$$

$$\xrightarrow{\div 3} 64+98=3(L^2+18) \Rightarrow 162=3(L^2+18)$$

$$\xrightarrow{\div 3} L^2+18=54 \Rightarrow L^2=36 \Rightarrow L=6$$

۵۵- گزینه «۴» **متوسط**

بنا به قضیه استوارت داریم:



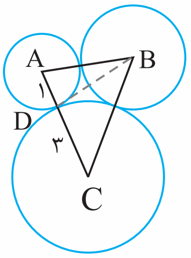
$$xb^2+yc^2=a(L^2+xy) \Rightarrow 2(6)^2+3(4)^2=5(L^2+2\times 3)$$

$$\Rightarrow 120=5(L^2+6) \xrightarrow{\div 5} L^2+6=24$$

$$\Rightarrow L^2=18 \Rightarrow L=3\sqrt{2}$$

۵۶- گزینه «۲» **دشوار**

اگر **A** و **B** و **C** را به ترتیب مراکز دایره کوچک و متوسط و بزرگ تصور کنیم چون دایره‌ها دو به دو مماس خارج هستند پس طول اضلاع مثلث که برابر فاصله مراکز دو دایره است برابر مجموع دو شعاع از دایره‌ها می‌شود، به طوری که داریم: $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$ و اگر **D** نقطه تقاطع دایره کوچک و بزرگ باشد، $AD=1$ و $DC=3$ است و بنا به قضیه استوارت داریم:



$$AD\cdot BC^2+DC\times AB^2=AC(BD^2+AD\cdot DC)$$

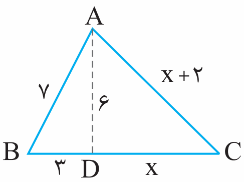
$$\Rightarrow 1(5)^2+3(3)^2=4(BD^2+3)$$

$$\Rightarrow 52=4(BD^2+3) \xrightarrow{\div 4} BD^2+3=13$$

$$\Rightarrow BD^2=10 \Rightarrow BD=\sqrt{10}$$

۵۷- گزینه «۳» **متوسط**

بنا به قضیه استوارت داریم:



$$BD^2\cdot AC+DC\cdot AB=BC(AD^2+BD\cdot DC)$$

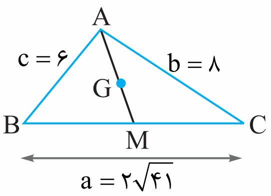
$$\Rightarrow 3(x+2)^2+x(7)^2=(3+x)(36+3x)$$

$$\Rightarrow 3x^2+12x+12+49x=108+9x+36x+3x^2$$

$$\Rightarrow 16x=96 \Rightarrow x=6$$

۵۸- گزینه «۱» **متوسط**

طبق قضیه میانه‌ها داریم:



$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2} \Rightarrow 64+36=2m_a^2+\frac{4\times 41}{2}$$

$$\Rightarrow 2m_a^2=18 \Rightarrow m_a^2=9 \Rightarrow m_a=3$$

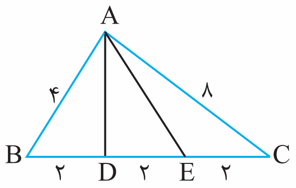
می‌دانیم اگر نقطه **G** مرکز ثقل مثلث (تلاقی میانه‌ها) باشد $\frac{GM}{AM}=\frac{1}{3}$ است

پس داریم:

$$\frac{GM}{AM}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GM}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow GM=1$$

۵۹- گزینه «۴» — دشوار

طبق قضیه میانه‌ها داریم:



$$\overset{\Delta}{ABE}: AB^2+AE^2=2AD^2+\frac{BE^2}{2} \Rightarrow 16+AE^2=2AD^2+8$$

$$\Rightarrow 2AD^2-AE^2=8 \quad (1)$$

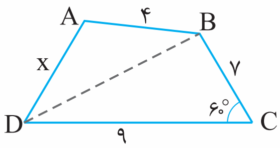
$$\overset{\Delta}{ADC}: AD^2+AC^2=2AE^2+\frac{DC^2}{2} \Rightarrow AD^2+64=2AE^2+8$$

$$\Rightarrow 2AE^2-AD^2=56 \quad (2)$$

رابطه (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم. $AD^2+AE^2=64$

۶۰- گزینه «۲» — دشوار

چون چهارضلعی قابل محاط شدن، زاویه‌های روبه‌رو مکملند پس:



$$\hat{A}+\hat{C}=180 \Rightarrow \hat{A}+60=180 \Rightarrow \hat{A}=120$$

قطر **BD** را رسم می‌کنیم بنا به قضیه **cos**ها در مثلث **BDC** داریم:

$$BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cos C$$

$$\Rightarrow BD^2=49+81-2(7)(9)(\frac{1}{2}) \Rightarrow BD^2=67 \Rightarrow BD=\sqrt{67}$$

بنا به قضیه **cos**ها در مثلث **ABD** داریم:

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$$

$$\Rightarrow 67=16+x^2-2(4)(x)(-\frac{1}{2}) \Rightarrow x^2+4x-51=0$$

$$\Delta=(4)^2-4(1)(-51)=220 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=2\sqrt{55}$$

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-4\mp2\sqrt{55}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-\sqrt{55} & \text{غ ق ق} \\ x=-2+\sqrt{55} \end{cases}$$

$$x+2=-2+\sqrt{55}+2=\sqrt{55}$$

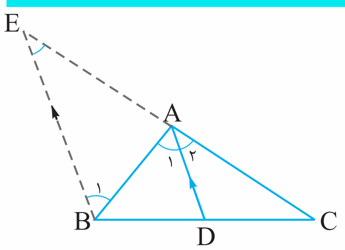
پاسخنامه سؤالات تشریحی

بخش ۲

۱- آسان

آ) نادرست ب) درست پ) درست

۲- دشوار



فرض : $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

حکم : $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

از **B** موازی **AD** رسم می‌کنیم تا امتداد **AC** را در نقطه **E** قطع کند.

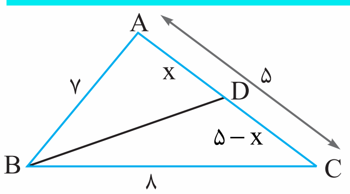
$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BE \ ,\ \text{مورب } AB \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A}_1=\hat{B}_1 \\ AD \parallel BE \ ,\ \text{مورب } EC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A}_2=\hat{E} \\ \text{فرض}: \hat{A}_1=\hat{A}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{E}$$

$$\overset{\Delta}{BEA}: \hat{B}_1=\hat{E} \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} AE=AB \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{ECB}: AD \parallel EC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AC}{AE}=\frac{DC}{BD} \xrightarrow{(1)} \frac{AC}{AB}=\frac{DC}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

۳- متوسط

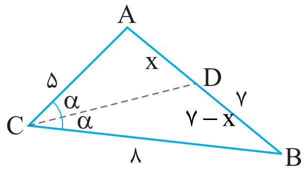


$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{7}{8}=\frac{x}{5-x}$$

$$\Rightarrow 8x=35-7x \Rightarrow 15x=35 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

$$AD=\frac{7}{3} \qquad DC=5-x=5-\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$$

۴- آسان



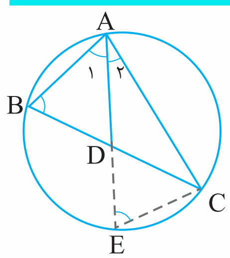
$$CD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۵}{۸}=\frac{x}{۷-x}$$

$$\Rightarrow ۸x=۳۵-۵x \Rightarrow ۱۳x=۳۵ \Rightarrow x=\frac{۳۵}{۱۳}$$

$$BD=۷-\frac{۳۵}{۱۳}=\frac{۹۱-۳۵}{۱۳} \Rightarrow BD=\frac{۵۶}{۱۳}$$

$$AD=\frac{۳۵}{۱۳}$$

۵- دشوار



فرض : $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$

حکم : $AD^۲=AB\cdot AC-BD\cdot DC$

دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم، **AD** را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه **E** قطع کند، **E** را به **C** وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی}\ \hat{B}=\text{محاطی}\ \hat{E}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \text{فرض}: \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{AEC}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{AD}{AC}=\frac{BD}{EC}=\frac{AB}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE} \Rightarrow AD\cdot AE=AB\cdot AC$$

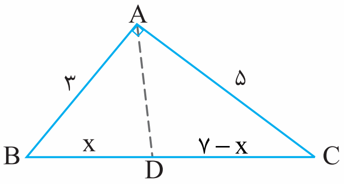
$$\Rightarrow AD(AD+DE)=AB\cdot AC$$

$$\Rightarrow AD^۲=AB\cdot AC-AD\cdot DE \quad (۱)$$

بنا به روابط طولی در دایره داریم: $AD\cdot DE=BD\cdot DC \quad (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AD^۲=AB\cdot AC-BD\cdot DC$$

۶- متوسط



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{x}{۷-x}$$

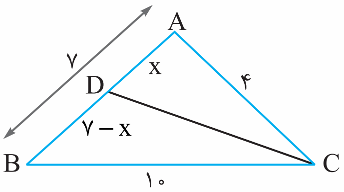
$$\Rightarrow ۵x=۲۱-۳x \Rightarrow ۸x=۲۱ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۸}$$

$$BD=x=\frac{۲۱}{۸} \qquad CD=۷-\frac{۲۱}{۸}=\frac{۵۶-۲۱}{۸} \Rightarrow CD=\frac{۳۵}{۸}$$

$$AD^۲=AB\cdot AC-BD\cdot DC \Rightarrow AD^۲=۳\times۵-\frac{۲۱}{۸}\times\frac{۳۵}{۸}=۱۵-\frac{۷۳۵}{۶۴}$$

$$\Rightarrow AD^۲=\frac{۹۶۰-۷۳۵}{۶۴}=\frac{۲۲۵}{۶۴} \Rightarrow AD=\frac{۱۵}{۸}$$

۷- متوسط



$$CD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۴}{۱۰}=\frac{x}{۷-x}$$

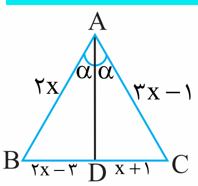
$$\Rightarrow ۲۸-۴x=۱۰x \Rightarrow x=۲$$

$$AD=۲ \qquad BD=۵$$

$$CD^۲=AC\cdot BC-BD\cdot DA \Rightarrow CD^۲=۴\times۱۰-۲\times۵=۳۰$$

$$\Rightarrow CD=\sqrt{۳۰}$$

۸- دشوار



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x-۱}=\frac{۲x-۳}{x+۱}$$

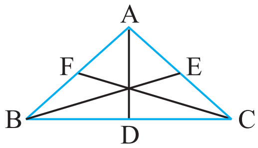
$$\Rightarrow ۲x^۲+۲x=۶x^۲-۹x-۲x+۳ \Rightarrow ۴x^۲-۱۳x+۳=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶۹-۴(۴)(۳)=۱۶۹-۴۸=۱۲۱ \Rightarrow \sqrt{\Delta}=۱۱$$

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{۸}=\frac{۱۳\mp۱۱}{۸} \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=\dfrac{۱}{۴} \rightarrow AC<۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$AD^۲=AB.AC-BD.DC \Rightarrow AD^۲=۶\times۸-۳\times۴$$
$$=۴۸-۱۲=۳۶ \Rightarrow AD=۶$$

۹- آسان



$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \quad (۱)$$

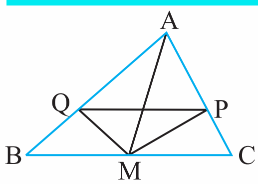
$$BE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{CE}{AE} \quad (۲)$$

$$CF \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AF}{BF} \quad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲)و (۳) داریم:

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{AE}=\frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}}\times\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}}\times\frac{\cancel{BC}}{\cancel{AB}}=۱$$

۱۰- متوسط



فرض : $\begin{cases} MB=MC \\ MP \text{ نیمساز} \\ MQ \text{ نیمساز} \end{cases}$

حکم : $PQ \parallel BC$

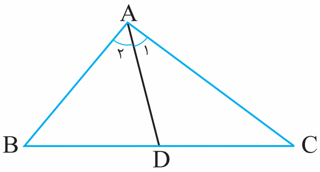
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMC} : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \dfrac{AM}{MC}=\dfrac{AP}{PC} \Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AP}{PC} \\ \overset{\Delta}{AMB} : MQ \text{ نیمساز} \Rightarrow \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AQ}{QB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : \frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

پاسخنامه سؤالات تستی

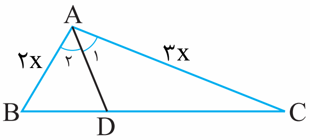
بخش ۲

۱- گزینه «۴» آسان



$$\left.\begin{array}{l} AD^۲ = AB\cdot AC : \text{فرض مسئله} \\ AD^۲ = AB\cdot AC - BD\cdot DC : \text{دستور محاسبه طول نیمساز} \end{array}\right\} \Rightarrow BD\cdot DC = ۰ \text{ نشدنی}$$

۲- گزینه «۲» آسان



$$AB=\frac{۲}{۳}AC=\frac{۱}{۲}BC=۲x \Rightarrow \begin{cases} AB=۲x \\ AC=۳x \\ BC=۴x \end{cases}$$

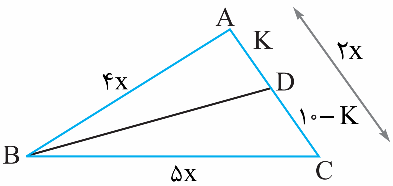
$$AD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۲x}{۳x}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \begin{cases} BD=۲k \\ DC=۳k \end{cases}$$

$$BC=BD+DC \Rightarrow ۴x=۲k+۳k \Rightarrow ۴x=۵k \Rightarrow k=\frac{۴}{۵}x$$

$$\Rightarrow BD=\frac{۸}{۵}x \qquad DC=\frac{۱۲}{۵}x$$

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\frac{۸}{۵}x}{۲x}=\frac{۴}{۵}$$

۳- گزینه «۳» متوسط



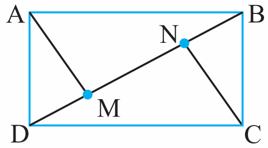
$$AC=۲x \Rightarrow ۱۰=۲x \Rightarrow x=۵$$

پس $AC=۱۰$ و $BC=۲۵$ و $AB=۲۰$ است اگر $AD=k$ باشد، واضح است که $CD=۱۰-k$ است.

$$BD \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{۲۰}{۲۵}=\frac{k}{۱۰-k}$$

$$\Rightarrow ۵k=۴۰-۴k \Rightarrow ۹k=۴۰ \Rightarrow k=\frac{۴۰}{۹}=۴\frac{۴}{۹}$$

۴- گزینه «۲»
دشوار



$\overset{\Delta}{ABD}: BD^{۲} = AD^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow BD^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow BD = ۵$

در مثلث **ABD**، اگر $DM = x$ باشد $MB = ۵ - x$ است.

AM نیمساز $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DM}{BM} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{x}{۵ - x}$

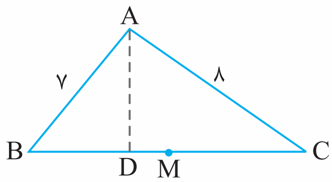
$\Rightarrow ۴x = ۱۵ - ۳x \Rightarrow ۷x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۷}$

به همین ترتیب $BN = \frac{۱۵}{۷}$ است.

$MN = BD - (DM + BN) = ۵ - (\frac{۱۵}{۷} + \frac{۱۵}{۷}) = ۵ - \frac{۳۰}{۷} \Rightarrow MN = \frac{۵}{۷}$

۵- گزینه «۲»
متوسط

اگر $BD = x$ باشد، $DC = ۱۲ - x$ است.



AD نیمساز $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۷}{۸} = \frac{x}{۱۲ - x}$

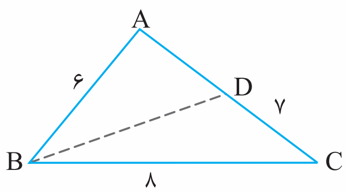
$\Rightarrow ۸x = ۸۴ - ۷x \Rightarrow ۱۵x = ۸۴ \Rightarrow x = \frac{۸۴}{۱۵} = ۵/۶$

نقطه **M** وسط ضلع **BC** است پس $BM = ۶$

$DM = BM - BD = ۶ - ۵/۶ = ۰/۴$

۶- گزینه «۳»
متوسط

زاویه متوسط روبه‌رو به ضلع متوسط است و اگر فرض کنیم $AD = x$ آنگاه $DC = ۷ - x$.



BD نیمساز $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{x}{۷ - x} \Rightarrow ۸x = ۴۲ - ۶x$

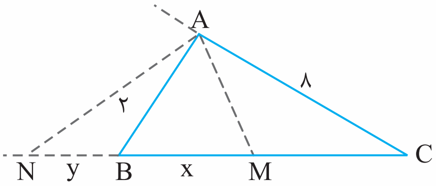
$\Rightarrow ۱۴x = ۴۲ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow AD = ۳ \ , \ DC = ۴$

$BD^{۲} = AB \cdot BC - AD \cdot DC \Rightarrow BD^{۲} = ۶ \times ۸ - ۳ \times ۴$

$= ۴۸ - ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow BD = ۶$

۷- گزینه «۳»
متوسط

اگر فرض کنیم $BM = x$ آنگاه $CM = ۹ - x$ است.



AM نیمساز $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{MC}{BM} \Rightarrow \frac{۸}{۲} = \frac{۹ - x}{x} \Rightarrow ۴x = ۹ - x \Rightarrow x = \frac{۹}{۵}$

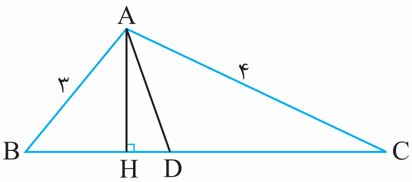
اگر فرض کنیم $BN = y$ است آنگاه $CN = ۹ + y$ است.

AN نیمساز خارجی $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BN} \Rightarrow \frac{۸}{۲} = \frac{۹ + y}{y}$

$\Rightarrow ۴y = ۹ + y \Rightarrow ۳y = ۹ \Rightarrow y = ۳$

$MN = NB + BM = y + x = ۳ + \frac{۹}{۵} = ۴/۸$

۸- گزینه «۱»
متوسط



$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$

$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۹ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵}$

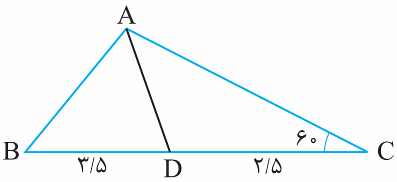
اگر فرض کنیم $BD = k$ آنگاه $DC = ۵ - k$ است.

AD نیمساز $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{k}{۵ - k}$

$\Rightarrow ۴k = ۱۵ - ۳k \Rightarrow ۷k = ۱۵ \Rightarrow k = \frac{۱۵}{۷}$

$DH = BD - BH = \frac{۱۵}{۷} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷۵ - ۶۳}{۳۵} \Rightarrow DH = \frac{۱۲}{۳۵}$

۹- گزینه «۱»
دشوار



AD نیمساز $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۳/۵}{۲/۵} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow \begin{cases} AB = ۷k \\ AC = ۵k \end{cases}$

بنا به قضیه **cos**ها داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲AC.BC\cos C$$

$$\Rightarrow ۴۹k^۲ = ۲۵k^۲ + ۳۶ - ۲(۵k)(۶)(\frac{۱}{۲})$$

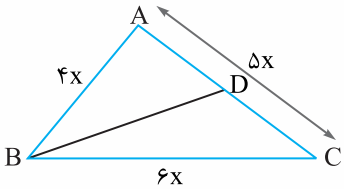
$$\Rightarrow ۲۴k^۲ + ۳۰k - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۶} ۴k^۲ + ۵k - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (k+۲)(۴k-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = -۲ & \text{غ ق ق} \\ k = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

پس $AB = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$ و $AC = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$ و $BC = ۶$ است که اندازه کوچک‌ترین ضلع $AC = ۳/۷۵$ است.

۱۰- گزینه «۳» آسان

اگر فرض کنیم $AB = ۴x$ و $AC = ۵x$ و $BC = ۶x$ باشد، داریم:



$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{۴x}{۶x} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{۲}{۳}$$

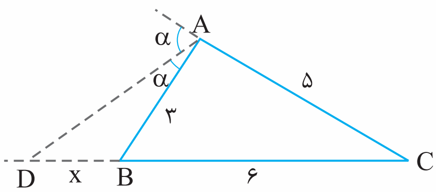
می‌دانیم اگر ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{BCD}}} = \frac{AD}{DC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{BCD}} + S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{۲}{۳+۲}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{۵}{۲}$$

۱۱- گزینه «۲» متوسط

کوچک‌ترین زاویه خارجی هر مثلث در کنار بزرگ‌ترین زاویه داخلی است و بزرگ‌ترین زاویه داخلی، روبه‌رو بزرگ‌ترین ضلع مثلث است.



$$\text{نیمساز خارجی } AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{x}{۶+x}$$

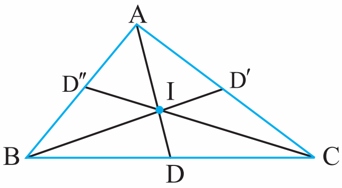
$$\Rightarrow x = ۱۸ + ۳x \Rightarrow ۲x = ۱۸ \Rightarrow x = ۹$$

می‌دانیم اگر ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشد، نسبت مساحت آنها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{BD}{BC} = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

۱۲- گزینه «۳» آسان

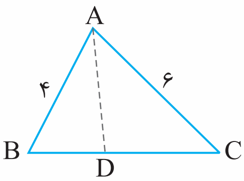
اگر نقطه **I** محل همرأسی نیمسازهای داخلی مثلث **ABC** باشد، نیمساز **AD** به نسبت **a** از پای نیمساز و $(b+c)$ از رأس تقسیم می‌شود.



$$\frac{ID}{IA} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{۱۵}{۷+۱۳} = \frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۳}{۴}$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

روش اول: ابتدا به کمک قضیه **cos**ها ضلع **BC** را محاسبه می‌کنیم.



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \cdot AC\cos ۱۲۰ = ۱۶ + ۳۶ - ۲(۴)(۶)(-\frac{۱}{۲}) = ۷۶$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$$

حال از قضیه نیمساز استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم $BD = x$ آنگاه $DC = ۲\sqrt{۱۹} - x$ است.

$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{x}{۲\sqrt{۱۹} - x}$$

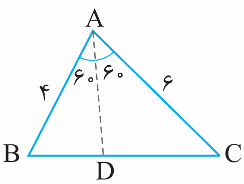
$$\Rightarrow ۶x = ۸\sqrt{۱۹} - ۴x \Rightarrow ۱۰x = ۸\sqrt{۱۹} \Rightarrow x = \frac{۴}{۵}\sqrt{۱۹}$$

پس $BD = \frac{۴}{۵}\sqrt{۱۹}$ و $DC = ۲\sqrt{۱۹} - \frac{۴}{۵}\sqrt{۱۹} = \frac{۶\sqrt{۱۹}}{۵}$ می‌باشد.

$$AD^۲ = AB \cdot AC - BD \cdot DC = ۴ \times ۶ - \frac{۴}{۵}\sqrt{۱۹} \times \frac{۶\sqrt{۱۹}}{۵} = ۲۴ - \frac{۲۴ \times ۱۹}{۲۵}$$

$$= \frac{۲۴ \times ۲۵ - ۲۴ \times ۱۹}{۲۵} = \frac{۱۴۴}{۲۵} \Rightarrow AD = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

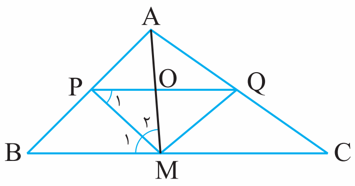
روش دوم: هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها را داشته باشیم و بخواهیم طول نیمساز وارد بر ضلع سوم را حساب کنیم، می‌توانیم از دستور زیر بدست آوریم:



$$d_a = \frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c} = \frac{۲(۴)(۶)\cos ۶۰}{۴+۶} = \frac{۴۸ \times \frac{۱}{۲}}{۱۰} = \frac{۲۴}{۱۰} \Rightarrow d_a = ۲/۴$$

۱۴- گزینه «۴» متوسط

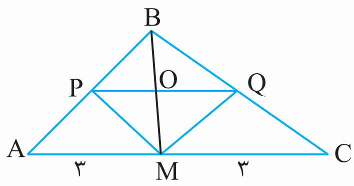
می‌دانیم اگر **AM** میانه ضلع **BC** باشد، و نیمسازهای دو زاویه **AMB** و **AMC** را رسم کنیم تا اضلاع **AB** و **AC** را در **P** و **Q** قطع کند در این‌صورت $PQ \parallel BC$ است.



$$PQ \parallel BC \;,\; \text{مورب } MP \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{P}_۱ = \hat{M}_۱$$
$$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{P}_۱ = \hat{M}_۲$$
$$\xrightarrow{\text{مثلث متساوی‌الساقین}} OP = OM$$

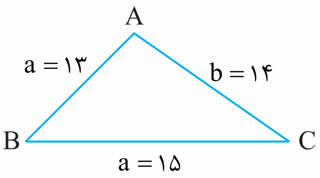
۱۵- گزینه «۳» دشوار

می‌دانیم اگر **BM** میانه ضلع **AC** باشد، و نیمسازهای دو زاویه $\widehat{AMB}$ و $\widehat{BMC}$ را رسم کنیم تا اضلاع **AB** و **BC** را در **P** و **Q** قطع کند در این‌صورت $PQ \parallel AC$ است.



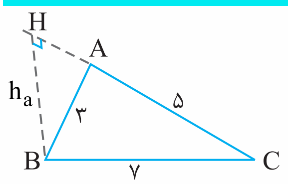
$$\text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{BP}{PA} \Rightarrow \frac{۵}{۳} = \frac{BP}{PA} \Rightarrow \frac{۵}{۵+۳} = \frac{BP}{PA+PB}$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{BP}{BA}$$
$$\overset{\triangle}{BAC}: PQ \parallel AC \Rightarrow \frac{BP}{BA} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{PQ}{۶} \Rightarrow PQ = \frac{۳۰}{۸} = ۳/۷۵$$

۱- آسان



$$۲p = a+b+c = ۱۵+۱۴+۱۳ = ۴۲ \Rightarrow p = ۲۱$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۲۱\times۶\times۷\times۸} = \sqrt{۳^۲\times۷^۲\times۲^۴}$$
$$\Rightarrow S = ۳\times۷\times۲^۲ = ۲۱\times۴ \Rightarrow S = ۸۴$$

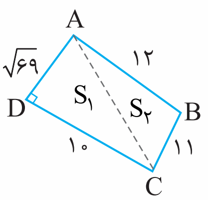
۲- آسان



$$۲p = ۳+۵+۷ = ۱۵ \Rightarrow p = ۷/۵$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۷/۵\times۰/۵\times۲/۵\times۴/۵}$$
$$= \sqrt{\frac{۱۵\times۱\times۵\times۹}{۱۶}} = \frac{۳\times۵\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}$$
$$S = \frac{۱}{۲}BH\times AC \Rightarrow \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}BH\times۵ \Rightarrow BH = \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$$

۳- متوسط

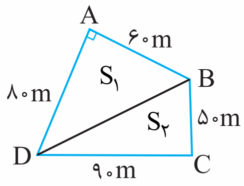
مقدار **AC** را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\triangle}{ADC}: AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ = ۶۹+۱۰۰ = ۱۶۹ \Rightarrow AC = ۱۳$$
$$S_۱ = \frac{۱}{۲}AD\times DC = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۹}\times۱۰ \Rightarrow S_۱ = ۵\sqrt{۶۹}$$
$$۲p_۲ = ۱۲+۱۱+۱۳ = ۳۶ \Rightarrow p_۲ = ۱۸$$
$$S_۲ = \sqrt{p_۲(p_۲-a)(p_۲-b)(p_۲-c)} = \sqrt{۱۸\times۵\times۶\times۷} = ۶\sqrt{۱۰۵}$$
$$S_{\text{کل}} = S_۱ + S_۲ = ۵\sqrt{۶۹} + ۶\sqrt{۱۰۵}$$

۴- متوسط

مقدار **BD** را رسم می‌کنیم.



$\overset{\Delta}{ABD}: BD^{۲} = ۶۰^{۲} + ۸۰^{۲} = ۳۶۰۰ + ۶۴۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow BD = ۱۰۰$

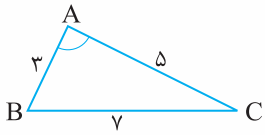
$S_۱ = \frac{۱}{۲} AB \times AD = \frac{۱}{۲} \times ۶۰ \times ۸۰ \Rightarrow S_۱ = ۲۴۰۰$

$۲p = ۵۰ + ۹۰ + ۱۰۰ = ۲۴۰ \Rightarrow p = ۱۲۰$

$S_۲ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۱۲۰ \times ۷۰ \times ۳۰ \times ۲۰} = ۶۰۰\sqrt{۱۴}$

$S_{کل} = S_۱ + S_۲ = ۲۴۰۰ + ۶۰۰\sqrt{۱۴}$

۵- متوسط



$BC^{۲} > AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow A > ۹۰^\circ$

$۲p = ۳ + ۵ + ۷ = ۱۵ \Rightarrow p = ۷/۵$

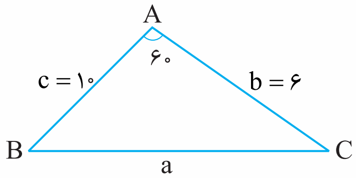
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۷/۵ \times ۰/۵ \times ۲/۵ \times ۴/۵}$

$= \sqrt{\frac{۱۵ \times ۱ \times ۵ \times ۹}{۱۶}} = \frac{۳ \times ۵\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}$

$S = \frac{۱}{۲} bc \sin A \Rightarrow \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \sin A$

$\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۶۰ & \text{غ ق ق} \\ \hat{A} = ۱۲۰ \end{cases}$

۶- دشوار



آ) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A \Rightarrow a^{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲(۶)(۱۰)(\frac{۱}{۲})$

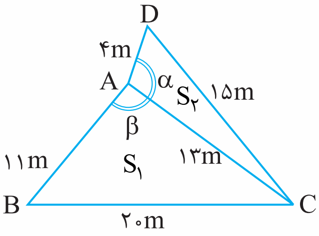
$\Rightarrow a^{۲} = ۱۳۶ - ۶۰ \Rightarrow a^{۲} = ۷۶ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۱۹}$

ب) $S = \frac{۱}{۲} bc \sin A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow S = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۶}{\sin B} \Rightarrow ۲\sqrt{۱۹}\sin B = ۳\sqrt{۳}$

$\Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}} \times \frac{\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

۷- دشوار



$۲p_۱ = ۱۱ + ۲۰ + ۱۳ = ۴۴ \Rightarrow p_۱ = ۲۲$

$S_۱ = \sqrt{p_۱(p_۱-a)(p_۱-b)(p_۱-c)} = \sqrt{۲۲ \times ۱۱ \times ۲ \times ۹} = ۶۶$

$۲p_۲ = ۴ + ۱۳ + ۱۵ = ۳۲ \Rightarrow p_۲ = ۱۶$

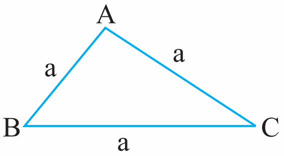
$S_۲ = \sqrt{p_۲(p_۲-a)(p_۲-b)(p_۲-c)} = \sqrt{۱۶ \times ۱۲ \times ۱ \times ۳} = ۲۴$

$S_{کل} = S_۱ + S_۲ = ۶۶ + ۲۴ = ۹۰$

$$\left.\begin{aligned} & S_۱ = \frac{۱}{۲} AD \times AC \times \sin\beta \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۱۳ \times \sin\beta \\ & \Rightarrow \sin\beta = \frac{۱۳۲}{۱۴۳} \Rightarrow \sin\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \\ & S_۲ = \frac{۱}{۲} AD \times AC \times \sin\alpha \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۳ \times \sin\alpha \\ & \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = ۱۸۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۸- آسان

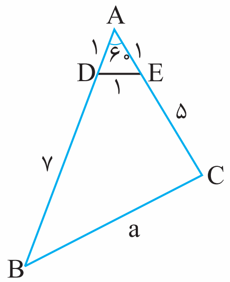


$۲p = a + a + a = ۳a \Rightarrow p = \frac{۳}{۲}a$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{۳}{۲}a \times \frac{۱}{۲}a \times \frac{۱}{۲}a \times \frac{۱}{۲}a}$

$= \sqrt{\frac{۳a^{۴}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}$

۹- متوسط



$$AD = AE = DE = 1 \xrightarrow{\text{متساوی‌الاضلاع}} \hat{A} = 60^\circ$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos 60$$

$$\Rightarrow a^2 = 64 + 36 - 2(8)(6)(\frac{1}{2})$$

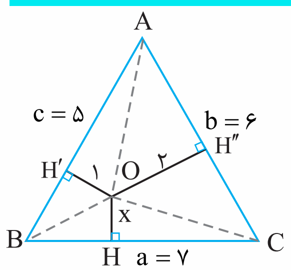
$$\Rightarrow a^2 = 100 - 48 = 52 \Rightarrow a = \sqrt{52} \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin 60 = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ADE}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{DECB} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{ADE}} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47\sqrt{3}}{4}$$

۱۰- دشوار



$$2p = 6 + 5 + 7 = 18 \Rightarrow p = 9$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

O را به **A** و **B** و **C** وصل می‌کنیم.

$$S = S_{\overset{\triangle}{AOB}} + S_{\overset{\triangle}{OAC}} + S_{\overset{\triangle}{BOC}} \Rightarrow 6\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 6 + \frac{1}{2} x \times 7$$

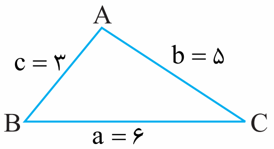
$$\xrightarrow{\times 2} 12\sqrt{6} = 10 + 18 + 7x \Rightarrow 7x = 12\sqrt{6} - 28 \Rightarrow x = \frac{12}{7}\sqrt{6} - 4$$

پاسخنامه

سؤالات تستی

بخش ۳

۱- گزینه «۳» آسان



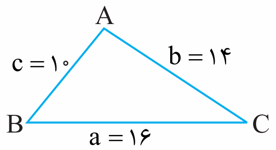
$$2p = a + b + c = 6 + 5 + 3 = 14 \Rightarrow p = 7$$

بنا به قضیه هرون داریم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7 \times 1 \times 2 \times 4} \Rightarrow S = 2\sqrt{14}$$

۲- گزینه «۴» متوسط

ابتدا به کمک قضیه هرون مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم.



$$2p = 10 + 14 + 16 = 40 \Rightarrow p = 20$$

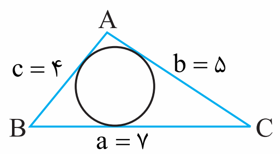
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{20 \times 4 \times 6 \times 10} \Rightarrow S = 40\sqrt{3}$$

می‌دانیم بزرگ‌ترین ارتفاع به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود، پس داریم:

$$S = \frac{c.h_c}{2} \Rightarrow 40\sqrt{3} = \frac{10h_c}{2} \Rightarrow h_c = 8\sqrt{3}$$

۳- گزینه «۱» متوسط

شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه $r = \frac{S}{p}$ بدست می‌آید که مساحت را به کمک قضیه هرون بدست می‌آوریم.



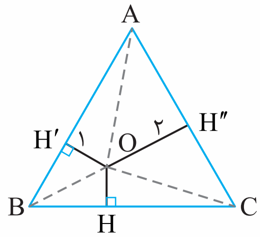
$$2p = a + b + c = 7 + 5 + 4 = 16 \Rightarrow p = 8$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8 \times 1 \times 3 \times 4} = 4\sqrt{6}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{6}}{8} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۴- گزینه «۲» دشوار

ابتدا به کمک قضیه هرون مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم.



$$۲p=a+b+c=۱۵+۱۴+۱۳=۴۲ \Rightarrow p=۲۱$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۲۱\times۶\times۷\times۸}=۸۴$$

از نقطه **O** به ۳ رأس وصل می‌کنیم.

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{AOB}}+S_{\overset{\triangle}{AOC}}+S_{\overset{\triangle}{BOC}}$$

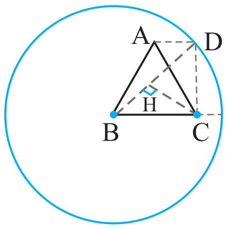
$$\Rightarrow ۸۴=\frac{۱}{۲}OH'\times AB+\frac{۱}{۲}OH''\times AC+\frac{۱}{۲}OH\times BC$$

$$\Rightarrow ۸۴=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱۴+\frac{۱}{۲}\times۲\times۱۳+\frac{۱}{۲}OH\times۱۵ \Rightarrow ۸۴=۷+۱۳+\frac{۱۵}{۲}OH$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{۲}OH=۶۴ \Rightarrow OH=\frac{۱۲۸}{۱۵}$$

۵- گزینه «۳» دشوار

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث **ABC** را محاسبه می‌کنیم.



$$۲p=۱۷+۱۷+۱۶=۵۰ \Rightarrow p=۲۵$$

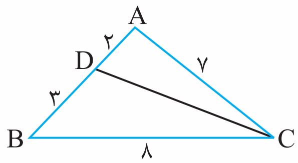
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۲۵\times۸\times۸\times۹}=۱۲۰$$

دو مثلث **ABC** و **DBC** چون ارتفاع و قاعده‌های برابری دارند، هم مساحت هستند، پس $S_{\overset{\triangle}{BDC}}=۱۲۰$.

$$S_{\overset{\triangle}{BDC}}=\frac{۱}{۲}CH\times BD \Rightarrow ۱۲۰=\frac{۱}{۲}\times CH\times۲۵ \Rightarrow CH=۹/۶$$

۶- گزینه «۲» متوسط

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث **ABC** را محاسبه می‌کنیم.



$$۲p=۵+۷+۸=۲۰ \Rightarrow p=۱۰$$

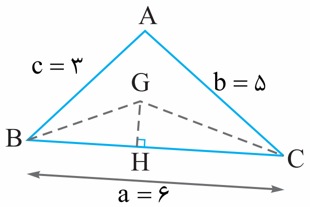
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۱۰\times۲\times۳\times۵}=۱۰\sqrt{۳}$$

می‌دانیم اگر ارتفاع‌های دو مثلث با هم برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{۱۰\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADC}}=۴\sqrt{۳}$$

۷- گزینه «۴» متوسط

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث **ABC** را محاسبه می‌کنیم.



$$۲p=۶+۵+۳=۱۴ \Rightarrow p=۷$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{۷\times۱\times۲\times۴}=۲\sqrt{۱۴}$$

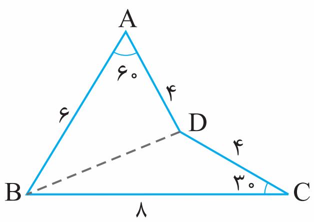
می‌دانیم اگر هر ۳ میانه یک مثلث را رسم کنیم، ۶ مثلث هم‌مساحت به وجود می‌آید، پس مساحت مثلث **BGC**، $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث **ABC** است.

$$S_{\overset{\triangle}{BGC}}=\frac{۱}{۳}S_{ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}BC\times GH=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۴}$$

$$\Rightarrow ۳GH=\frac{۲}{۳}\sqrt{۱۴} \Rightarrow GH=\frac{۲}{۹}\sqrt{۱۴}$$

۸- گزینه «۱» متوسط

B را به **D** وصل می‌کنیم.



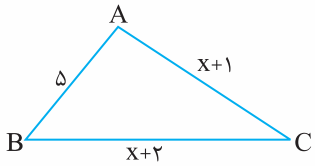
$$S_{\overset{\triangle}{ABD}}=\frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin۶۰=\frac{۱}{۲}\times۶\times۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{DCB}}=\frac{۱}{۲}DC\times BC\times\sin۳۰=\frac{۱}{۲}\times۴\times۸\times\frac{۱}{۲}=۸$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{DCB}}=۶\sqrt{۳}+۸$$

۹- گزینه «۱» دشوار

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم.



$$2p = 5 + x + 1 + x + 2 = 2x + 8 \Rightarrow p = x + 4$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{3} = \sqrt{(x+4)\times 2\times 3\times (x-1)}$$

$$\Rightarrow 300 = 6(x^2 + 3x - 4) \xrightarrow{\div 6} x^2 + 3x - 4 = 50$$

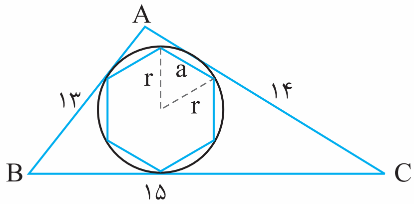
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 54 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 & \text{غ ق ق} \\ x = 6 \end{cases}$$

در نتیجه $p = x + 4 = 6 + 4 = 10$ است.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

۱۰- گزینه «۳» دشوار

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم.



$$2p = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow p = 21$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\times 6\times 7\times 8} \Rightarrow S = 84$$

شعاع دایره محاطی داخلی از دستور $r = \frac{S}{p}$ بدست می‌آید پس داریم:

$$r = \frac{84}{21} = 4$$

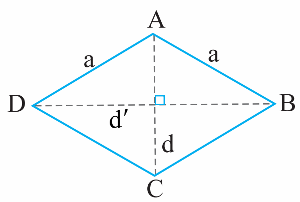
اندازه هر ضلع **n** ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع **r** از دستور $a = 2r\sin\frac{180}{n}$ بدست می‌آید.

$$a = 2(4)\sin 30 = 4$$

۱۱- گزینه «۱» آسان

اگر اندازه هر ضلع لوزی **a** و اندازه قطرها **d** و d' باشد بنا به فرض داریم:

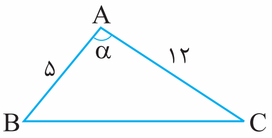
$$a^2 = dd'$$



$$S = \frac{1}{2}dd' = a^2 \sin A \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 = a^2 \sin A$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 30^\circ \\ \hat{A} = 150^\circ \end{cases}$$

۱۲- گزینه «۱» آسان

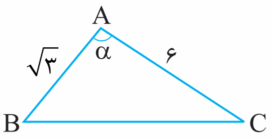


$$S = \frac{1}{2}AB\times AC\sin A \Rightarrow 15 = \frac{1}{2}\times 5\times 12\times \sin\alpha$$

$$\Rightarrow 15 = 30\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 30 \\ \alpha_2 = 150 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = 150 - 30 = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

۱۳- گزینه «۱» آسان



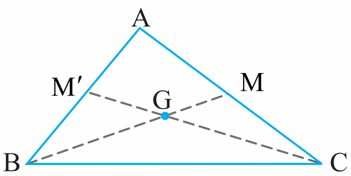
$$S = \frac{1}{2}AB\times AC\times \sin\alpha \Rightarrow 4/5 = \frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 6\times \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{9}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 60^\circ \\ \alpha_2 = 120^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{120}{60} = 2$$

۱۴- گزینه «۲» دشوار

می‌دانیم فاصله نقطه تلاقی میانه‌ها از هر رأس مثلث $\frac{2}{3}$ طول میانه است.



$$BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\times\frac{9}{2} = 3$$

$$CG = \frac{2}{3}\times CM' = \frac{2}{3}\times\frac{21}{2} = 7$$

مساحت مثلث **BGC** را به کمک قضیه هرون بدست می‌آوریم.

$$2p = 3 + 7 + 8 = 18 \Rightarrow p = 9$$

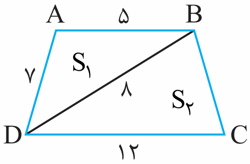
$$S_{\overset{\triangle}{BGC}} = \sqrt{9\times 1\times 2\times 6} = 6\sqrt{3}$$

می‌دانیم اگر ۳ میانه مثلث را رسم کنیم، ۶ مثلث هم‌مساحت به وجود می‌آید.

$$S_{\overset{\triangle}{BGC}} = \frac{1}{3}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{1}{3}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}\ 18\sqrt{3}$$

۱۵- گزینهٔ «۴» متوسط

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث **ABD** را محاسبه می‌کنیم.



$$۲p = ۵ + ۷ + ۸ = ۲۰ \Rightarrow p = ۱۰$$

$$S_۱ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۱۰ \times ۲ \times ۳ \times ۵} = ۱۰\sqrt{۳}$$

می‌دانیم اگر قطر یک ذوزنقه را رسم کنیم نسبت مساحت مثلث‌های بـه وجـود آمده برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_۲}{S_۱} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{S_۲}{۱۰\sqrt{۳}} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow S_۲ = ۲۴\sqrt{۳}$$

$$S_{ABCD} = S_۱ + S_۲ = ۱۰\sqrt{۳} + ۲۴\sqrt{۳} = ۳۴\sqrt{۳}$$

۱- آسان

آ) وتر

ب) خارج مثلث

پ) سینوس

ت) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

۲- آسان

آ) درست

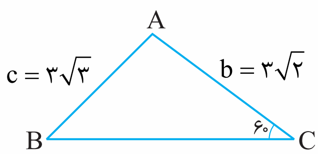
ب) نادرست

پ) درست

ت) درست

۳- آسان

بنا به قضیه **sin**ها داریم:



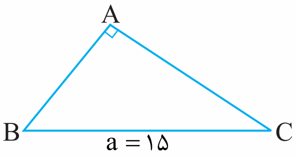
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}}{\sin B} = \frac{۳\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}}{\sin B} = ۶$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = ۴۵^\circ \\ \hat{B} = ۱۳۵^\circ \end{cases}$$

اگر $\hat{B} = ۱۳۵^\circ$ باشد، چون $\hat{B} + \hat{C} = ۱۳۵ + ۶۰ = ۱۹۵ > ۱۸۰$ اسـت مثلث به وجود نمی‌آید، پس $\hat{B} = ۴۵^\circ$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} + ۴۵ + ۶۰ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} = ۷۵^\circ$$

۴- متوسط



$$\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{۱۵}{\sin ۹۰} = ۲R \Rightarrow ۲R = ۱۵$$

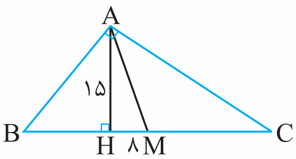
$$\frac{b}{\sin B} = ۲R \Rightarrow b = ۱۵ \sin B$$

$$\frac{c}{\sin C} = ۲R \Rightarrow c = ۱۵ \sin C$$

$$\text{محیط} = a + b + c = ۱۵ + ۱۵\sin B + ۱۵ \sin C$$

$$= ۱۵ + ۱۵(\sin B + \sin C) = ۱۵ + ۱۵(\frac{۶}{۵}) = ۱۵ + ۱۸ = ۳۳$$

۵- متوسط



$$\overset{\triangle}{AHM} : AM^۲ = AH^۲ + HM^۲ \Rightarrow AM^۲ = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹$$
$$\Rightarrow AM = ۱۷$$

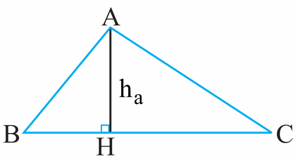
در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

$$AM = \frac{BC}{۲} \Rightarrow ۱۷ = \frac{BC}{۲} \Rightarrow BC = ۳۴$$

$$\frac{BC}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{۳۴}{۱} = ۲R \Rightarrow R = ۱۷$$

۶- دشوار

ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{aligned} &\sin B = \frac{h_a}{c} \Rightarrow c = \frac{h_a}{\sin B} \\ &\text{قضیه } \sin: \frac{b}{\sin B} = ۲R \Rightarrow b = ۲R \sin B \end{aligned}\right\} \Rightarrow bc = ۲Rh_a$$

به همین ترتیب $ab = ۲Rh_c$ و $ac = ۲Rh_b$ است.

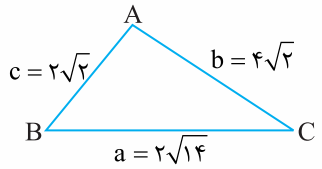
$$\frac{ab + ac + bc}{h_a + h_b + h_c} = ۴ \Rightarrow \frac{۲Rh_c + ۲Rh_b + ۲Rh_a}{h_a + h_b + h_c} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۲R(h_a + h_b + h_c)}{h_a + h_b + h_c} = ۴ \Rightarrow ۲R = ۴ \Rightarrow R = ۲$$

$$\text{مساحت دایره محیطی } S = \pi R^۲ = \pi(۲)^۲ = ۴\pi$$

۷- متوسط

زاویه **A** چون روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است، پس بزرگ‌ترین زاویه است.

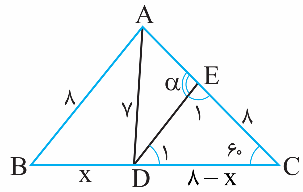


$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow ۵۶ = ۳۲ + ۸ - ۲(۴\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})\cos A$$

$$\Rightarrow ۳۲\cos A = -۱۶ \Rightarrow \cos A = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۱۲۰^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۲۰ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۶۰^\circ$$

۸- دشوار



بنا به قضیه استوارت داریم:

فرض $x < ۴$

$$x(۸)^۲ + (۸-x)(۸)^۲ = ۸(AD^۲ + x(۸-x))$$

$$\xrightarrow[\div ۸]{AD=۷} \cancel{۸x} + ۶۴ - ۸x = ۴۹ + \cancel{۸x} - x^۲$$

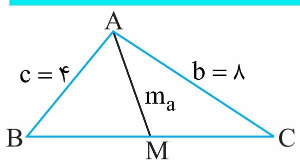
$$\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = ۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{DEC} : EC = DC = ۵ \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{D}_۱ = \hat{E}_۱$$

$$\hat{C} + \hat{E}_۱ + \hat{D}_۱ = ۱۸۰ \Rightarrow ۶۰ + ۲\hat{D}_۱ = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۶۰ \Rightarrow \hat{E}_۱ = ۶۰$$

$$\alpha = ۱۸۰ - ۶۰ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ$$

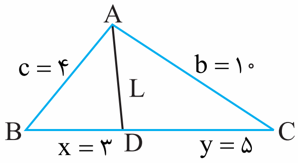
۹- آسان



$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۶۴ + ۱۶ = ۲(۲\sqrt{۷})^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۸۰ = ۵۶ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow \frac{a^۲}{۲} = ۲۴ \Rightarrow a^۲ = ۴۸ \Rightarrow a = ۴\sqrt{۳}$$

۱۰- متوسط



بنا به قضیه استوارت داریم:

$$xb^۲ + yc^۲ = a(L^۲ + xy)$$

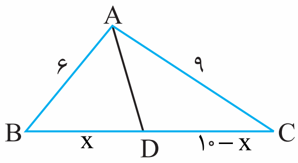
$$۳ \times ۱۰۰ + ۵ \times ۴^۲ = ۸(L^۲ + ۳ \times ۵) \Rightarrow ۳۸۰ = ۸(L^۲ + ۱۵)$$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۹۵ = ۲L^۲ + ۳۰ \Rightarrow ۲L^۲ = ۶۵ \Rightarrow L^۲ = \frac{۶۵}{۲}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\sqrt{۶۵}}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow L = \frac{\sqrt{۱۳۰}}{۲}$$

۱۱- متوسط

اگر فرض کنیم $BD = x$ باشد، آنگاه $DC = ۱۰ - x$ است.



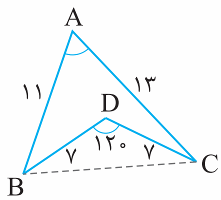
$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{\cancel{۶}^{\,۲}}{\cancel{۹}_{\,۳}} = \frac{x}{۱۰-x} \Rightarrow ۳x = ۲۰ - ۲x$$

$$\Rightarrow ۵x = ۲۰ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow BD = ۴ \;,\; DC = ۶$$

$$AD^۲ = AB.AC - BD.DC = ۶ \times ۹ - ۴ \times ۶ = ۵۴ - ۲۴ = ۳۰$$
$$\Rightarrow AD = \sqrt{۳۰}$$

۱۲- دشوار

BC را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\triangle}{CBD} : BC^۲ = DB^۲ + CD^۲ - ۲BD \cdot CD\cos ۱۲۰$$
$$= ۷^۲ + ۷^۲ - ۲(۷)(۷)(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow BD^۲ = ۹۸ + ۴۹ = ۴۹ \times ۳ \Rightarrow D = ۷\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB.AC\cos A$$

$$\Rightarrow ۱۴۷ = ۱۲۱ + ۱۶۹ - ۲ \times ۱۱ \times ۱۳ \times \cos A$$

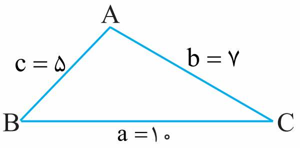
$$\Rightarrow ۲۸۶\cos \hat{A} = ۱۴۳ \Rightarrow \cos A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A = ۶۰$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin ۶۰=\frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{\overset{\triangle}{BCD}}=\frac{۱}{۲}DB\times CD\times \sin ۱۲۰=\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۷\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{BCD}}=\frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴}-\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴۷\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۳- آسان



$$۲p=۱۰+۷+۵=۲۲ \Rightarrow p=۱۱$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S=\sqrt{۱۱\times ۱\times ۴\times ۶}=۲\sqrt{۶۶}$$

۱- آسان

آ) واسطه هندسی   ب) $\hat{A}>۹۰^\circ$

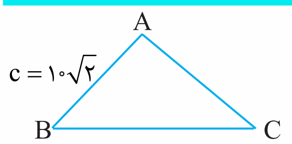
پ) بر هم عمودند   ت) ۱۴

۲- آسان

آ) نادرست   ب) نادرست

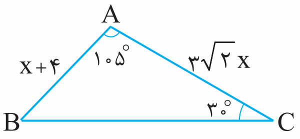
پ) درست   ت) نادرست

۳- آسان



$$\frac{c}{\sin C}=۲R \Rightarrow \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\sin C}=۲۰ \Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\hat{C}=۴۵^\circ\\ \hat{C}=۱۳۵^\circ\end{cases}$$

۴- متوسط



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۱۰۵+\hat{B}+۳۰=۱۸۰ \Rightarrow \hat{B}=۴۵^\circ$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}x}{\sin ۴۵}=\frac{x+۴}{\sin ۳۰} \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{x+۴}{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۳x=x+۴ \Rightarrow x=۲$$

۵- دشوار

$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow a=۲R\sin A$$

به همین ترتیب $b=۲R\sin B$ و $c=۲R\sin C$

$$a+b+c=\text{محیط} \Rightarrow ۲R\sin A+۲R\sin B+۲R\sin C=۴۴$$

$$\Rightarrow ۲R(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۱۲})=۴۴ \Rightarrow ۲R(\frac{۴+۲+۵}{۱۲})=۴۴$$

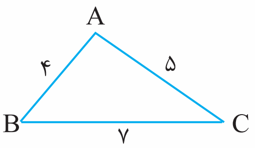
$$\Rightarrow R\times \frac{۱۱}{۶}=۴۴ \Rightarrow R=۲۴$$

$$a=۲R\sin A=۴۸\times \frac{۱}{۳}=۱۶$$

$$b=۲R\sin B=۴۸\times \frac{۱}{۶}=۸$$

$$c=۲R\sin C=۴۸\times \frac{۵}{۱۲}=۲۰$$

۶- متوسط



$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \Rightarrow ۴۹=۲۵+۱۶-۲(۵)(۴)\cos A$$

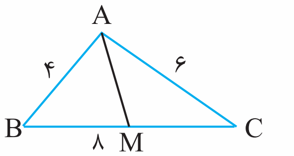
$$\Rightarrow ۴۰\cos A=۱ \Rightarrow \cos A=\frac{۱}{۴۰}$$

۷- متوسط

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=b^۲+c^۲-\frac{۲bc}{۵}\\ a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A\end{array}\right\} \Rightarrow b^۲+c^۲-۲bc\cos A=b^۲+c^۲-\frac{۲bc}{۵}$$

$$\Rightarrow ۲bc\cos A=\frac{۲bc}{۵} \Rightarrow \cos A=\frac{۱}{۵}$$

۸- متوسط

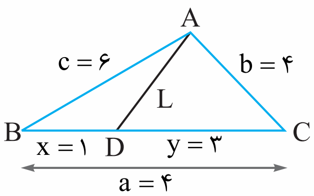


$$b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۱۶+۳۶=۲m_a^۲+\frac{۶۴}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰=۲m_a^۲ \Rightarrow m_a^۲=۱۰ \Rightarrow m_a=\sqrt{۱۰}$$

۹- متوسط

بنا به قضیه استوارت داریم:

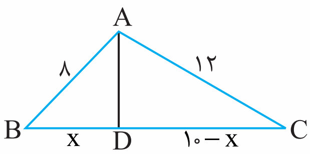


$$xb^۲+yc^۲=a(L^۲+xy) \Rightarrow ۱(۴)^۲+۳(۶)^۲=۴(L^۲+۱\times ۳)$$

$$\Rightarrow ۱۲۴=۴(L^۲+۳) \Rightarrow ۳۱=L^۲+۳ \Rightarrow L^۲=۲۸ \Rightarrow L=۲\sqrt{۷}$$

۱۰- دشوار

اگر $BD=x$ باشد آنگاه $DC=۱۰-x$ است.



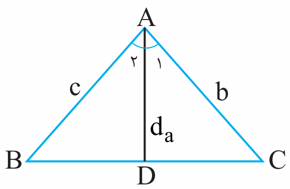
$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{x}{۱۰-x} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{x}{۱۰-x}$$

$$\Rightarrow ۳x=۲۰-۲x \Rightarrow ۵x=۲۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow BD=۴\ ,\ DC=۶$$

$$AD^۲=AB\times AC-BD\times DC=۸\times ۱۲-۴\times ۶=۹۶-۲۴=۷۲$$

$$\Rightarrow AD=۶\sqrt{۲}$$

۱۱- دشوار



فرض : $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=\frac{\hat{A}}{۲}$

حکم : $d_a=\frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$

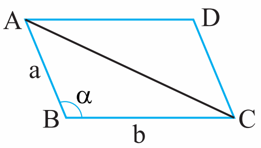
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}cb\underbrace{\sin A}_{۲\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲}cd_a\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}bd_a\sin\frac{A}{۲}$$

$$\xrightarrow{\div\sin\frac{A}{۲}} bc\cos\frac{A}{۲}=\frac{۱}{۲}d_a(b+c) \Rightarrow d_a=\frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

۱۲- آسان

می‌دانیم، قطر هر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند.

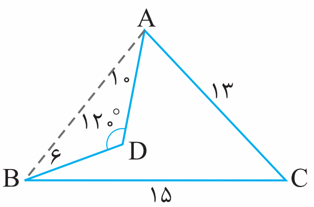


$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}AB.BC\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha \Rightarrow S_{\triangle ACD}=\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$$

$$S_{\square ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=ab\sin\alpha$$

۱۳- دشوار

A را به **B** وصل می‌کنیم، در مثلث **ABD** بنا به قضیه **cos**ها داریم:



$$AB^۲=BD^۲+AD^۲-۲AD\cdot BD\cdot\cos D$$

$$\Rightarrow AB^۲=۳۶+۱۰۰-۲(۶)(۱۰)(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow AB^۲=۱۹۶ \Rightarrow AB=۱۴$$

$$S_{\triangle ABD}=\frac{۱}{۲}AD\times BD\times\sin ۱۲۰=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow S_{\triangle ABD}=۱۵\sqrt{۳}$$

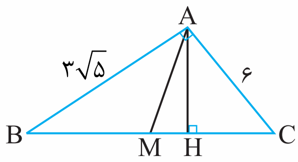
مساحت مثلث **ABC** را به کمک قضیه هرون حساب می‌کنیم.

$$۲p=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲ \Rightarrow p=۲۱$$

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۲۱\times ۶\times ۷\times ۸}=۸۴$$

$$S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADB}=۸۴-۱۵\sqrt{۳}$$

۱- گزینه «۴» متوسط



$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۴۵ + ۳۶ = ۸۱ \Rightarrow BC = ۹$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است پس $AM = \frac{BC}{۲} = \frac{۹}{۲}$.

$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} AB \times AC \Rightarrow AH \times BC = AB \times AC$

$\Rightarrow AH \times ۹ = ۳\sqrt{۵} \times ۶ \Rightarrow AH = ۲\sqrt{۵}$

$\overset{\triangle}{AHM} : AM^۲ = AH^۲ + HM^۲ \Rightarrow \frac{۸۱}{۴} = ۲۰ + HM^۲$

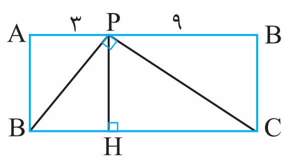
$\Rightarrow HM^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow HM = \frac{۱}{۲}$

وقتی ارتفاع دو مثلث با هم برابر است، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AHM}}} = \frac{BC}{HM} = \frac{۹}{\frac{۱}{۲}} = ۱۸$

۲- گزینه «۴» آسان

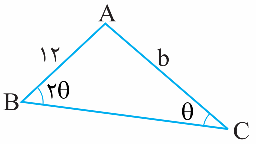
واضح است که $AP = DH = ۳$ و $PB = HC = ۹$، در مثلث **DPC** داریم:



$DP^۲ = DH \times DC = ۳(۹+۳) = ۳۶ \Rightarrow DP = ۶$

۳- گزینه «۳» آسان

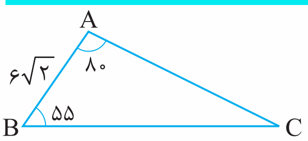
اگر فرض کنیم $C = \theta$، بنا به قضیه **sin**ها داریم:



$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin ۲\theta} = \frac{۱۲}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{b}{۲\sin\theta\cos\theta} = \frac{۱۲}{\sin\theta}$

$\Rightarrow b = ۲۴\cos\theta \Rightarrow b = ۲۴ \times \frac{۳}{۴} \Rightarrow b = ۱۸$

۴- گزینه «۲» دشوار



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow ۸۰ + ۵۵ + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{C} = ۴۵$

بنا به قضیه **sin**ها داریم:

$\frac{c}{\sin C} = ۲R \Rightarrow \frac{۶\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۲R \Rightarrow ۲R = ۱۲ \Rightarrow R = ۶$

می‌دانیم محل تلاقی عمودمنصف‌ها در هر مثلث، مرکز دایره محیطی مثلث است و فاصله این نقطه از هر رأس مثلث برابر شعاع مثلث است، یعنی $OA = OB = OC = R = ۶$ پس:

$OA + OB + OC = ۶ + ۶ + ۶ = ۱۸$

۵- گزینه «۱» دشوار

بنا به قضیه **sin**ها در مثلث داریم $\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow a = ۲R\sin A$، به همین ترتیب $b = ۲R\sin B$ و $c = ۲R\sin C$ است. بنا به قضیه نامساوی مثلث‌ها داریم:

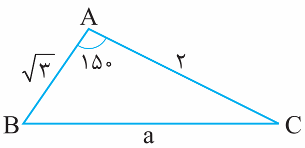
$|a - b| < c < a + b$

$\Rightarrow ۲R\,|\sin A - \sin B| < ۲R\sin C < ۲R(\sin A + \sin B)$

$\xrightarrow{\div ۲R} \left|\frac{۱}{۴} - \frac{۲}{۳}\right| < \sin C < \frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۵}{۱۲} < \sin C < \frac{۱۱}{۱۲}$

۶- گزینه «۱» آسان

بنا به قضیه **cos**ها داریم:



$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \Rightarrow a^۲ = ۴ + ۳ - ۲(۲)(\sqrt{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$

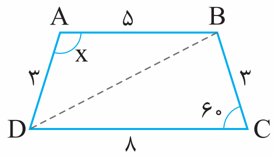
$= ۷ + ۶ = ۱۳ \Rightarrow a = \sqrt{۱۳}$

بنا به قضیه **sin**ها داریم:

$\frac{a}{\sin A} = ۲R \Rightarrow \frac{\sqrt{۱۳}}{\frac{۱}{۲}} = ۲R \Rightarrow R = \sqrt{۱۳}$

۷- گزینه «۳» — متوسط

قطر **BD** را رسم می‌کنیم، در مثلث **BDC** بنا به قضیه **cos**ها داریم:



$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot DC\cos 60 = 9 + 64 - 2(3)(8)(\frac{1}{2})$$

$$= 73 - 24 = 49 \Rightarrow BD = 7$$

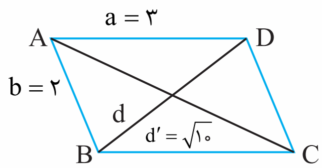
در مثلث **ADB** داریم:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB\cos A \Rightarrow 49 = 9 + 25 - 2(3)(5)\cos x$$

$$\Rightarrow 30\cos x = -15 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

۸- گزینه «۳» — آسان

بنا به قضیه **cos**ها در متوازی‌الاضلاع داریم:



$$2a^2 + 2b^2 = d^2 + d'^2 \Rightarrow 2(3)^2 + 2(2)^2 = (\sqrt{10})^2 + d^2$$

$$\Rightarrow 18 + 8 = 10 + d^2 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = 4$$

۹- گزینه «۲» — متوسط

$$(a+b+c)(a-b+c) = ac \Rightarrow (a+c)^2 - b^2 = ac$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = ac \Rightarrow a^2 + ac + c^2 = b^2$$

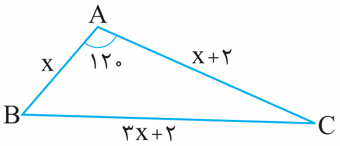
بنا به قضیه **cos**ها، $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ که در رابطه فوق قرار می‌دهیم:

$$a^2 + ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow -2ac\cos B = ac$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{-1}{2} \Rightarrow B = 120^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} + 120 + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 60$$

۱۰- گزینه «۱» — متوسط



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$$

$$(3x-2)^2 = x^2 + (x+2)^2 - 2x(x+2)(-\frac{1}{2})$$

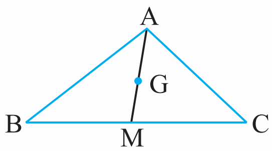
$$\Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = x^2 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 6x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{غ ق ق}\ (BC = -2) \\ x = 3 \end{cases}$$

محیط $= AB + AC + BC = x + x + 2 + 3x - 2 = 5x = 5(3) = 15$

۱۱- گزینه «۳» — دشوار

بنا به قضیه میانه‌ها در مثلث داریم:



$$\left.\begin{array}{l} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ \text{فرض}\ b^2 + c^2 = 13a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 13a^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 2m_a^2 = \frac{25}{2}a^2$$

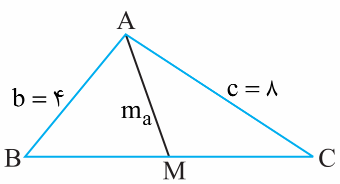
$$\Rightarrow m_a^2 = \frac{25}{4}a^2 \Rightarrow m_a = \frac{5}{2}a$$

می‌دانیم فاصله هر رأس تا نقطه همرسی میانه‌ها، $\frac{2}{3}$ طول میانه است.

$$\frac{AG}{BC} = \frac{\frac{2}{3}m_a}{a} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{5}{2}a}{a} = \frac{5}{3}$$

۱۲- گزینه «۴» — آسان

همواره کوتاه‌ترین میانه به بزرگ‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود.



$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 16 + 64 = 2m_a^2 + \frac{100}{2}$$

$$\Rightarrow 30 = 2m_a^2 \Rightarrow m_a^2 = 15 \Rightarrow m_a = \sqrt{15}$$

۱۳- گزینه «۴» — آسان

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{b^۲+c^۲}\Rightarrow ۲m_a=\sqrt{b^۲+c^۲}\Rightarrow b^۲+c^۲=۴m_a^۲$$

قضیه میانه: $b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}$

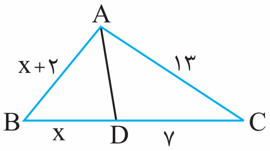
$$\Rightarrow ۴m_a^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲m_a^۲=\frac{a^۲}{۲}\Rightarrow m_a^۲=\frac{a^۲}{۴}\Rightarrow m_a=\frac{a}{۲}$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

۱۴- گزینه «۳» — متوسط

بنا به قضیه استوارت داریم:



$$BD.AC^۲+DC.AB^۲=BC(AD^۲+BD.DC)$$

$$\Rightarrow ۱۶۹x+۷(x+۲)^۲=(x+۷)(۶۴+۷x)$$

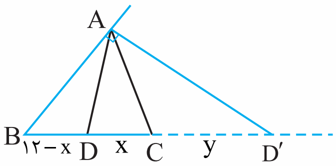
$$\Rightarrow ۱۶۹x+۷x^۲+۲۸x+۲۸=۶۴x+۷x^۲+۴۴۸+۴۹x$$

$$\Rightarrow ۸۴x=۴۲۰\Rightarrow x=۵\Rightarrow AB=۷\ ,\ BC=۱۲$$

محیط $=AB+AC+BC=۷+۱۳+۱۲=۳۲$

۱۵- گزینه «۳» — دشوار

اگر $DC=x$ و $CD'=y$ فرض شود آنگاه $BD=۱۲-x$ و $BD'=۱۲+y$ است.



نیمساز داخلی $AD\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow ۳=\frac{۱۲-x}{x}$

$$\Rightarrow ۳x=۱۲-x\Rightarrow x=۳$$

نیمساز خارجی $AD'\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD'}{CD'}\Rightarrow ۳=\frac{۱۲+y}{y}$

$$\Rightarrow ۳y=۱۲+y\Rightarrow y=۶$$

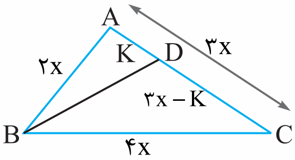
$$DD'=x+y=۳+۶=۹$$

همواره نیمسازهای داخلی و خارجی هر رأس در مثلث بر هم عمودند، پس داریم:

$$AD^۲+AD'^۲=DD'^۲=(۹)^۲=۸۱$$

۱۶- گزینه «۳» — متوسط

اگر فرض کنیم $AD=k$ آنگاه $BD=۳x-k$



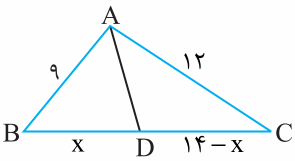
نیمساز $AD\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}\Rightarrow\frac{۲x}{۴x}=\frac{k}{۳x-k}\Rightarrow ۲k=۳x-k\Rightarrow k=x$

می‌دانیم اگر ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{AD}{BC}=\frac{k}{۳x}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

۱۷- گزینه «۳» — متوسط

همواره کوتاه‌ترین نیمساز به بلندترین ضلع وارد می‌شود و اگر فرض کنیم $BD=x$ آنگاه $DC=۱۴-x$ است.



نیمساز $AD\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{۹}{۱۲}=\frac{x}{۱۴-x}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{x}{۱۴-x}$

$$\Rightarrow ۴x=۴۲-۳x\Rightarrow ۷x=۴۲\Rightarrow x=۶$$

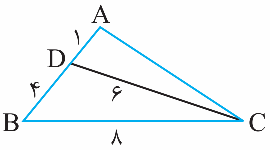
پس $BD=۶$ و $DC=۸$.

$$AD^۲=AB\cdot AC-BD\cdot DC=۹(۱۲)-۶(۸)=۱۰۸-۴۸=۶۰$$

$$\Rightarrow AD=۲\sqrt{۱۵}$$

۱۸- گزینه «۲» — متوسط

مساحت مثلث **DCB** را به کمک قضیه هرون بدست می‌آوریم.



$$۲p=۴+۶+۸=۱۸\Rightarrow p=۹$$

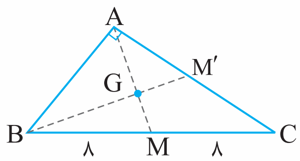
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۹\times۱۳\times۵}=۳\sqrt{۱۵}$$

می‌دانیم اگر ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{DBC}}}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{DBC}}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ADC}}=\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۵}$$

۱۹-گزینه «۴» دشوار

طبق خواص میانه‌ها داریم:



$$BG = \frac{۲}{۳} m_b = \frac{۲}{۳} \times ۱۲ = ۸$$

$$GM = \frac{۱}{۳} m_a = \frac{۱}{۳} \times ۶ = ۲$$

$$BM = MC = \frac{BC}{۲} = ۸$$

به کمک قضیه هرون مساحت مثلث **BGM** را حساب می‌کنیم.

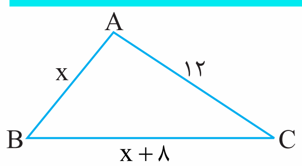
$$۲p = ۸ + ۸ + ۲ = ۱۸ \Rightarrow p = ۹$$

$$S_{\overset{\Delta}{BGM}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۹ \times ۱ \times ۱ \times ۷} = ۳\sqrt{۷}$$

می‌دانیم اگر ۳ میانه یک مثلث را رسم کنیم، ۶ مثلث هم مساحت داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۶S_{\overset{\Delta}{BGM}} = ۶ \times ۳\sqrt{۷} = ۱۸\sqrt{۷}$$

۲۰-گزینه «۱» دشوار



$$۲p = x + ۱۲ + x + ۸ = ۲x + ۲۰ \Rightarrow p = x + ۱۰$$

طبق قضیه هرون داریم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow ۳۰ = \sqrt{(x+۱۰) \times ۲ \times (x-۲) \times ۱۰}$$

$$\Rightarrow ۹۰۰ = ۲۰(x^۲ + ۸x - ۲۰) \Rightarrow ۴۵ = x^۲ + ۸x - ۲۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۸x - ۶۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۱۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۱۳ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

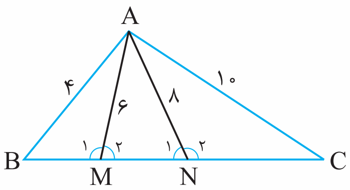
$$p = x + ۵ = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{۳۰}{۱۵} \Rightarrow r = ۲$$

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون پلاس

۱- گزینه «۱»



$$\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \sin\hat{M}_۱ = \sin\hat{M}_۲$$

$$\hat{N}_۱ + \hat{N}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \sin\hat{N}_۱ = \sin\hat{N}_۲$$

به ترتیب شعاع دایره محیطی مثلث‌های **ABM** و **AMN** و **ANC** را $R_۱$ و $R_۲$ و $R_۳$ فرض می‌کنیم.

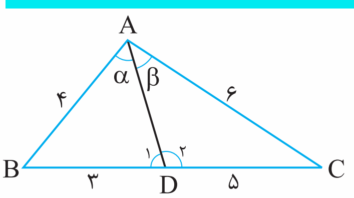
بنا به قضیه **sin**ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABM}: \dfrac{AB}{\sin M_۱} = ۲R_۱ \\ \overset{\Delta}{AMN}: \dfrac{AN}{\sin M_۲} = ۲R_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{AB}{\sin M_۱}}{\frac{AN}{\sin M_۲}} = \frac{۲R_۱}{۲R_۲} \Rightarrow \frac{۴}{۸} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMN}: \dfrac{AM}{\sin N_۱} = ۲R_۲ \\ \overset{\Delta}{ANC}: \dfrac{AC}{\sin N_۲} = ۲R_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{AM}{\sin N_۱}}{\frac{AC}{\sin N_۲}} = \frac{۲R_۲}{۲R_۳} \Rightarrow \frac{۶}{۱۰} = \frac{R_۲}{R_۳} \Rightarrow \frac{R_۲}{R_۳} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{R_۱}{R_۲} \times \frac{R_۲}{R_۳} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۳} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

۲- گزینه «۴»



$$\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = ۱۸۰ \Rightarrow \sin\hat{D}_۱ = \sin\hat{D}_۲$$

طبق قضیه **sin**ها داریم:

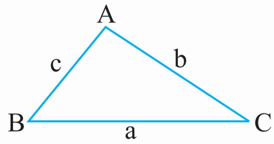
$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{AB}{\sin D_۱} = \frac{BD}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{۴}{\sin D_۱} = \frac{۳}{\sin\alpha} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ADC}: \frac{AC}{\sin D_۲} = \frac{DC}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{۶}{\sin D_۱} = \frac{۵}{\sin\beta} \quad (۲)$$

رابطه (۱) را به رابطه (۲) تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۴}{\sin D_۱}}{\frac{۶}{\sin D_۱}} = \frac{\frac{۳}{\sin\alpha}}{\frac{۵}{\sin\beta}} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۳\sin\beta}{۵\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{۹}{۱۰} = ۰/۹$$

۳- گزینه «۳»



قضیه sin: $\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow a=2R\sin A$

به همین ترتیب $b=2R\sin B$ و $c=2R\sin C$

$$2p=a+b+c \Rightarrow 42=2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C$$

$$\Rightarrow 21=R\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{13}+\frac{15}{26}\right) \Rightarrow 21=R\left(\frac{42}{26}\right) \Rightarrow R=13$$

$$a=2R\sin A=26\times\frac{1}{2}=13$$

$$b=2R\sin B=26\times\frac{7}{13}=14$$

$$c=2R\sin C=26\times\frac{15}{26}=15$$

به کمک قضیه هرون مساحت را بدست می‌آوریم.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21\times6\times7\times8}=84$$

۴- گزینه «۱»

نکته: $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ و

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

قضیه sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 120}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{6(\cos B+\cos C)}{\sin B+\sin C} \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{6\times2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

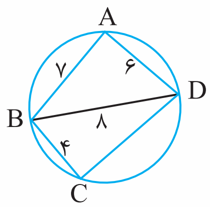
$$\Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}}=6\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}}=6\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)=6\cot\left(\frac{180-A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}}=6\cot\left(90-\frac{A}{2}\right)=6\tan\frac{A}{2}=6\tan60$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3} \Rightarrow 2a=18 \Rightarrow a=9$$

۵- گزینه «۱»

بنا به قضیه cosها در مثلث **ABD** داریم:



$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD\cos A \Rightarrow 64=49+36-2(7)(6)\cos A$$

$$\Rightarrow 84\cos A=21 \Rightarrow \cos A=\frac{1}{4}$$

چون چهارضلعی **ABCD** محاطی است، زاویه مقابل مکمل هستند.

$$\hat{A}+\hat{C}=180 \Rightarrow \cos C=-\cos A \Rightarrow \cos C=-\frac{1}{4}$$

بنا به قضیه cosها در مثلث **BCD** داریم:

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos C$$

$$\Rightarrow 64=16+CD^2-2\times4\times CD\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\xrightarrow{CD=x} x^2+2x-48=0$$

$$\Rightarrow (x+8)(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-8 & \text{غ ق ق} \\ x=6 \Rightarrow CD=6 \end{cases}$$

محیط $ABCD=AB+BC+CD+DA=7+4+6+6=23$

۶- گزینه «۴»

$$a^4-2(b^2+c^2)a^2+c^4+b^2c^2+b^4=0$$

$$\Rightarrow a^4-2(b^2+c^2)a^2+\underline{c^4+2b^2c^2+b^4}-b^2c^2=0$$

$$\Rightarrow \underline{(a^2)^2-2(b^2+c^2)a^2+(b^2+c^2)^2}-b^2c^2=0$$

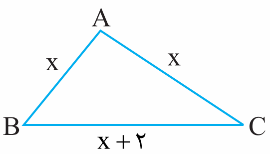
$$\Rightarrow \underline{(a^2-(b^2+c^2))^2}-a^2b^2=0$$

$$\Rightarrow (a^2-b^2-c^2-bc)(a^2-b^2-c^2+bc)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2-c^2-bc=0 \Rightarrow a^2=b^2+c^2+bc \\ \Rightarrow b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc \\ \Rightarrow \cos A=-\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}=120 \\ a^2-b^2-c^2+bc=0 \Rightarrow a^2=b^2+c^2-bc \\ \Rightarrow b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc \\ \Rightarrow \cos A=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A}=60 \end{cases}$$

۷- گزینه «۲»

چون کسینوس یکی از زاویه‌ها منفی است، پس مثلث دارای زاویه منفرجه است و بزرگ‌ترین زاویه مثلث است که روبه‌رو بزرگ‌ترین ضلع مثلث است و بنا به قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=x^2+x^2-2(x)(x)\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4=2x^2+\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2-4x-4=0$$

$$\Rightarrow 5x^2-16x-16=0 \Rightarrow (x-4)(5x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-\frac{4}{5} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

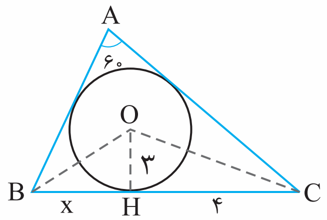
به کمک قضیه هرون مساحت مثلث را حساب می‌کنیم.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{7\times1\times3\times3}=3\sqrt{7}$$

$$r=\frac{S}{p}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

۸- گزینه «۳»

از مرکز دایره محاطی به رئوس **B** و **C** وصل می‌کنیم.



$$\hat{O} = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰ + \frac{۶۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

می‌دانیم **OH** بر **BC** عمود است.

$$\overset{\triangle}{OHC}: OC^۲ = OH^۲ + HC^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow OC = ۵$$

اگر $BH = x$ باشد.

$$\overset{\triangle}{OBH}: OB^۲ = BH^۲ + OH^۲ = x^۲ + ۹ \Rightarrow OB = \sqrt{x^۲ + ۹}$$

در مثلث **OBC** بنا به قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$BC^۲ = OB^۲ + OC^۲ - ۲OB \cdot OC \cos\hat{O}$$

$$\Rightarrow (۴ + x)^۲ = x^۲ + ۹ + ۲۵ - ۲\sqrt{x^۲ + ۹} \times ۵ \times (-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow ۱۶ + ۸x + x^۲ = x^۲ + ۳۴ + ۵\sqrt{x^۲ + ۹} \Rightarrow ۸x - ۱۸ = ۵\sqrt{x^۲ + ۹}$$

$$\Rightarrow ۶۴x^۲ - ۲۸۸x + ۳۲۴ = ۲۵x^۲ + ۲۲۵ \Rightarrow ۳۹x^۲ - ۲۸۸x + ۹۹ = ۰$$

$$\Delta' = (۱۴۴)^۲ - ۳۹ \times ۹۹ = ۲۰۷۳۶ - ۳۸۶۱ = ۱۶۸۷۵ = ۵^۴ \times ۳^۳$$

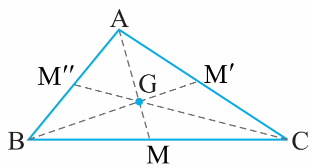
$$\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = ۷۵\sqrt{۳}$$

$$x = \frac{-b' \mp \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{۱۴۴ \mp ۷۵\sqrt{۳}}{۳۹} \xrightarrow{a>۰} x = \frac{۱۴۴ + ۷۵\sqrt{۳}}{۳۹}$$

$$BC = ۴ + x = ۴ + \frac{۱۴۴ + ۷۵\sqrt{۳}}{۳۹} \Rightarrow BC = \frac{۳۰۰ + ۷۵\sqrt{۳}}{۳۹}$$

۹- گزینه «۳»

طبق خواص میانه‌ها داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AG = \frac{۲}{۳}m_a \Rightarrow AG^۲ = \frac{۴}{۹}m_a^۲ \\ BG = \frac{۲}{۳}m_b \Rightarrow BG^۲ = \frac{۴}{۹}m_b^۲ \\ CG = \frac{۲}{۳}m_c \Rightarrow CG^۲ = \frac{۴}{۹}m_c^۲ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AG^۲ + BG^۲ + CG^۲ = \frac{۴}{۹}(m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲) \quad (۱)$$

طبق رابطه میانه‌ها داریم:

$$\left.\begin{array}{l} b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \\ a^۲ + c^۲ = ۲m_b^۲ + \frac{b^۲}{۲} \\ a^۲ + b^۲ = ۲m_c^۲ + \frac{c^۲}{۲} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ = ۲(m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲) + \frac{a^۲}{۲} + \frac{b^۲}{۲} + \frac{c^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲) = ۲(m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲)$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ = \frac{۴}{۳}(m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲) \quad (۲)$$

$$\frac{AG^۲ + BG^۲ + CG^۲}{AB^۲ + AC^۲ + BC^۲} = \frac{\frac{۴}{۹}(m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲)}{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

$$= \frac{\frac{۴}{۹}(a^۲ + b^۲ + c^۲)}{\frac{۴}{۳}(a^۲ + b^۲ + c^۲)} = \frac{۱}{۳}$$

۱۰- گزینه «۲»

$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۲m_a^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴m_a^۲ = ۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲$$

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$a^۲ + ۲\sqrt{۲}bc = ۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲ \Rightarrow ۲a^۲ = ۲b^۲ + ۲c^۲ - ۲\sqrt{۲}bc$$

$$\xrightarrow{\div ۲} a^۲ = b^۲ + c^۲ - \sqrt{۲}bc$$

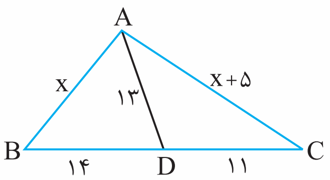
با توجه به قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A = b^۲ + c^۲ - \sqrt{۲}bc$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۴۵$$

۱۱- گزینه «۴»

بنا به قضیه استوارت داریم:



$$BD.AC^۲ + DC.AB^۲ = BC(AD^۲ + BD.DC)$$

$$\Rightarrow ۱۴(x + ۵)^۲ + ۱۱x^۲ = ۲۵(۱۶۹ + ۱۵۴)$$

$$\Rightarrow ۲۵x^۲ + ۱۴۰x + ۳۵۰ = ۲۵(۳۲۳) \xrightarrow{\div ۵} ۵x^۲ + ۲۸x + ۷۰ = ۱۶۱۵$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ + ۲۸x - ۱۵۴۵ = ۰$$

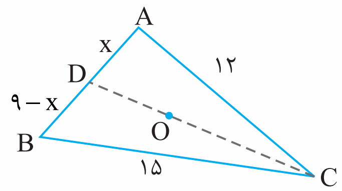
$$\Rightarrow (x - ۱۵)(۵x + ۱۰۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۵ \\ x = -\frac{۱۰۳}{۸} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$۲p = AB + AC + BC \Rightarrow ۲p = x + x + ۵ + ۲۵$$

$$= ۲x + ۳۰ = ۲(۱۵) + ۳۰ = ۶۰$$

۱۲- گزینه «۲»

همواره بلندترین نیمساز به کوتاه‌ترین ضلع مثلث وارد می‌شود و اگر **CD** نیمساز وارد بر ضلع ۹ واحدی باشد، با فرض $AD = x$ و $BD = ۹ - x$ داریم:



$$\text{نیمساز } DC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{x}{۹-x} \Rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{x}{۹-x}$$

$$\Rightarrow ۵x = ۳۶ - ۴x \Rightarrow ۹x = ۳۶ \Rightarrow x = ۴$$

بنابراین $AD = ۴$ و $BD = ۵$ است.

$$CD^۲ = AC \cdot BC - AD \cdot BD = ۱۵ \times ۱۲ - ۴ \times ۵$$

$$= ۱۸۰ - ۲۰ = ۱۶۰ \Rightarrow CD = ۴\sqrt{۱۰}$$

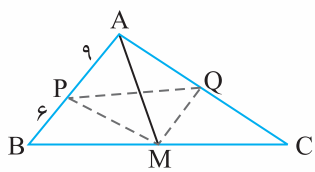
اگر نقطه **O** مرکز دایره محاطی داخلی باشد داریم:

$$\frac{CO}{OD} = \frac{AC+BC}{AB} \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{\overset{۲۷}{\cancel{۱۵+۱۲}}}{۹} \Rightarrow \frac{CO}{OD} = ۳$$

$$\Rightarrow \frac{CO}{CO+OD} = \frac{۳}{۱+۳} \Rightarrow \frac{CO}{CD} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{CO}{۴\sqrt{۱۰}} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow CO = ۳\sqrt{۱۰}$$

۱۳- گزینه «۱»

چون **AM** میانه است پس $S_{\overset{\triangle}{AMB}} = S_{\overset{\triangle}{AMC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\triangle}{ABC}}$ و چون **MP** و **MQ** نیمساز هستند در تمرینات ثابت کردیم $PQ \parallel BC$.



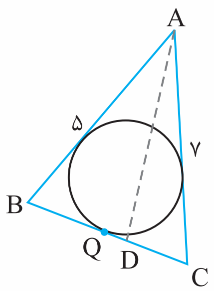
$$\overset{\triangle}{ABC}: PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{۹}{۱۵} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{۳}{۵}$$

می‌دانیم اگر ارتفاع دو مثلث با هم برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMQ}}}{S_{\overset{\triangle}{AMC}}} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMQ}}}{\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMQ}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

۱۴- گزینه «۲»

اگر فرض کنیم $BD = x$ آنگاه $DC = ۴ - x$ است.



$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۵}{۷} = \frac{x}{۴-x}$$

$$\Rightarrow ۷x = ۲۰ - ۵x \Rightarrow ۱۲x = ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳}$$

پس $BD = \frac{۵}{۳}$ و $DC = \frac{۷}{۳}$ است.

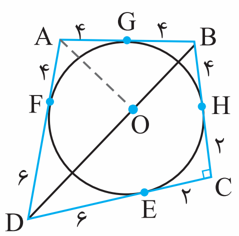
$$۲p = AB + AC + BC = ۵ + ۷ + ۴ = ۱۶ \Rightarrow p = ۸$$

$$BQ = p - AC = ۸ - ۷ = ۱$$

$$QD = BD - BQ = \frac{۵}{۳} - ۱ = \frac{۲}{۳}$$

۱۵- گزینه «۴»

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر است.



$AG = AF = ۴$ $\quad$ $BG = BH = ۴$

$CH = CE = ۲$ $\quad$ $DE = DF = ۶$

می‌دانیم مرکز دایره محاطی چهار ضلعی، محل همرأسی نیمسازها است پس اگر **A** را به **O** وصل کنیم **OA** نیمساز زاویه **A** است.

$$\overset{\triangle}{BCD}: DB^۲ = BC^۲ + DC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow DB = ۱۰$$

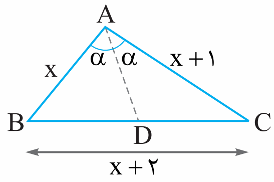
اگر فرض کنیم $DO = x$ آنگاه $OB = ۱۰ - x$ است.

$$\text{نیمساز } AO \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DO}{OB} \Rightarrow \frac{۱۰}{۸} = \frac{x}{۱۰-x}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۴} = \frac{x}{۱۰-x} \Rightarrow ۴x = ۵۰ - ۵x \Rightarrow ۹x = ۵۰ \Rightarrow x = \frac{۵۰}{۹}$$

۱۶- گزینه «۴»

اگر $AB=x$ و $AC=x+۱$ و $BC=x+۲$ است. چون $BC>AC>AB$ است پس $\hat A>\hat B>\hat C$ است که بنا به فرض مسئله ($\hat A=۲\hat C$)، $\hat A=۲\alpha$ و $\hat C=\alpha$ است. نیمساز **AD** را رسم می‌کنیم.



$$AD\Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{VD}{BD}\Rightarrow\frac{x+۱}{x}=\frac{DC}{BD}\Rightarrow\frac{۲x+۱}{x}=\frac{DC+BD}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{۲x+۱}{x}=\frac{x+۲}{BD}\Rightarrow BD=\frac{x(x+۲)}{۲x+۱}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat B=\hat B\\ \widehat{BAD}=\hat C=\alpha\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{BAD}\sim\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow AB^۲=BD\cdot BC\Rightarrow x^۲=\frac{x(x+۲)}{۲x+۱}\times(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\div x} x(۲x+۱)=(x+۲)^۲\Rightarrow ۲x^۲+x=x^۲+۴x+۴$$

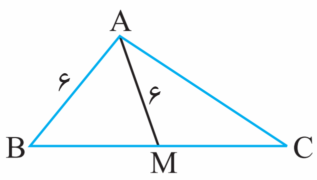
$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۴\\x=-۱ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس $AB=۴$ و $AC=۵$ و $BC=۶$ است و می‌دانیم **A** بزرگ‌ترین زاویه مثلث است.

$BC^۲<AC^۲+AB^۲\Rightarrow A<۹۰\Rightarrow$ نقطه همرسی ارتفاع‌ها داخل مثلث است

۱۷- گزینه «۴»

بنا به قضیه میانه‌ها داریم:



$$b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}\Rightarrow b^۲+۳۶=۷۲+\frac{a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow b^۲=۳۶+\frac{a^۲}{۲}$$

بنا به قضیه **cos**ها داریم:

$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C\Rightarrow ۳۶=a^۲+۳۶+\frac{a^۲}{۲}-۲ab\cos C$$

$$\Rightarrow\frac{۳a^۲}{۲}=۲ab\cos C\Rightarrow ۳a=۴b\cos C\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۴}{۳}\cos C \quad (۱)$$

قضیه sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\quad(۲)$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{۴}{۳}\cos C\Rightarrow \sin B\cos C=\frac{۳}{۴}\sin A\quad(۳)$$

می‌دانیم $\sin\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$ می‌باشد. حال با توجه به رابطه (۳) داریم:

$$\frac{۳}{۴}\sin A=\frac{۱}{۲}(\sin(B+C)+\sin(B-C))$$

$$\Rightarrow\frac{۳}{۴}\sin A=\frac{۱}{۲}(\sin(۱۸۰-A)+\sin ۳۰)$$

$$\frac{۳}{۴}\sin A=\frac{۱}{۲}\sin A+\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{۴}\sin A=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin A=۱$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است پس:

$$AM=\frac{BC}{۲}\Rightarrow ۶=\frac{BC}{۲}\Rightarrow BC=۱۲$$

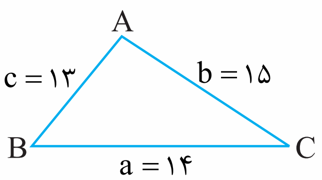
$$BC^۲=AB^۲+AC^۲\Rightarrow ۱۴۴=۳۶+AC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲=۱۰۸\Rightarrow AC=۶\sqrt{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\sqrt{۳}\Rightarrow S=۱۸\sqrt{۳}$$

۱۸- گزینه «۲»

با استفاده از قانون هرون مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.



$$۲p=a+b+c=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲\Rightarrow p=۲۱$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۲۱\times۶\times۷\times۸}\Rightarrow S=۸۴$$

شعاع دایره محیطی از دستور $R=\frac{abc}{۴S}$ بدست می‌آید.

$$R=\frac{abc}{۴S}=\frac{۱۳\times۱۴\times۱۵}{۴\times۸۴}=\frac{۶۵}{۸}$$

۱۹-گزینه «۱»

$$۲p = AB + AC + BC = ۷ + ۹ + ۱۰ = ۲۶ \Rightarrow p = ۱۳$$

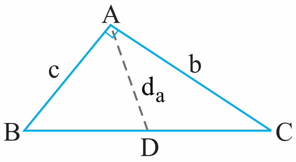
می‌دانیم $r_a = \frac{S}{p-a}$ و $r_b = \frac{S}{p-b}$ و $r_c = \frac{S}{p-c}$ است.

$$r_a \cdot r_b + r_a \cdot r_c + r_b \cdot r_c = \frac{s}{P-a} \times \frac{s}{p-b} + \frac{s}{p-a} \times \frac{s}{p-c} + \frac{s}{p-b} \times \frac{s}{p-c}$$

$$= S^۲ \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{(p-a)(p-b)(p-c)}\right) = S^۲ \times \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c) \times \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = p^۲ = (۱۳)^۲ = ۱۶۹$$

۲۰- گزینه «۳»



$$S = \frac{۱}{۲}bc \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱}{۲}bc \Rightarrow bc = ۱۰۰$$

می‌دانیم طول نیمساز از رابطه $d_a = \frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$ بدست می‌آید.

$$۵\sqrt{۲} = \frac{۲ \times ۱۰۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{b+c} \Rightarrow b+c = ۲۰ \Rightarrow (b+c)^۲ = ۴۰۰$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ + ۲bc = ۴۰۰ \Rightarrow a^۲ + ۲۰۰ = ۴۰۰ \Rightarrow a = ۱۰\sqrt{۲}$$

$$h_a = \frac{bc}{a} = \frac{۱۰۰}{۱۰\sqrt{۲}} = ۵\sqrt{۲}$$