

متوسط

-۴

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ فرض: $AB = CD$

از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ \text{فرض } AB = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD$$

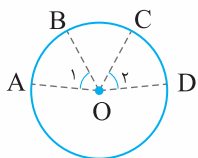
$$\xrightarrow{\text{ا.م.}} \widehat{OA_1} = \widehat{OA_2} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

عکس قضیه:

حکم: $AB = CD$ فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{OA_1} = \widehat{AB} \text{ مرکزی} \\ \widehat{OA_2} = \widehat{CD} \text{ مرکزی} \\ \text{فرض: } \widehat{AB} = \widehat{CD} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{OA_1} = \widehat{OA_2}$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC = R \\ \widehat{OA_1} = \widehat{OA_2} \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{ا.م.}} AB = CD$$



متوسط

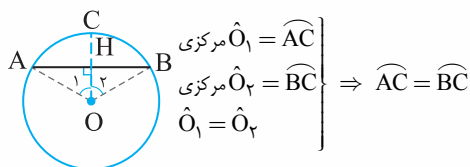
-۵

فرض: $\widehat{H} = 90^\circ$

$$\text{حکم: } \left\{ \begin{array}{l} AH = HB \\ \widehat{AC} = \widehat{BC} \end{array} \right.$$

از O به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \text{وتر یک ضلع } OH = OH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} \triangle OAH \cong \triangle OHB \xrightarrow{\text{ا.م.}} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{OA_1} = \widehat{OA_2} \\ AH = HB \end{array} \right.$$



متوسط

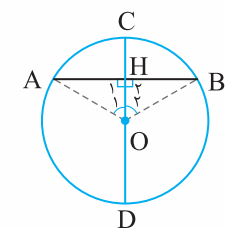
-۶

فرض: $AH = HB$

$$\text{حکم: } \left\{ \begin{array}{l} \widehat{AC} = \widehat{BC} \\ H = 90^\circ \end{array} \right.$$

O را به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \text{مشترب } OH = OH \\ \text{فرض: } AH = HB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAH \cong \triangle OHB \xrightarrow{\text{ا.م.}} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{OA_1} = \widehat{OA_2} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{OA_1} = \widehat{AC} \text{ مرکزی} \\ \widehat{OA_2} = \widehat{BC} \text{ مرکزی} \\ \widehat{OA_1} = \widehat{OA_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC}$$



آسان

-۱

آ قطر

ب) نزدیک‌تر

پ) نصف

ت) نصف

ث) 60°

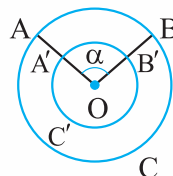
آسان

-۲

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha \pi R}{180} \Rightarrow 3\pi = \frac{\alpha \pi \times 6}{180} \Rightarrow 3 = \frac{\alpha}{30} \Rightarrow \alpha = 90$$

$$|\widehat{A'B'}| = \frac{\alpha \pi R'}{180} \Rightarrow 2\pi = \frac{90 \pi R'}{180} \Rightarrow R' = 4$$

$$S' = \pi R'^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$$



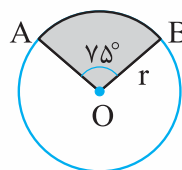
آسان

-۳

$$\text{محیط} = 2\pi r \Rightarrow 12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6$$

$$S = \frac{\alpha \pi r^2}{360} = \frac{75 \pi \times 36}{360} = 7.5\pi$$

$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha \pi r}{180} = \frac{75 \pi \times 6}{180} = \frac{5\pi}{2}$$



دشوار

-۱۱

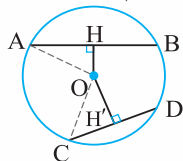
$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$ را به O و C وصل می‌کنیم.

$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2}$$

$$OH' \perp CD \Rightarrow CH' = H'D = \frac{CD}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta OAH : R^2 = AH^2 + OH^2 \\ \Delta OH'C : R^2 = CH'^2 + OH'^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AH^2 + OH^2 = CH'^2 + OH'^2 \quad (1)$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow AH > CH' \Rightarrow AH^2 > CH'^2 \xrightarrow{(1)} OH^2 < OH'^2$$



$$\Rightarrow OH < OH' \Rightarrow OH < OH'$$

$$\Rightarrow OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{(1)} AH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow AH > CH' \Rightarrow 2AH > 2CH' \Rightarrow AB > CD$$

دشوار

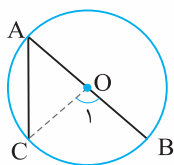
-۱۲

قضیه را در ۳ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت اول: یک ضلع زاویه قطر دایره باشد:

$OA = OC \xrightarrow{\text{مساوی الساقین}} \hat{A} = \hat{C}$ را به C وصل می‌کنیم.

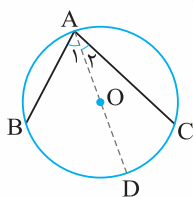
$$\left. \begin{array}{l} \Delta OAC : \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \\ \hat{O}_1 \text{ مرکزی} = \widehat{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\hat{A} = \widehat{BC} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



حالت دوم: مرکز دایره بین دو ضلع زاویه A باشد.

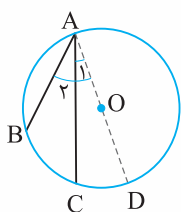
قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ : طبق حالت اول} \\ \hat{A}_2 = \frac{\widehat{DC}}{2} \text{ : طبق حالت اول} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



حالت سوم: مرکز دایره خارج اضلاع زاویه باشد:

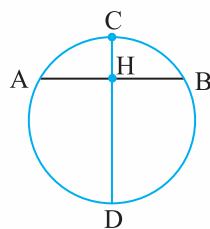
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ : طبق حالت اول} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2} \text{ : طبق حالت اول} \end{array} \right\} \xrightarrow{-} \hat{A}_2 - \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD} - \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$



آسان

-۷

کافی است از نقطه C وسط کمان AB به نقطه H وسط وتر AB وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. پاره خط CD قطر دایره است که بر AB عمود است.

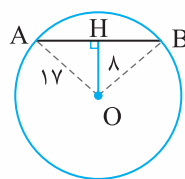


آسان

-۸

از O به A وصل می‌کنیم $OA = R = ۱۷$

چون از O به وتر AB عمود کرده‌ایم $AH = HB$



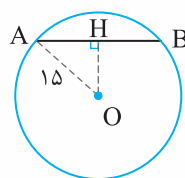
$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 289 = AH^2 + 64 \Rightarrow AH^2 = 225$$

$$\Rightarrow AH = 15 \Rightarrow AB = 2AH = 2(15) = 30$$

آسان

-۹

از مرکز دایره به وسط AB عمود کرده‌ایم. پس $AH = HB = \frac{AB}{2} = ۱۲$



$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 225 = 144 + OH^2$$

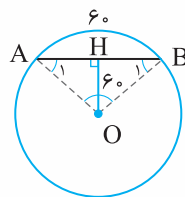
$$\Rightarrow OH^2 = 81 \Rightarrow OH = 9$$

متوسط

-۱۰

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \xrightarrow{\text{مساوی الساقین}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{O} = 60^\circ \\ \xrightarrow{\text{مساوی الاضلاع}} AB = OA = ۱0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 60^\circ$$

از O به AB عمود می‌کنیم $AH = HB = ۵$



$$\Delta OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 100 = 25 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = 75$$

$$\Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$$

متوسط

-۱۶

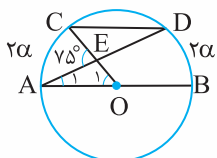
$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

$$\text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AC} = 2\alpha \quad \text{محاطی } \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} = \alpha$$

$$\triangle AOE: \hat{E} = \hat{A}_1 + \hat{O}_1 \Rightarrow 75^\circ = 2\alpha + \alpha = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 25^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \widehat{CD} + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 4(25^\circ) \Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$$



متوسط

-۱۷

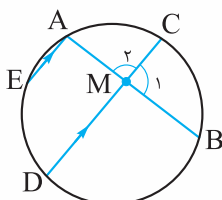
$$\text{حکم: } \begin{cases} \hat{M}_1 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} \\ \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \end{cases}$$

از نقطه A موازی DC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$$AE \parallel DC \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{ED}$$

$$AE \parallel DC, \text{ مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{M}_2 = \hat{A} \quad \left. \begin{aligned} \hat{A} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{ED} + \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M}_2 = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

$$\hat{M}_1 = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} \quad \text{به همین ترتیب}$$



متوسط

-۱۸

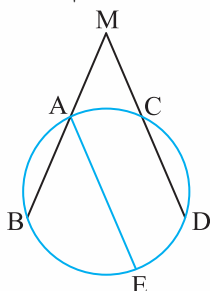
$$\text{حکم: } \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$

از نقطه A موازی CD رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$$ME \parallel MD, \text{ مورب } BM \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{M} \quad (1)$$

$$AE \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{ED} \quad (2)$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BE}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{DE}}{2} \xrightarrow{(2)} \hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2}$$



آسان

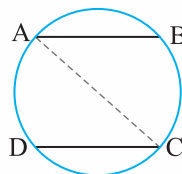
-۱۳

فرض: $AB \parallel DC$

حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$

از A به C وصل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} AB \parallel DC, \text{ مورب } AC &\xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} & \\ \hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} & \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$



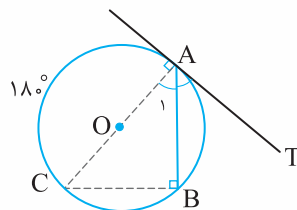
دشوار

-۱۴

$$\text{حکم: } \hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه C قطع کند، C را به B وصل

می‌کنیم چون B زاویه محاطی رو به قطر است پس $\hat{B} = 90^\circ$.



می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس به خط مماس عمود است.

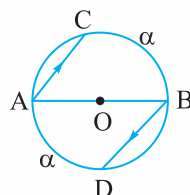
$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 + \hat{A} = 90^\circ &\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{A}_1 \\ \triangle ABC: \hat{A}_1 + 90^\circ + \hat{C} = 180^\circ &\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \hat{A}_1 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

آسان

-۱۵

$$AC \parallel BC \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} = \alpha$$



$$\left. \begin{aligned} \widehat{AC} + \widehat{BC} &= 180^\circ \\ \widehat{BD} + \widehat{AD} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} = \widehat{BD} + \widehat{AD} \Rightarrow$$

$$\widehat{AC} + \alpha = \widehat{BD} + \alpha \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

می‌دانیم وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند. برابر $AC = BD$

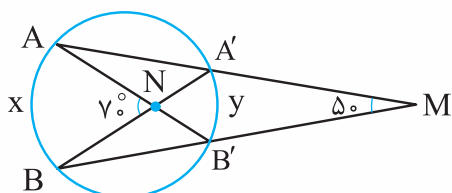
متوسط

-۲۲

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x - y = 100$$

$$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{A'B'}}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 140$$

$$\begin{cases} x - y = 100 \\ x + y = 140 \end{cases} \Rightarrow 2x = 240 \Rightarrow x = 120, y = 20$$



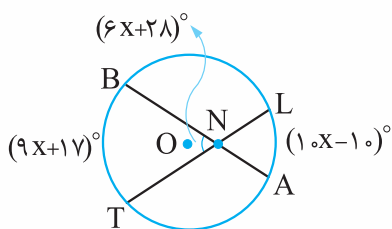
آسان

-۲۳

$$\hat{N} = \frac{\widehat{BT} + \widehat{AL}}{2} \Rightarrow 6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$

$$\Rightarrow 12x + 56 = 19x + 7 \Rightarrow 7x = 49 \Rightarrow x = 7$$

$$\widehat{BNT} = 6x + 28 = 6(7) + 28 = 42 + 28 \Rightarrow \widehat{BNT} = 70^\circ$$



متوسط

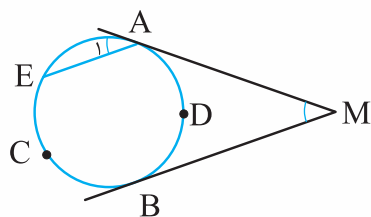
-۲۴

از نقطه A موازی MB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه E قطع کند:

$$\left. \begin{aligned} ME \parallel MB, \text{ مورب } MA &\xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{M} = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 \text{ ظلی } &= \frac{\widehat{AE}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{AE}}{2}$$

$$AE \parallel MB \Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ECB} \quad (1)$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ECB}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$



دشواری

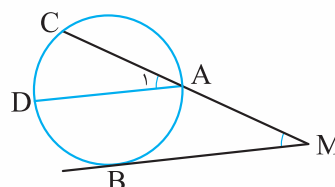
-۱۹

از A موازی MB رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.

$$AD \parallel MB \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DB} \quad (1)$$

$$AD \parallel MB, \text{ مورب } AC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{M} = \hat{A} \quad (2)$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \xrightarrow{(2)} \hat{M} = \frac{\widehat{CB} - \widehat{DB}}{2} \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{CB} - \widehat{AB}}{2}$$



متوسط

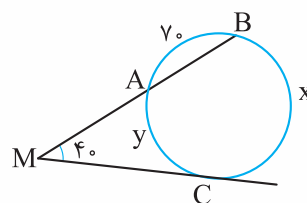
-۲۰

اگر $\widehat{BC} = x$ و $\widehat{AC} = y$ باشد:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 360 \Rightarrow 70 + x + y = 360 \Rightarrow x + y = 290$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 40 = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x - y = 80$$

$$\begin{cases} x + y = 290 \\ x - y = 80 \end{cases} \Rightarrow 2x = 370 \Rightarrow x = 185 \Rightarrow y = 105$$

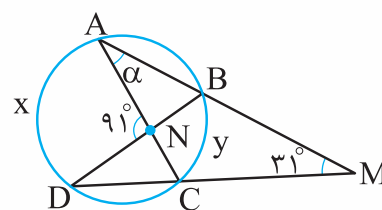


متوسط

-۲۱

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 31 = \frac{x - y}{2} \Rightarrow x - y = 62$$

$$N = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 91 = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x + y = 182$$



$$\begin{cases} x - y = 62 \\ x + y = 182 \end{cases} \Rightarrow 2x = 244 \Rightarrow x = 122, y = 60$$

$$\hat{\alpha} = \frac{y}{2} = \frac{60}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

دشوار

-۲۸

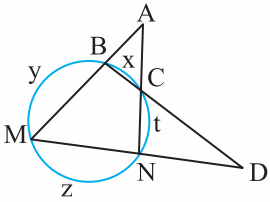
$$\hat{A} = \frac{z-x}{2} \quad (1)$$

$$\hat{D} = \frac{y-t}{2} \quad (2)$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BN}}{2} = \frac{x+t}{2} \quad (3) \quad \text{محاطی}$$

از رابطه (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\hat{A} + \hat{D} + 2\hat{M} = \frac{z-x+y-t+2x+2t}{2} = \frac{z+y+x+t}{2} = \frac{360}{2} = 180.$$



دشوار

-۲۹

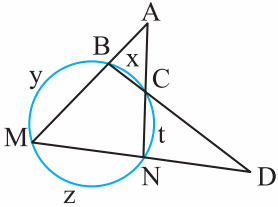
$$\hat{A} = \frac{z-x}{2} \Rightarrow 40 = \frac{z-x}{2} \Rightarrow z-x = 80 \Rightarrow z = 80 + x \quad (1)$$

$$\hat{D} = \frac{y-t}{2} \Rightarrow 30 = \frac{y-t}{2} \Rightarrow y-t = 60 \Rightarrow y = 60 + t \quad (2)$$

$$\text{می دانیم: } x + y + z + t = 360 \Rightarrow x + (60 + t) + (80 + x) + t = 360.$$

$$\Rightarrow 2x + 2t + 140 = 360 \Rightarrow 2x + 2t = 220 \Rightarrow x + t = 110.$$

$$\text{محاطی } \hat{M} = \frac{x+t}{2} = \frac{110}{2} \Rightarrow \hat{M} = 55$$



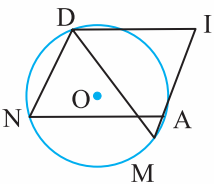
دشوار

-۳۰

$$\left. \begin{aligned} \hat{N} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \hat{M} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{N} \Rightarrow \hat{M} = \hat{I}$$

$$\text{DIAN متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{N} = \hat{I}$$

$$\Delta \text{ DMI: } \hat{M} = \hat{I} \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} DM = DI$$

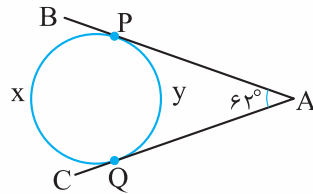


آسان

-۲۵

$$\hat{A} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 62 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 124$$

$$\begin{cases} x-y=124 \\ x+y=360 \end{cases} \Rightarrow 2x=484 \Rightarrow x=242, y=118$$



دشوار

-۲۶

$$\hat{B} = \frac{\widehat{QMP} - \widehat{QP}}{2} \Rightarrow 80 = \frac{y+z+t-x}{2} \Rightarrow y+z+t-x = 160 \quad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{MQN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 70 = \frac{y+x+t-z}{2} \Rightarrow y+x+t-z = 140 \quad (2)$$

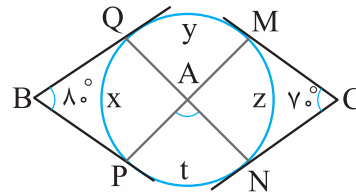
رابطه (۱) را با رابطه (۲) جمع می کنیم.

$$2y + 2t = 300 \Rightarrow y + t = 150.$$

دو وتر MP و QN همدیگر را داخل دایره در نقطه A قطع کرده اند پس

داریم:

$$\hat{A} = \frac{y+t}{2} = \frac{150}{2} \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ$$



دشوار

-۲۷

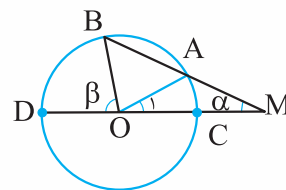
$$OA = AM = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{O}_1 = \hat{A} = \alpha$$

$$\text{مرکزی } \widehat{BOD} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{BD} = \beta$$

$$\text{مرکزی } \hat{O}_1 = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = \alpha$$

دو وتر AB و DC همدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کرده اند.

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{1} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = \beta - \alpha \Rightarrow \beta = 3\alpha$$



دشوار

۴- گزینه «۲»

اگر اندازه زاویه مرکزی کمانی α رادیان باشد طول آن کمان αR است.

$$|\widehat{AB}| = |\widehat{A'B'}| \Rightarrow \alpha R = \alpha' R' \Rightarrow \frac{\pi}{6} \times R = \frac{\pi}{4} \times R'$$

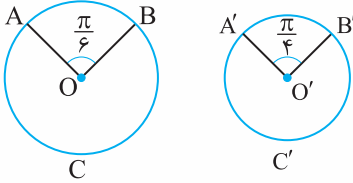
$$\Rightarrow R = \frac{3}{4} R'$$

$$S - S' = 20\pi \Rightarrow \pi R^2 - \pi R'^2 = 20\pi \xrightarrow{\div \pi} R^2 - R'^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} R'^2 = 20 \Rightarrow R'^2 = 16 \Rightarrow R' = 4$$

$$R = \frac{3}{4} R' = \frac{3}{4} \times 4 \Rightarrow R = 3$$

$$R + R' = 7$$



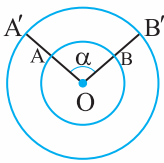
آسان

۵- گزینه «۲»

روش اول:

$$|\widehat{AB}| = \alpha R \Rightarrow 5 = \alpha \times 4 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4} \text{ Rad}$$

$$|\widehat{A'B'}| = \alpha R' \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = \frac{5}{4} \times 12 \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = 15$$



روش دوم:

$$\frac{|\widehat{A'B'}|}{|\widehat{AB}|} = \frac{\alpha R'}{\alpha R} \Rightarrow \frac{|\widehat{A'B'}|}{5} = \frac{12}{4} \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = 15$$

دشوار

۶- گزینه «۳»

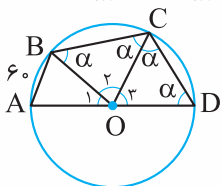
در این دایره AD قطر است که $R = 4 \Rightarrow 2R = 8$ و چون $AB = R$ است، پس $|\widehat{AB}| = 60^\circ$ است.

O را به B وصل می‌کنیم ($\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{AO} = \widehat{BO}$ مرکزی) و چون OC نیمساز زاویه C است پس $\widehat{DCO} = \widehat{BCO} = \alpha$.

$$\begin{cases} \triangle AOC : OC = OD = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{OCD} = \widehat{O} = \alpha \\ \triangle OCB : OC = OB = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{OCB} = \widehat{B} = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{O} = \widehat{B} = 60^\circ$$

$$|\widehat{CD}| = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{60 \times \pi \times 4}{180} = \frac{4}{3} \pi$$



سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۱

آسان

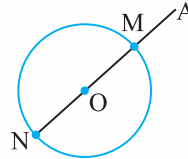
۱- گزینه «۳»

دو حالت وجود دارد:

حالت اول: نقطه A خارج دایره باشد.

$$\begin{cases} AM = AO - R = 3 \\ AN = AO + R = 7 \end{cases} \Rightarrow AO = 5, R = 2$$

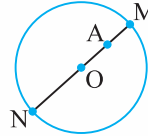
$$S = \pi R^2 = 4\pi$$



حالت دوم: نقطه A داخل دایره باشد.

$$\begin{cases} AM = R - OA = 3 \\ AN = R + OA = 7 \end{cases}, R = 5, AO = 2$$

$$S = \pi R^2 = 25\pi$$

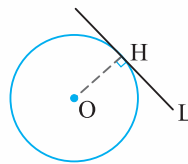


آسان

۲- گزینه «۲»

اگر خط L بر دایره مماس باشد، در این صورت فاصله خط L تا مرکز برابر شعاع دایره است.

$$OH = R \Rightarrow 3m - 4 = 11 \Rightarrow 3m = 15 \Rightarrow m = 5$$



متوسط

۳- گزینه «۴»

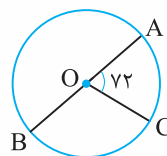
اگر اندازه زاویه کمانی α درجه باشد، طول آن کمان $\frac{\alpha \pi R}{180}$ است.

$$|\widehat{AC}| = \frac{72 \times \pi \times 12}{180} \Rightarrow |\widehat{AC}| = \frac{4}{\pi}$$

$$\widehat{AC} + \widehat{BC} = 180 \Rightarrow 72 + \widehat{BC} = 180 \Rightarrow \widehat{BC} = 108$$

$$|\widehat{BC}| = \frac{108 \times \pi \times 12}{180} = \frac{7}{2} \pi$$

$$|\widehat{AC}| - |\widehat{BC}| = \frac{4}{\pi} - \frac{7}{2} \pi = \frac{2}{4\pi}$$



دشوار

۱۱- گزینه ۴»

$$AB = R \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 2\alpha$$

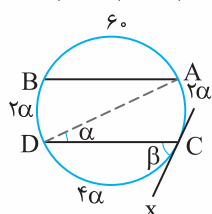
$$AB \parallel BC \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

$$\widehat{CD} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 2\beta \xrightarrow{\beta=2\alpha} \widehat{DC} = 4\alpha$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{CA} = 360^\circ \Rightarrow 60 + 2\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 360$$

$$\Rightarrow 8\alpha = 300 \Rightarrow \alpha = 37.5^\circ$$

$$\widehat{BD} = 2\alpha = 2(37.5) = 75^\circ$$



دشوار

۱۲- گزینه ۳»

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} = \widehat{CF} = x$$

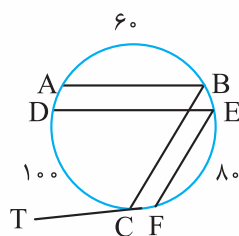
$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{FC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360$$

$$\Rightarrow 60 + x + 80 + x + 100 + x = 360 \Rightarrow 3x + 240 = 360$$

$$\Rightarrow 3x = 120 \Rightarrow x = 40$$

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{CDB}}{2} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{DA} + \widehat{AB}}{2} = \frac{100 + 40 + 60}{2} = \frac{200}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCT} = 100$$



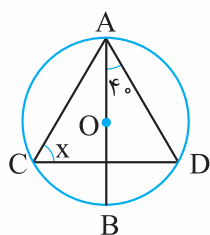
آسان

۱۳- گزینه ۲»

$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow 40 = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 80$$

$$AB \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{AD} = 180 \Rightarrow 80 + \widehat{AD} = 180 \Rightarrow \widehat{AD} = 100$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow x = \frac{100}{2} \Rightarrow x = 50$$



آسان

۷- گزینه ۴»

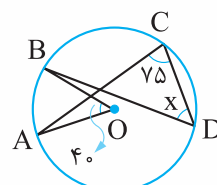
$$\widehat{O} = \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AB} = 40^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow 75 = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 150$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2x$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360 \Rightarrow 40 + 2x + 68 + 150 = 360$$

$$\Rightarrow 2x = 102 \Rightarrow x = 51$$

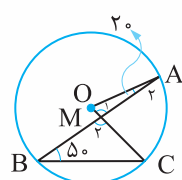


متوسط

۸- گزینه ۴»

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = 100$$

$$\widehat{O} = \widehat{AC} = 100^\circ$$



$$\widehat{A} + \widehat{O} + \widehat{M}_1 = 180 \Rightarrow 100 + 100 + \widehat{M}_1 = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = 60 \xrightarrow{\text{مقابل به راس}} \widehat{M}_2 = 60$$

$$\widehat{M}_2 + \widehat{B} + \widehat{C} = 180 \Rightarrow 60 + 50 + \widehat{C} = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = 70$$

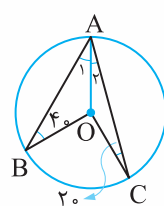
دشوار

۹- گزینه ۱»

A را به O وصل می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle OAB : OA = OB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{A}_1 = \widehat{B} = 40^\circ \\ \triangle OAC : OA = OC \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \widehat{A}_2 = \widehat{C} = 20^\circ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 60^\circ$$



$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 60 = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 120$$

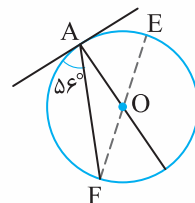
$$|\widehat{BC}| = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{120 \cdot \pi \times 12}{180} \Rightarrow |\widehat{BC}| = 8\pi$$

آسان

۱۰- گزینه ۱»

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow 56 = \frac{\widehat{AF}}{2} \Rightarrow \widehat{AF} = 112$$

$$EF \text{ قطر} \Rightarrow \widehat{AF} + \widehat{AE} = 180 \Rightarrow 112 + \widehat{AE} = 180 \Rightarrow \widehat{AE} = 68$$



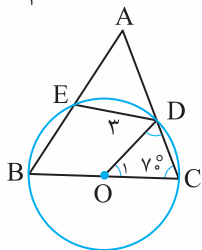
متوسط

۱۷- گزینه «۳»

چون $DE = R = 3$ است پس $\widehat{DE} = 60^\circ$.
O را به **D** وصل می‌کنیم.

$$\triangle ODC : OD = OC = R \xrightarrow{\text{مساوی الساقین}} \hat{C} = \hat{D} = 70^\circ$$

$$\hat{O}_1 + \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 40^\circ$$



$$\xrightarrow{\text{مرکزی } \hat{O}_1} \widehat{DC} = 40^\circ$$

$$\widehat{EDC} = \widehat{ED} + \widehat{DC} = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$$

دشوار

۱۸- گزینه «۴»

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BF} = 15^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{DC} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x + 15 + 100 + y + 80 + 15 = 360 \Rightarrow x + y + 210 = 360$$

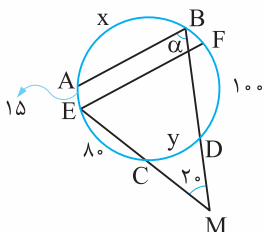
$$\Rightarrow x + y = 150$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BE} - \widehat{DC}}{2} \Rightarrow 20 = \frac{x + 15 - y}{2} \Rightarrow x - y + 15 = 40 \Rightarrow x - y = 25$$

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ x - y = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 87.5, y = 62.5$$

$$\text{محاطی } \hat{ABD} = \frac{\widehat{DC} + \widehat{CE} + \widehat{EA}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{62.5 + 80 + 15}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 78.75^\circ$$



متوسط

۱۹- گزینه «۲»

$$\text{محاطی } \hat{B} = \frac{\widehat{FD}}{2} \Rightarrow 35 = \frac{\widehat{FD}}{2} \Rightarrow \widehat{FD} = 70^\circ$$

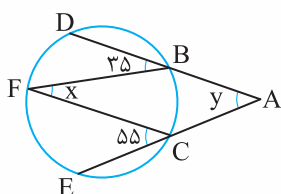
$$\text{محاطی } \hat{C} = \frac{\widehat{FE}}{2} \Rightarrow 55 = \frac{\widehat{FE}}{2} \Rightarrow \widehat{FE} = 110^\circ$$

$$\widehat{DE} = \widehat{DF} + \widehat{FE} = 70 + 110 = 180^\circ$$

$$\hat{F} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 2x$$

دو وتر **BD** و **EC** همدیگر را در نقطه **A** خارج دایره قطع کرده‌اند.

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow y = \frac{180 - 2x}{2} \Rightarrow y = 90 - x \Rightarrow y + x = 90$$



متوسط

۱۴- گزینه «۲»

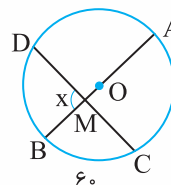
$$\text{قطر } AB \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{AC} = 180^\circ \Rightarrow 60 + \widehat{AC} = 180 \Rightarrow \widehat{AC} = 120^\circ$$

$$\widehat{AC} = \frac{3}{2} \widehat{AD} \Rightarrow 120 = \frac{3}{2} \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AD} = 80^\circ$$

دو وتر **AB** و **CD** همدیگر را داخل دایره در نقطه **M** قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:

$$\hat{AMD} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{80 + 60}{2} \Rightarrow \hat{AMD} = 70^\circ$$

$$\Rightarrow x = 180 - 70 \Rightarrow x = 110$$



آسان

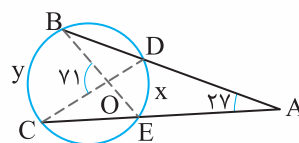
۱۵- گزینه «۱»

روش اول: اگر فرض کنیم $\widehat{BC} = y$ و $\widehat{DE} = x$ است:

$$\hat{O} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 71 = \frac{y + x}{2} \Rightarrow y + x = 142$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow 27 = \frac{y - x}{2} \Rightarrow y - x = 54$$

$$\begin{cases} y + x = 142 \\ y - x = 54 \end{cases} \Rightarrow y = 98, x = 44$$



روش دوم: در این مدل سوالات همواره $\widehat{DE} = \hat{O} - \hat{A}$ و $\widehat{BC} = \hat{O} + \hat{A}$

است، پس داریم:

$$\widehat{BC} = 71 + 27 = 98$$

متوسط

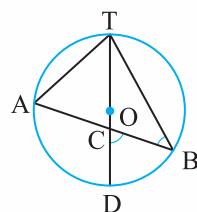
۱۶- گزینه «۱»

$$\text{محاطی } \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \Rightarrow 35 = \frac{\widehat{AT}}{2} \Rightarrow \widehat{AT} = 70^\circ$$

$$\text{محاطی } \hat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2} \Rightarrow 65 = \frac{\widehat{TB}}{2} \Rightarrow \widehat{TB} = 130^\circ$$

$$\text{قطر } TD \Rightarrow \widehat{TB} + \widehat{BD} = 180^\circ \Rightarrow 130 + \widehat{BD} = 180 \Rightarrow \widehat{BD} = 50^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AT} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow \hat{C} = \frac{70 + 50}{2} \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

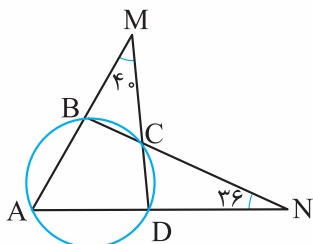


متوسط

۲۳- گزینه «۳»

در این شکل رابطه $\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180$ برقرار است (اثبات تمرین ۲۸)

$$2\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180 \Rightarrow 2\hat{A} + 40 + 36 = 180 \Rightarrow 2\hat{A} = 104 \Rightarrow \hat{A} = 52^\circ$$

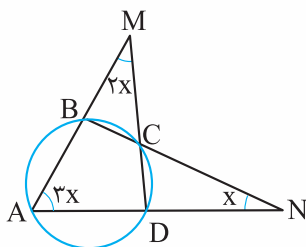


متوسط

۲۴- گزینه «۴»

با توجه به تمرین ۲۸، ثابت کردیم $2\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180$ است پس داریم:

$$2\hat{A} + \hat{M} + \hat{N} = 180 \Rightarrow 6x + 2x + x = 180 \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow x = 20$$



دشوار

۲۵- گزینه «۳»

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CDE} - \widehat{EC}}{2} \Rightarrow 80 = \frac{y + z + t - x}{2} \Rightarrow y + z + t - x = 160$$

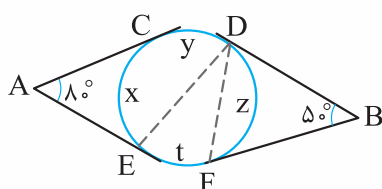
$$\begin{cases} y + z + t - x = 160 \\ y + z + t + x = 360 \end{cases} \Rightarrow x = 100^\circ$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{DCF} - \widehat{DF}}{2} \Rightarrow 50 = \frac{y + x + t - z}{2} \Rightarrow \begin{cases} y + x + t - z = 100 \\ y + x + t + z = 360 \end{cases} \Rightarrow z = 130^\circ$$

$$CD = R \Rightarrow \widehat{CD} = 60^\circ, y = 60^\circ$$

$$x + y + z + t = 360 \Rightarrow 100 + 60 + 130 + t = 360 \Rightarrow t = 70$$

$$\text{محاطی } \hat{D} = \frac{t}{2} = \frac{70}{2} \Rightarrow \hat{D} = 35^\circ$$



متوسط

۲۰- گزینه «۲»

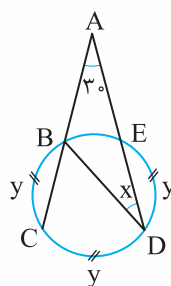
$$\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = y$$

$$\text{محاطی } \hat{D} = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow x = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow \widehat{BE} = 2x$$

$$\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{CD} + \widehat{CB} = 360 \Rightarrow y + y + y + 2x = 360 \Rightarrow 3y + 2x = 360$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow 30 = \frac{y - 2x}{2} \Rightarrow y - 2x = 60$$

$$\begin{cases} 3y + 2x = 360 \\ y - 2x = 60 \end{cases} \Rightarrow y = 105, x = 22.5$$



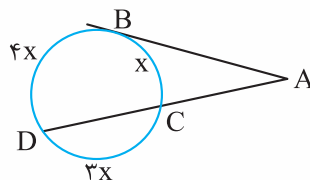
آسان

۲۱- گزینه «۱»

$$\widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{CB} = 360 \Rightarrow 4x + 3x + x = 360$$

$$\Rightarrow 8x = 360 \Rightarrow x = 45^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{BC}}{2} = \frac{4x - x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}(45) \Rightarrow \hat{A} = 67.5$$

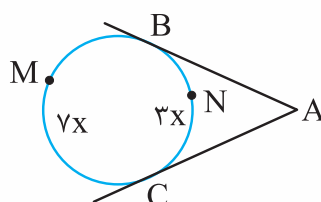


آسان

۲۲- گزینه «۲»

$$\widehat{BMC} + \widehat{CNB} = 360 \Rightarrow 7x + 3x = 360 \Rightarrow 10x = 360 \Rightarrow x = 36$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BMC} - \widehat{BNC}}{2} = \frac{7x - 3x}{2} = 2x = 2(36) \Rightarrow \hat{A} = 72^\circ$$



دشوار

۲۷- گزینه ۱

روش اول: از O به B وصل می کنیم

$$\triangle OBA : OB = BA \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{A} = \hat{O}_1 = \alpha \xrightarrow{\text{مرکزی}} \widehat{BE} = \hat{O}_1 = \alpha$$

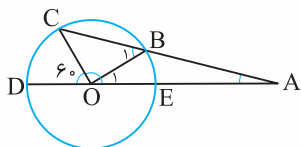
$$\text{مرکزی } \widehat{COD} = \widehat{CD} = 60^\circ$$

دو وتر CB و DE همدیگر را خارج دایره در نقطه A قطع کرده اند، پس داریم:

$$\hat{A} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{60^\circ - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ - \alpha \Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\triangle OBA \text{ خارجی: } \hat{B}_1 = \hat{O}_1 + \hat{A} = \alpha + \alpha \Rightarrow \hat{B}_1 = 2\alpha = 40^\circ$$

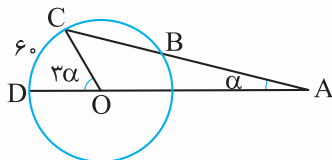
$$\triangle OBC : OB = OC = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{C} = \hat{B}_1 = 40^\circ$$



روش دوم: در شکل مقابل هرگاه $AB = R$ باشد $\hat{O} = 3\hat{A}$

$$3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\triangle OCA \text{ خارجی: } 3\alpha = \hat{C} + \alpha \Rightarrow \hat{C} = 2\alpha = 2(20^\circ) = 40^\circ$$



متوسط

۲۸- گزینه ۲

روش اول:

$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = 2\alpha$$

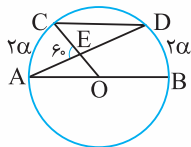
$$\text{محاطی } \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{2\alpha}{2} \Rightarrow \hat{A} = \alpha$$

$$\text{مرکزی } \hat{O} = \widehat{AC} \Rightarrow \hat{O} = 2\alpha$$

$$\triangle AOE \text{ خارجی: } \hat{CEA} = \hat{A} + \hat{O} \Rightarrow 60^\circ = \alpha + 2\alpha \Rightarrow 3\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \widehat{CD} + 2\alpha = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 4(20^\circ) \Rightarrow \widehat{CD} = 100^\circ$$



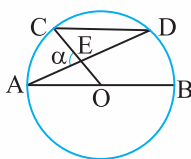
روش دوم:

نکته: اگر $CD \parallel AB$ باشد و قطر دایره باشد، داریم:

$$\widehat{CD} = 180^\circ - \frac{4}{3}\alpha$$

با توجه به نکته فوق و این که $\alpha = 60^\circ$ داریم:

$$\widehat{CD} = 180^\circ - \frac{4}{3} \times 60^\circ = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$



متوسط

۲۶- گزینه ۳

روش اول:

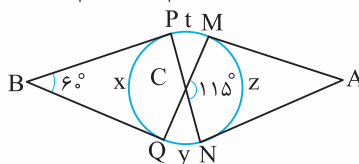
$$\hat{B} = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 60^\circ = \frac{t + z + y - x}{2}$$

$$\Rightarrow t + z + y - x = 120^\circ \begin{cases} t + z + y - x = 120^\circ \\ t + z + y + x = 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 120^\circ$$

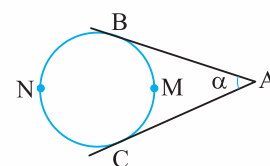
$$\hat{C} = \frac{x + z}{2} \Rightarrow 115^\circ = \frac{120^\circ + z}{2} \Rightarrow 230^\circ = 120^\circ + z \Rightarrow z = 110^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} = \frac{t + x + y - z}{2} = \frac{t + x + y + z - 2z}{2}$$

$$= \frac{360^\circ - 220^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$



روش دوم:



نکته: اگر از نقطه A دو مماس بر دایره ای رسم شود داریم:

$$\widehat{BMC} = 180^\circ - \alpha$$

$$\widehat{BNC} = 180^\circ + \alpha$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$\hat{x} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$$

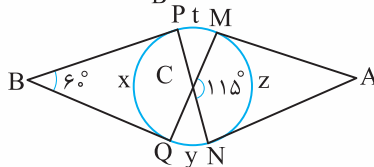
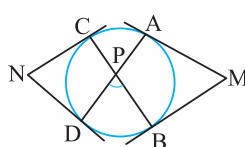
$$\hat{C} = \frac{x + z}{2} \Rightarrow 115^\circ = \frac{120^\circ + z}{2} \Rightarrow 230^\circ = 120^\circ + z \Rightarrow z = 110^\circ$$

$$\hat{z} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow 110^\circ = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$

روش سوم:

نکته: در شکل مقابل داریم:

$$\hat{P} = \frac{\hat{M} + \hat{N}}{2}$$



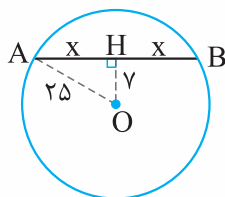
$$115 + x = 180 \Rightarrow x = 65$$

$$x = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \Rightarrow 65 = \frac{\hat{A} + 60^\circ}{2} \Rightarrow 130^\circ = \hat{A} + 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$

آسان

۳۳- گزینه «۴»

اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند یعنی $AH = HB = x$.



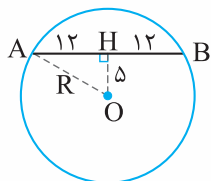
$$\begin{aligned} \Delta OAH : OA^2 &= OH^2 + AH^2 \Rightarrow 25^2 = 7^2 + x^2 \Rightarrow 625 = 49 + x^2 \\ \Rightarrow x^2 &= 576 \Rightarrow x = 24 \Rightarrow AB = 2x = 2(24) \Rightarrow AB = 48 \end{aligned}$$

آسان

۳۳- گزینه «۲»

اگر از مرکز یک دایره به یک وتر، عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند. پس $AH = HB = 12$.

$$\begin{aligned} \Delta OAH : OA^2 &= OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 \\ \Rightarrow R^2 &= 169 \Rightarrow R = 13 \Rightarrow S = \pi R^2 \Rightarrow S = 169\pi \end{aligned}$$

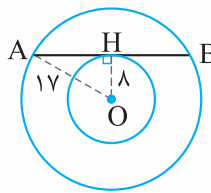


متوسط

۳۳- گزینه «۳»

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره بر یک وتر عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند، پس $AH = HB$.

$$\begin{aligned} \Delta OAH : OA^2 &= AH^2 + OH^2 \Rightarrow 289 = AH^2 + 64 \Rightarrow AH^2 = 225 \\ \Rightarrow AH &= 15 \end{aligned}$$



$$AB = 2AH = 30.$$

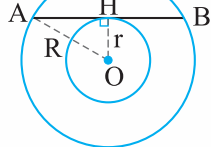
متوسط

۳۵- گزینه «۳»

اگر شعاع دایره کوچک‌تر r و شعاع دایره بزرگ‌تر R باشد، داریم:

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow 36\pi = \pi(R^2 - r^2) \Rightarrow R^2 - r^2 = 36 \\ \Delta OAH : OA^2 &= AH^2 + OH^2 \Rightarrow R^2 = AH^2 + r^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = AH^2 \\ \Rightarrow AH^2 &= 36 \Rightarrow AH = 6 \end{aligned}$$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره‌ای به یک وتر عمود کنیم، آن پاره‌خط وتر را نصف می‌کند.



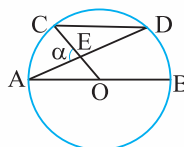
$$AB = 2AH = 2(6) = 12$$

متوسط

۲۹- گزینه «۲»

روش اول:

$$\begin{aligned} CD \parallel AB &\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = \alpha \\ \widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} &= 180^\circ \Rightarrow \alpha + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \\ \hat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} &= \frac{60^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \\ \hat{O} = \widehat{AC} &\Rightarrow \hat{O} = 60^\circ \\ \Delta AOE : \hat{x} &= \hat{A} + \hat{O} = 30^\circ + 60^\circ \Rightarrow \hat{x} = 90^\circ \end{aligned}$$

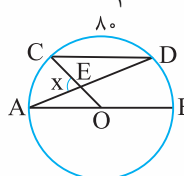


روش دوم:

$$\begin{aligned} \widehat{CD} &= 180^\circ - \frac{4}{3}x \\ \text{نکته: اگر } CD \parallel AB &\text{ باشد و } AB \text{ قطر دایره باشد، داریم: } \widehat{CD} = 80^\circ \end{aligned}$$

با توجه به نکته فوق و این که $\widehat{CD} = 80^\circ$ داریم:

$$80^\circ = 180^\circ - \frac{4}{3}x \Rightarrow x = 75^\circ$$



دشواری

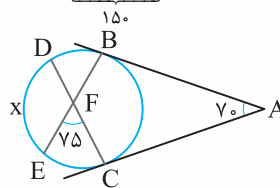
۳۰- گزینه «۱»

دو وتر DC و BE همدیگر را در نقطه F درون دایره قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$\hat{F} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{EC}}{2} \Rightarrow 75^\circ = \frac{\widehat{BD} + \widehat{EC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{EC} = 150^\circ$$

از نقطه A دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده است پس:

$$\begin{aligned} \widehat{BC} &= 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 110^\circ \\ \widehat{BC} + \widehat{EC} + \widehat{DB} + \widehat{DE} &= 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + 150^\circ + x = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ \end{aligned}$$

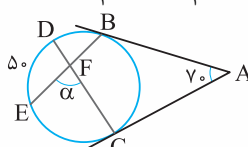


متوسط

۳۱- گزینه «۱»

از نقطه A دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده است، پس داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{BC} &= 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \\ \widehat{BC} + \widehat{CE} + \widehat{ED} + \widehat{DB} &= 360^\circ \Rightarrow 110^\circ + \widehat{CE} + 50^\circ + \widehat{DB} = 360^\circ \\ \Rightarrow \widehat{CE} + \widehat{DB} &= 200^\circ \\ \alpha &= \frac{\widehat{DB} + \widehat{EC}}{2} = \frac{200^\circ}{2} \Rightarrow \alpha = 100^\circ \end{aligned}$$



متوسط

۳۹- گزینه «۴»

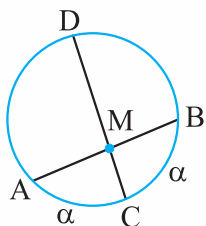
می‌دانیم اگر از وسط کمان به وسط وتر وصل کنیم و امتداد دهیم این خط

قطر دایره است و به آن وتر عمود است، پس $\widehat{AC} = \widehat{BC} = \alpha$.

DC قطر است و چون $\widehat{AB} = 2\alpha$ است پس:

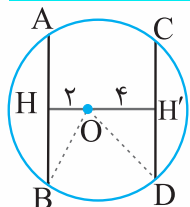
$$\widehat{AB} = R \Rightarrow \widehat{AB} = 60 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BC} = 30$$

$$\text{قطر DC} \Rightarrow \widehat{DA} + \widehat{AC} = 180 \Rightarrow \widehat{DA} + 30 = 180 \Rightarrow \widehat{DA} = 150$$



دشوار

۴۰- گزینه «۱»



$$\frac{AB}{2} = BH = m + 3$$

$$\frac{CD}{2} = DH' = m - 3$$

$$OD = OB = R$$

$$\triangle OBH : OB^2 = R^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow OH^2 + BH^2 = DH'^2 + OH'^2$$

$$\triangle ODH' : OD^2 = R^2 = DH'^2 + OH'^2$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 + (m-3)^2 + 16 = m^2 + 6m + 9 + 4 = m^2 - 6m + 9 + 16$$

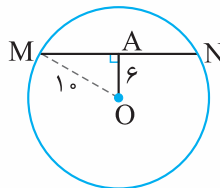
$$\Rightarrow 12m = 12 \Rightarrow m = 1$$

$$R = \sqrt{(m+3)^2 + 4} \Rightarrow R = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

دشوار

۳۶- گزینه «۴»

کوتاه‌ترین وتری که از نقطه A می‌گذرد، وتری است که به قطر عبوری از نقطه A عمود است و می‌دانیم اگر قطری عمود بر یک وتر باشد، آن را نصف می‌کند، پس $MA = AN$.



$$\triangle OAM : OM^2 = OA^2 + AM^2 \Rightarrow 100 = 36 + AM^2 \Rightarrow AM^2 = 64 \Rightarrow AM = 8 \Rightarrow MN = 2AM = 16$$

دشوار

۳۷- گزینه «۲»

اگر فرض کنیم $\widehat{DAC} = x$ با توجه به صورت مسئله $\widehat{DBC} = 2x$

$$\widehat{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 4x$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow x = \frac{4x - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow \widehat{DB} = 2x$$

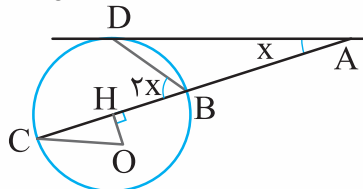
$$\widehat{BDC} = \widehat{BD} + \widehat{CD} \Rightarrow 2x + 4x \Rightarrow \widehat{BDC} = 6x$$

O را به B وصل می‌کنیم. $\widehat{COB} = \widehat{BDC} = 6x$ مرکزی

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم آن وتر و کمان نظیر آن

را نصف می‌کند پس $\widehat{COH} = \frac{6x}{2} = 3x$

$$\frac{\widehat{COH}}{\widehat{DAC}} = \frac{3x}{x} = 3$$



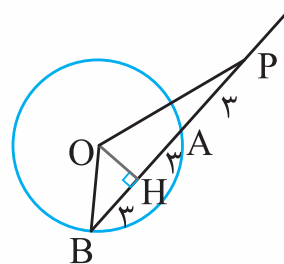
آسان

۳۸- گزینه «۴»

می‌دانیم اگر از مرکز یک دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر نصف می‌شود

پس $BH = HA = \frac{AB}{2} = 3$ وصل می‌کنیم

$$\triangle OBH : OB^2 = OH^2 + BH^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow R^2 = 10 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$



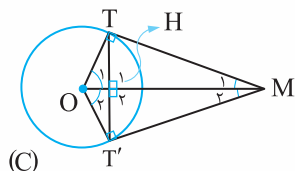
دشوار

-۵

می‌دانیم طول دو مماس رسم شده از M بر دایره با هم برابر است و OM نیمساز زاویه‌های O و M است.

$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \text{ مشترک} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ MT = MT' \text{ مماس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle MTH \cong \triangle MT'H \xrightarrow{\text{ا.م.}} \left\{ \begin{array}{l} TH = T'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right.$$

یعنی MO عمودمنصف TT' است.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ مشترک} \\ T = H = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز.}} \triangle OTM \sim \triangle OTH \xrightarrow{\text{ا.م.}} \frac{TM}{TH} = \frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OH}$$

$$\xrightarrow{OT=R} \frac{OM}{R} = \frac{R}{OH} \Rightarrow R^2 = OH \cdot OM$$

دشوار

-۶

(آ)

$$\triangle OTH : \hat{O}_1 + \hat{T}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 90^\circ - \hat{T}_1 \quad (1)$$

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس داریم:

$$\hat{T} = 90^\circ \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{T}_2 = 90^\circ - \hat{T}_1 \quad (2)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:

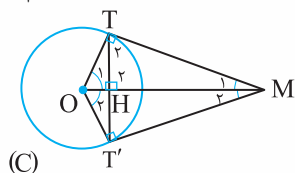
$$\hat{O}_1 = \hat{T}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{T}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز.}} \triangle OTH \sim \triangle THM \xrightarrow{\text{ا.م.}} \frac{TH}{HM} = \frac{OT}{TM} = \frac{OH}{TH}$$

$$\Rightarrow TH^2 = OH \cdot HM \quad (3)$$

می‌دانیم OM عمودمنصف TT' است پس $TH = \frac{1}{2}TT'$ است که در رابطه (۳) قرار می‌دهیم.

$$\left(\frac{1}{2}TT'\right)^2 = OH \cdot OM \Rightarrow TT'^2 = 4OH \cdot HM$$



(ب)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{T} = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز.}} \triangle OTH \sim \triangle OTM \xrightarrow{\text{ا.م.}} \frac{TH}{MT} = \frac{OT}{OM} = \frac{OH}{OT}$$

$$\xrightarrow{OT=R} TH \cdot OM = R \cdot MT$$

می‌دانیم $TH = \frac{1}{2}TT'$ است پس داریم:

$$\frac{1}{2}TT' \cdot OM = R \cdot MT \Rightarrow TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$$



آسان

-۱

- (آ) متقاطع
(ب) 90°
(پ) شعاع دو دایره برابر
(ت) مماس داخل
(ث) هم‌مرس یا موازی
(ج) $2\sqrt{RR'}$

آسان

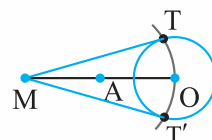
-۲

- (آ) نادرست
(ب) نادرست
(پ) درست
(ت) نادرست
(ث) درست

متوسط

-۳

به کمک عمودمنصف OM وسط این پاره‌خط را به دست می‌آوریم و آن را A به می‌نامیم و به مرکز A شعاع OA دایره رسم می‌کنیم تا دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع کند و M را به T و T' وصل می‌کنیم این دو پاره‌خط مماس‌های رسم شده از M بر دایره هستند.



آسان

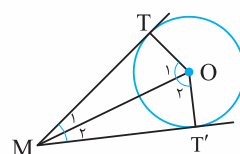
-۴

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس، در نقطه تماس به خط مماس عمود است.

$$\text{پس } \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \text{ مشترک (وتر)} \\ OT = OT' = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OTM \cong \triangle OT'M$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م.}} \left\{ \begin{array}{l} TM = T'M \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right.$$



دشوار

-۱۰

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول این مماس‌ها با هم برابر هستند؛ پس:

$$BN = BR = x \quad (۱)$$

$$BC = BR + RC \Rightarrow ۵ = x + RC \Rightarrow RC = ۵ - x$$

$$CS = CR = ۵ - x$$

$$DC = DS + SC \Rightarrow ۱۲ = DS + ۵ - x \Rightarrow DS = ۷ + x$$

$$DS = DN = ۷ + x \quad (۲)$$

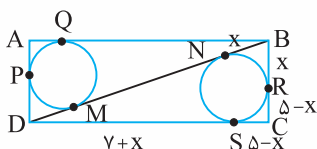
$$\triangle ABD: DB^2 = DA^2 + AB^2 = ۵^2 + ۱۲^2 = ۱۶۹ \Rightarrow DB = ۱۳$$

$$DB = DN + BN \xrightarrow{(۲), (۱)} ۱۳ = ۷ + x + x \Rightarrow ۲x = ۶$$

$$\Rightarrow x = ۳ \Rightarrow BN = ۳$$

به همین ترتیب $DM = ۳$

$$MN = DB - (DM + BN) = ۱۳ - (۳ + ۳) \Rightarrow MN = ۷$$



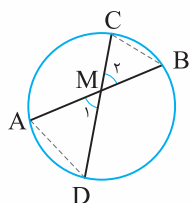
متوسط

-۱۱

C را به B و A را به D وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ متقابل به راس} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle MAD \sim \triangle MCB$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



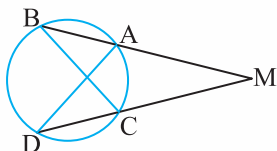
متوسط

-۱۲

A را به D و B را به C وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \hat{B} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ M = \hat{M} \text{ مشترک} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{ز.ز}} \triangle MAD \sim \triangle MBC$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

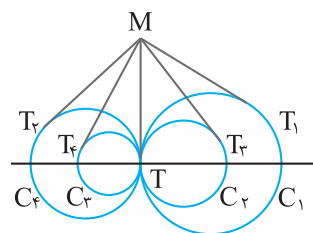


آسان

-۷

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول این مماس‌ها با هم برابرند.

$$\left. \begin{aligned} \text{دایره } C_1: MT_1 = MT \\ \text{دایره } C_2: MT_2 = MT \\ \text{دایره } C_3: MT_3 = MT \\ \text{دایره } C_4: MT_4 = MT \\ \vdots \end{aligned} \right\} \Rightarrow MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$



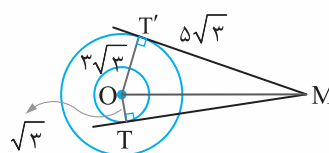
متوسط

-۸

از نقطه O به T' و M وصل می‌کنیم، می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس از نقطه تماس به خط مماس عمود است، پس $\hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ$.

$$\triangle OT'M: OM^2 = OT'^2 + MT'^2 = (۳\sqrt{۳})^2 + (۵\sqrt{۳})^2 = ۲۷ + ۷۵ = ۱۰۲$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{۱۰۲}$$



$$\triangle OTM: OM^2 = OT^2 + TM^2$$

$$\Rightarrow ۱۰۲ = ۳ + TM^2$$

$$\Rightarrow TM^2 = ۹۹$$

$$\Rightarrow TM = ۳\sqrt{۱۱}$$

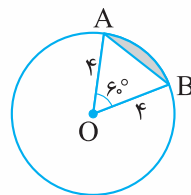
آسان

-۹

$$S_{\text{قطاع } AB} = \frac{\alpha \pi R^2}{۳۶۰} = \frac{۶۰ \pi (۴)^2}{۳۶۰} = \frac{۸}{۳} \pi$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin ۶۰ = \frac{1}{2} \times ۴ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$S = S_{\text{قطاع}} - S_{\triangle OAB} = \frac{۸}{۳} \pi - ۴\sqrt{۳} \quad (\text{رنگی})$$



دشوار

-۱۶

فرض کنیم شعاع دایره بزرگتر R و شعاع دایره کوچکتر r باشد.

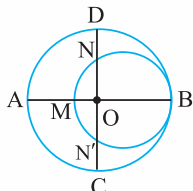
$$OM = OA - AM \Rightarrow OM = R - 18$$

$$OB = R$$

$$ON = OD - DN \Rightarrow ON = R - 12$$

$$ON = ON' = R - 12 \text{ به علت تقارن}$$

دو وتر MB و NN' از دایره کوچکتر، همدیگر را در نقطه O داخل دایره قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:



$$MO \cdot OB = ON \cdot ON' \Rightarrow (R - 18)R = (R - 12)^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 18R = R^2 - 24R + 144 \Rightarrow 6R = 144 \Rightarrow R = 24$$

$$2r = MB = MO + OB = R - 18 + R = 2R - 18 = 2(24) - 18 = 30 \Rightarrow r = 15$$

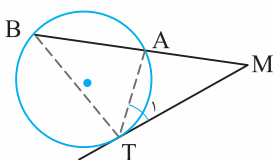
متوسط

-۱۷

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ محاطی} \\ \hat{T}_1 = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ ظلی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{T}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{T}_1 \text{ اثبات بالا} \\ \hat{M} = \hat{M} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ZZ}} \triangle BMT \sim \triangle AMT \xrightarrow{\text{ا.م.}} \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$$

$$\Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB$$

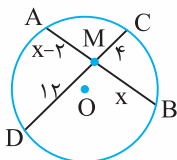


متوسط

-۱۸

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow (x - 2)x = 4(12) \Rightarrow x^2 - 2x = 48 \quad (\text{آ})$$

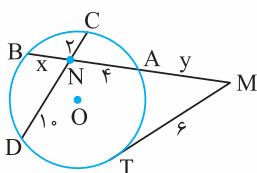
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -6 \text{ غق} \end{cases}$$



$$AN \cdot NB = CN \cdot ND \Rightarrow 4x = 2 \times 10 \Rightarrow x = 5 \quad (\text{ب})$$

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow 36 = y(y + 4 + x) \xrightarrow{x=5} 36 = y^2 + 9y$$

$$\Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0 \Rightarrow (y + 12)(y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -12 \text{ غق} \\ y = 3 \end{cases}$$



متوسط

-۱۳

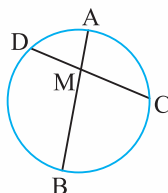
$$\left. \begin{array}{l} MC = 2DM \\ DC = 9 \Rightarrow MC + MD = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 3DM = 9 \Rightarrow DM = 3 \Rightarrow MC = 6$$

اگر $MA = x$ باشد $MB = 11 - x$ است، پس داریم:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow x(11 - x) = 6 \times 3 \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow MA = 2, MB = 9 \\ x = 9 \Rightarrow MA = 9, MB = 2 \end{cases}$$

پس وتر DC و وتر AB را به نسبت $\frac{2}{9}$ یا $\frac{9}{2}$ تقسیم می‌کند.

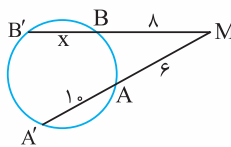


آسان

-۱۴

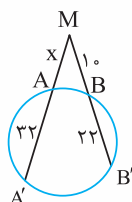
(آ)

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow 6 \times 16 = 8(8 + x) \xrightarrow{\div 8} 12 = 8 + x \Rightarrow x = 4$$



$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow x(32 + x) = 10 \times 32 \quad (\text{ب})$$

$$\Rightarrow x^2 + 32x - 320 = 0 \Rightarrow (x + 40)(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -40 \text{ غق} \\ x = 8 \end{cases}$$



دشوار

-۱۵

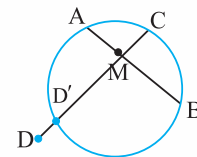
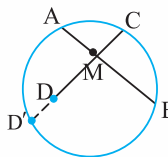
از سه نقطه غیر واقع بر خط راست A و B و C یک دایره عبور می‌دهیم و باید ثابت کنیم: دایره از نقطه D هم می‌گذرد.

برهان خلف: اگر دایره از نقطه D عبور نکند، پاره خط CD (یا امتداد آن را) در D' قطع می‌کند که $MD \neq MD'$

حال چون دو وتر AB و CD' همدیگر را در نقطه M درون دایره قطع کرده‌اند، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} MA \cdot MB = MC \cdot MD' \\ MA \cdot MB = MC \cdot MD \end{array} \right\} \Rightarrow MD = MD' \text{ تناقض}$$

پس فرض خلف باطل و دایره حتماً از نقطه D عبور می‌کند.



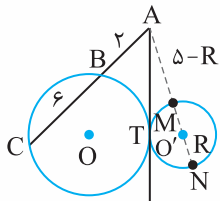
دشوار

-۳۳

در دایره بزرگتر داریم:

$$AT^2 = AB \cdot AC \Rightarrow AT^2 = 2 \times (2 + 6) = 16 \Rightarrow AT = 4$$

AO' را امتداد می‌دهیم تا دایره کوچک‌تر را در N قطع کند، در دایره کوچک‌تر داریم:

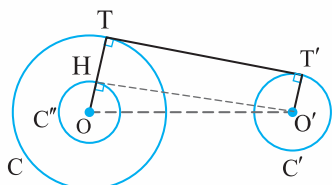


$$\begin{aligned} AT^2 &= AM \cdot AN \\ \Rightarrow 16 &= (\Delta - R)(\Delta + R) \\ \Rightarrow 16 &= \Delta^2 - R^2 \\ \Rightarrow R^2 &= 9 \Rightarrow R = 3 \end{aligned}$$

دشوار

-۳۴

فرض کنیم $R > R'$ باشد، به مرکز O و شعاع $(R - R')$ یک دایره به نام C'' رسم می‌کنیم و از O' بر دایره C'' مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم. سپس O را به H وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره C را در T قطع کند. از O' هم موازی OT رسم می‌کنیم تا دایره C' را در T' قطع کند، پاره‌خط TT' جواب مسئله است.



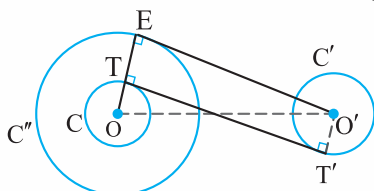
می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است. پس $TT' = O'H$

$$\begin{aligned} \Delta OHO' : OO'^2 &= OH^2 + HO'^2 \Rightarrow OO'^2 = (R - R')^2 + TT'^2 \\ \Rightarrow TT'^2 &= OO'^2 - (R - R')^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \end{aligned}$$

دشوار

-۳۵

به مرکز O و شعاع $R + R'$ دایره C'' را رسم می‌کنیم و از O' مماس $O'E$ را بر دایره C'' وصل می‌کنیم سپس از O به E وصل می‌کنیم تا دایره C را در T قطع کند و از O' موازی OE رسم می‌کنیم تا دایره C' را در T' قطع کند، پاره‌خط TT' جواب مسئله است.



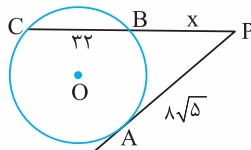
می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $\hat{E} = \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$ است بنابراین چهارضلعی $EO'T'T'$ مستطیل است پس $TT' = EO'$

$$\begin{aligned} \Delta OEO' : OO'^2 &= OE^2 + EO'^2 \Rightarrow OO'^2 = (R + R')^2 + TT'^2 \\ \Rightarrow TT'^2 &= OO'^2 - (R + R')^2 \Rightarrow TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \end{aligned}$$

آسان

-۱۹

$$\begin{aligned} PA^2 &= PB \cdot PC \Rightarrow (\lambda\sqrt{5})^2 = x(32 + x) \Rightarrow 320 = 32x + x^2 \\ \Rightarrow x^2 + 32x - 320 &= 0 \Rightarrow (x + 40)(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -40 \\ x = 8 \end{cases} \end{aligned}$$



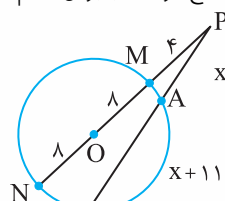
$$\begin{aligned} PB &= x = 8 \\ PC &= 32 + x = 40 \end{aligned}$$

متوسط

-۲۰

P را به O (مرکز دایره) وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه M و N قطع کند. $PM = 4$ و $PN = 16 + 4 = 20$ است و اگر $PA = x$ باشد $AB = 11$ است.

دو وتر AB و MN همدیگر را در نقطه P خارج دایره قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:



$$PA \cdot PB = PM \cdot PN$$

$$x(2x + 11) = 4 \times 20 \Rightarrow 2x^2 + 11x - 80 = 0$$

$$\Delta = 121 + 640 = 761 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{-11 + \sqrt{761}}{4}$$

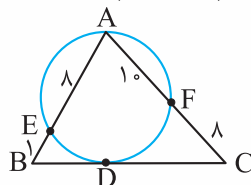
متوسط

-۲۱

$$BD^2 = BE \cdot BA \Rightarrow BD^2 = 1 \times 9 = 9 \Rightarrow BD = 3$$

$$DC^2 = FC \times CA \Rightarrow DC^2 = 8 \times 18 = 144 \Rightarrow DC = 12$$

$$BC = BD + DC = 3 + 12 = 15$$



$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 9 + 18 + 15 = 42$$

متوسط

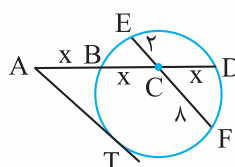
-۲۲

با فرض $AB = BC = CD = x$ داریم:

$$EC \cdot CF = BC \cdot CD \Rightarrow 2 \times 8 = x \times x \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$AT^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AT^2 = x \times 3x \Rightarrow AT^2 = 3x^2 = 3(4)^2 = 48$$

$$\Rightarrow AT = 4\sqrt{3}$$



متوسط

-۲۹

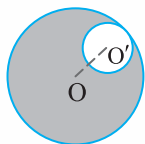
با فرض $R > R'$ داریم:

$$OO' = R - R' \Rightarrow r = R - R' \quad (۱)$$

$$\text{رنگی } S = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow ۱۶\pi = \pi(R^2 - R'^2)$$

$$\Rightarrow ۱۶ = \underbrace{(R - R')}_r (R + R') \Rightarrow R + R' = ۸ \quad (۲)$$

از رابطه (۱) و (۲) داریم:



$$\begin{cases} R - R' = r \\ R + R' = ۸ \end{cases} \Rightarrow R = ۵, R' = ۳$$

دشوار

-۳۰

چهار ضلعی‌های $ACRS$ و $PQCB$ و $MNBA$ همگی مستطیل هستند وچون $AB = BC = AC = ۲r$ است پس $MN = PQ = RS = ۲r$ می‌باشد.

$$\hat{A}_1 + ۹۰ + ۶۰ + ۹۰ = ۳۶۰ \Rightarrow \hat{A}_1 = ۱۲۰$$

$$|\widehat{MS}| = \frac{\alpha\pi r}{۱۸۰} = \frac{۱۲۰\pi r}{۱۸۰} = \frac{۲}{۳}\pi r$$

$$|\widehat{NP}| = |\widehat{RQ}| = \frac{۲}{۳}\pi r \quad \text{به همین ترتیب}$$

$$\text{طول نخ} = MN + PQ + RS + |\widehat{MS}| + |\widehat{RQ}| + |\widehat{NP}|$$

$$\Rightarrow L = ۳MN + ۳|\widehat{MS}| \Rightarrow L = ۶r + ۲\pi r$$

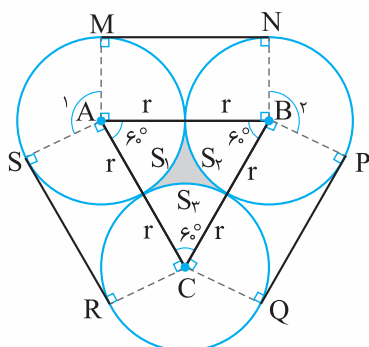
مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲r$ است.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 = r^2\sqrt{3}$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\alpha\pi r^2}{۳۶۰} = \frac{۶۰\pi r^2}{۳۶۰} = \frac{۱}{۶}\pi r^2$$

$$\text{رنگی } S = S_{\Delta ABC} - (S_1 + S_2 + S_3) = r^2\sqrt{3} - \frac{۱}{۲}\pi r^2$$

$$\Rightarrow \text{رنگی } S = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{۲}\right)$$



آسان

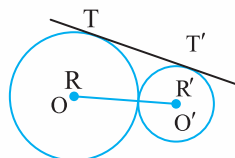
-۲۶

می‌دانیم در دو دایره مماس خارج $OO' = R + R'$

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + 2RR' + R'^2 - R^2 + 2RR' - R'^2}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{4RR'} \Rightarrow TT' = ۲\sqrt{RR'}$$

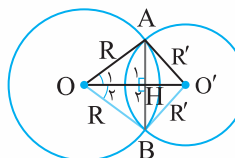


آسان

-۲۷

 O و O' را به B وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ O'A = O'B = R' \\ OO' = OO' \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \Delta OAB \cong \Delta O'AB \xrightarrow{\text{ا.م}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ O'A = O'B = R' \\ OH = OH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.ض}} \Delta OAH \cong \Delta OBH$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = ۹۰^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow OO' \text{ عمودمنصف } AB \text{ است}$$

روش دوم: می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است و برعکس.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} \text{روی عمودمنصف } AB \\ O'A = O'B = R' \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} \text{روی عمودمنصف } AB \end{array} \right\} \Rightarrow OO' \text{ عمودمنصف } AB$$

متوسط

-۲۸

طول مماس مشترک داخلی را $EE' = \sqrt{۱۵}$ و طول مماس خارجی را

$$TT' = ۳\sqrt{۷} \quad (R > R')$$

$$EE' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \Rightarrow \sqrt{۱۵} = \sqrt{۶۴ - (R + R')^2}$$

$$\Rightarrow ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^2 \Rightarrow (R + R')^2 = ۴۹ \Rightarrow R + R' = ۷ \quad (۱)$$

$$TT'^2 = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \Rightarrow ۳\sqrt{۷} = \sqrt{۶۴ - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^2 \Rightarrow (R - R')^2 = ۱ \Rightarrow R - R' = ۱ \quad (۲)$$

$$\begin{cases} R + R' = ۷ \\ R - R' = ۱ \end{cases} \Rightarrow R = ۴, R' = ۳$$

۴- گزینه «۳»

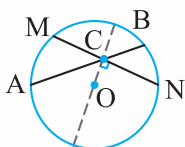
دشوار

$$\left. \begin{array}{l} AC = 2BC \\ AB = 9 \Rightarrow AC + BC = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2BC = 9 \Rightarrow BC = 3, AC = 6$$

کوتاه‌ترین وتر دایره که از نقطه C می‌گذرد و تری است که بر قطر عبوری از

نقطه C عمود باشد (MN) که در این صورت $MC = CN = x$

چون دو وتر AB و MN همدیگر را در نقطه C داخل دایره قطع کرده‌اند، داریم:



$$MC \cdot CN = AC \cdot CB \Rightarrow x^2 = 3 \times 6$$

$$\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow MN = 2x = 6\sqrt{2}$$

۵- گزینه «۲»

دشوار

$$\widehat{AB} = 60^\circ \Rightarrow AB = R$$

P را به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط C و D قطع

کند PD بیش‌ترین فاصله نقطه P تا دایره است که $PD = 3R$

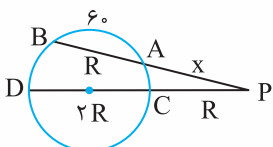
$$PC = PD - DC = 3R - 2R \Rightarrow PC = R$$

دو وتر AB و CD همدیگر را در نقطه P خارج دایره قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow x(x + R) = R \times 3R \Rightarrow x^2 + Rx - 3R^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = R^2 - 4(1)(-3R^2) = R^2 + 12R^2 = 13R^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-R \pm \sqrt{13}R}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13})R & \text{غلق} \\ x = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)R \end{cases}$$



۶- گزینه «۴»

دشوار

O را به M وصل می‌کنیم در دایره کوچک‌تر OMD محاطی رو به قطر است پس

$\hat{M} = 90^\circ$ و چون از مرکز دایره بزرگ‌تر به وتر CD عمود کرده‌ایم

$$MC = MD$$

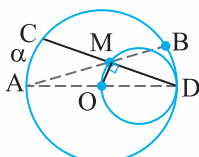
$$|\widehat{AC}| = \alpha R \Rightarrow \frac{4}{3}\pi = \alpha \times 4 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{60^\circ}{2} \Rightarrow \hat{D} = 30^\circ$$

$$\Delta OMD: \cos \hat{D} = \frac{MD}{OD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MD}{4} \Rightarrow MD = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MD = MC = 2\sqrt{3}$$

دو وتر AB و CD از دایره بزرگ‌تر همدیگر را در نقطه M قطع کرده‌اند، پس داریم:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = (2\sqrt{3})(2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow MA \cdot MB = 12$$

سؤالات تستی

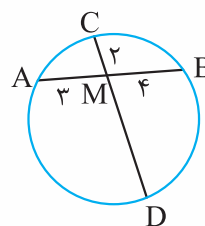
پاسخنامه

بخش ۲

آسان

۱- گزینه «۳»

چون دو وتر AB و CD همدیگر را داخل دایره قطع کرده‌اند داریم:



$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\Rightarrow 3 \times 4 = 2 \times MD \Rightarrow MD = 6$$

$$CD = MC + MD = 2 + 6 = 8$$

آسان

۲- گزینه «۲»

اگر شعاع دایره R باشد:

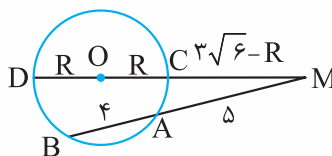
$$MO = MC + OC \Rightarrow 3\sqrt{6} = MC + R \Rightarrow MC = 3\sqrt{6} - R$$

دو وتر DC و AB همدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع کرده‌اند، بنابراین

داریم:

$$MC \cdot MD = MA \cdot MB \Rightarrow (3\sqrt{6} - R)(3\sqrt{6} + R) = 5 \times 9$$

$$\Rightarrow 54 - R^2 = 45 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$



متوسط

۳- گزینه «۳»

P را به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط C و D قطع

کند PC کمترین فاصله نقطه P تا دایره است که $PC = 8$ است و اگر

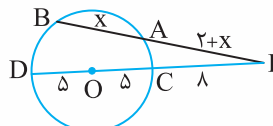
$AB = x$ باشد $PA = 2 + x$ است.

چون دو وتر AB و DC همدیگر را در نقطه P خارج دایره قطع کرده‌اند، داریم:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow (x + 2)(2x + 2) = 8 \times 18$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 140 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 3x - 70 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 7)(x + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -10 & \text{غلق} \\ x = 7 \end{cases}$$



۷- گزینه «۲» دشوار

پاره خط OP را از هر دو سمت امتداد می‌دهیم تا دایره بزرگ‌تر را در M و N قطع کند، می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $OP' \perp BC$ است و چون $BC \parallel OA$ است پس $OP' \perp OA$ است و در مثلث OPA هم میانه و هم ارتفاع است پس این مثلث متساوی الساقین است ($OP = PA$) و زاویه $\hat{O}PA$ محاطی و رو به قطر است پس قائمه است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است بنابراین $OP = 4$.

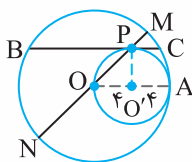
$$\Delta OPO': OP'^2 = O'P'^2 + OO'^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow OP = 4\sqrt{2}$$

$$NP = ON + OP = 8 + 4\sqrt{2}$$

$$PM = OM - OP = 8 - 4\sqrt{2}$$

برای دو وتر MN و BC داریم:

$$PB \times PC = PN \times PM = (8 + 4\sqrt{2})(8 - 4\sqrt{2}) = 64 - 32 = 32$$



۸- گزینه «۲» دشوار

اگر $AM = x$ و $NB = y$ باشد، برای دو وتر AB و CD داریم:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD \Rightarrow x(7 + y) = 6 \times 10$$

$$\Rightarrow 7x + xy = 60 \quad (1)$$

برای دو وتر AB و EF داریم:

$$AN \cdot NB = EN \cdot NF \Rightarrow (x + 7)y = 5 \times 12$$

$$\Rightarrow xy + 7y = 60 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

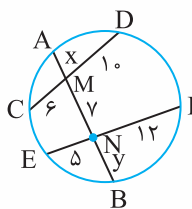
$$7x + xy = 7y + xy \Rightarrow 7x = 7y \Rightarrow x = y$$

بنا به رابطه (۱) داریم:

$$7x + xy = 60 \xrightarrow{x=y} x^2 + 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 12)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 5 \end{cases} \text{ غرق}$$

$$AB = AM + MN + NB = x + 7 + x = 2x + 7 \xrightarrow{x=5} AB = 17$$



۹- گزینه «۳» دشوار

دشوار

فرض کنیم شعاع دایره بزرگ‌تر R و شعاع دایره کوچک‌تر r باشد.

$$OM = OA - AM \Rightarrow OM = R - 16$$

$$OB = R$$

$$ON = OD - DN \Rightarrow ON = R - 10$$

$$ON = ON' = R - 10 \text{ به علت تقارن}$$

دو وتر MB و NN' از دایره کوچک‌تر، همدیگر را در نقطه O داخل دایره

قطع کرده‌اند، بنابراین داریم:

$$MO \cdot OB = ON \cdot ON'$$

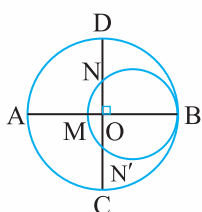
$$\Rightarrow (R - 16)R = (R - 10)^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100$$

$$\Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$2r = MB = MO + OB = R - 16 + R$$

$$= 2R - 16 = 2(25) - 16 = 34 \Rightarrow r = 17$$



متوسط

۱۰- گزینه «۱» متوسط

روش اول:

$$\begin{cases} 2AP = PB \\ AB = 6 \Rightarrow AP + PB = 6 \end{cases} \Rightarrow 2AP = 6 \Rightarrow AP = 2, PB = 4$$

O را به P وصل می‌کنیم و از هر دو سمت امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه

C و D قطع کند اگر $OP = x$ باشد $DP = DO + OP = 5 + x$

برای دو وتر AB و CD داریم:

$$PC = OC - OP = 5 - x$$

$$AP \times PB = PD \times PC \Rightarrow 2 \times 4 = (5 + x)(5 - x)$$

$$\Rightarrow 8 = 25 - x^2 \Rightarrow x^2 = 17 \Rightarrow x = \sqrt{17}$$

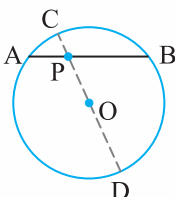
روش دوم:

نکته: اگر نقطه P روی وتر AB در داخل دایره‌ای به شعاع R باشد، و فاصله

نقطه P از مرکز دایره برابر x باشد آن‌گاه $x^2 = R^2 - PA \times PB$ است.

بنابراین داریم:

$$x^2 = 5^2 - 2 \times 4 = 25 - 8 = 17 \Rightarrow x = \sqrt{17}$$

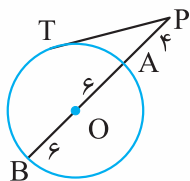


آسان

۱۳- گزینه ۴

هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است، پس داریم:

$$PT^2 = PA \times PB \Rightarrow PT^2 = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow PT = 8$$

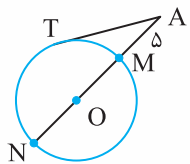


متوسط

۱۴- گزینه ۱

A را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه M و N قطع کند AM نزدیک‌ترین و AN دورترین فاصله A تا دایره است که AM = 5 و AN = 9 است.

هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است، پس داریم:



$$AT^2 = AM \times AN = 5 \times 9 \Rightarrow AT = 3\sqrt{5}$$

$$2R = MN = AN - AM = 9 - 5 = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$\frac{AT}{R} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

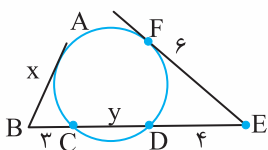
متوسط

۱۵- گزینه ۳

هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، طول مماس واسطه هندسی بین قطعات قاطع است پس داریم:

$$EF^2 = ED \times EC \Rightarrow 6^2 = 4(4 + y) \xrightarrow{\div 4} 9 = 4 + y \Rightarrow y = 5$$

$$AB^2 = BC \times BD \Rightarrow x^2 = 3(3 + 5) \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$



متوسط

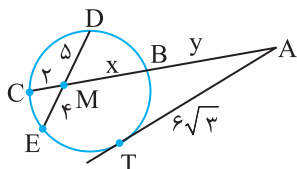
۱۶- گزینه ۱

دو وتر BC و DE همدیگر را در نقطه M داخل دایره قطع کرده‌اند بنابراین داریم:

$$CM \cdot MB = EM \cdot MD \Rightarrow 2 \times x = 4 \times 5 \Rightarrow x = 10$$

$$AT^2 = AB \times AC \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = y(y + 10 + 2) \Rightarrow y^2 + 12y - 108 = 0$$

$$\Rightarrow (y - 6)(y + 18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = -18 \text{ غلط} \end{cases}$$



متوسط

۱۱- گزینه ۱

روش اول: P را به O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند اگر فرض کنیم PM = x در این صورت PN = 16 + x است برای دو وتر AB و MN داریم:

$$PA \cdot PB = PM \cdot PN \Rightarrow 9 \times 4 = x(16 + x) \Rightarrow 36 = 16x + x^2$$

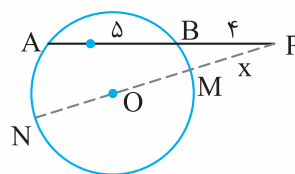
$$\Rightarrow x^2 + 16x - 36 = 0 \Rightarrow (x + 18)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -18 \text{ غلط} \\ x = 2 \end{cases}$$

روش دوم: اگر نقطه P در امتداد وتر AB و خارج از دایره‌ای به شعاع R قرار داشته باشد، فاصله نقطه P از مرکز این دایره (OP = d) از دستور

$$d^2 = R^2 + PA \times PB$$

$$d^2 = R^2 + AP \times BP = 64 + 9 \times 4 = 100 \Rightarrow d = 10$$



دشوار

۱۲- گزینه ۲

برای دو وتر AB و CD داریم:

$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 2 \times 12 = 8 \times PD \Rightarrow PD = 3$$

از مرکز دایره به AB و CD عمود می‌کنیم می‌دانیم این عمودها، وترهای AB و CD را نصف می‌کنند.

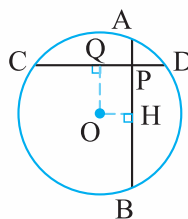
$$BH = HA = \frac{AB}{2} = \frac{AP + PB}{2} = \frac{2 + 12}{2} = 7$$

$$PH = PB - BH = 12 - 7 = 5$$

$$CQ = QD = \frac{CD}{2} = \frac{CP + PD}{2} = \frac{8 + 3}{2} = 5.5$$

$$PQ = CP - CQ = 8 - 5.5 = 2.5$$

در مستطیل QPHO، قطر مستطیل است، پس داریم:

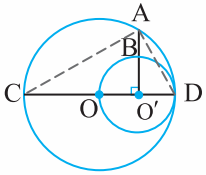


$$OP = \sqrt{PH^2 + PQ^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

دشوار

۲۰- گزینه ۴»

از A به سر قطری که از C و D می‌گذرد وصل می‌کنیم زاویه $\widehat{CAD}$ محاطی رویه‌رو به قطر است پس $\widehat{CAD} = 90^\circ$ و $AO' = 2R$ ارتفاع وارد بر وتر CD است.



اگر شعاع دایره کوچک‌تر R باشد شعاع دایره بزرگ‌تر $2R$ است پس داریم:

$$O'D = R$$

$$CO' = CO + OO' = 2R + R = 3R$$

$$AO' = AB + BO' = 9 - 3\sqrt{3} + R$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AO'^2 = O'C \times O'D \Rightarrow (9 - 3\sqrt{3} + R)^2 = 3R \times R$$

$$\xrightarrow{\text{جنر}} 9 - 3\sqrt{3} + R = \sqrt{3}R \Rightarrow 9 - 3\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)R$$

$$\Rightarrow R = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow R = \frac{9\sqrt{3} + 9 - 9 - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow R = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2R = 6\sqrt{3} = \text{شعاع دایره بزرگ‌تر}$$

متوسط

۲۱- گزینه ۲»

اگر $MC = x$ باشد، $AB = 3x$ است و امتداد دو وتر AB و CD همدیگر

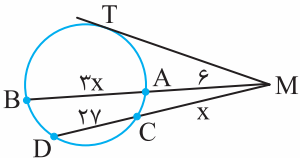
را در نقطه M قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 6(6 + 3x) = x(x + 27)$$

$$\Rightarrow 36 + 18x = x^2 + 27x \Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 12)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 & \text{غقی} \\ x = 3 & \Rightarrow AB = 9 \end{cases}$$

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow MT^2 = 6(6 + 9) = 90 \Rightarrow MT = 3\sqrt{10}$$



آسان

۲۲- گزینه ۳»

$$\left. \begin{aligned} R + R' &= 7 + 3 = 10 \\ |R - R'| &= 7 - 3 = 4 \Rightarrow R - R' < OO' < R + R' \\ OO' &= 8 \end{aligned} \right\}$$

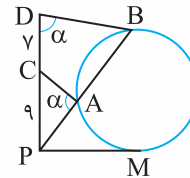
$\Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

دشوار

۱۷-5- گزینه ۴»

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} = \widehat{D} = \alpha \\ \widehat{P} = \widehat{P} \text{ مشترک} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{نز}} \triangle PAC \sim \triangle PDB$$

$$\xrightarrow{\text{ام}} \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow \frac{PA}{16} = \frac{9}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = 144$$



$$PM^2 = PA \times PB = 144 \Rightarrow PM = 12$$

متوسط

۱۸-5- گزینه ۱»

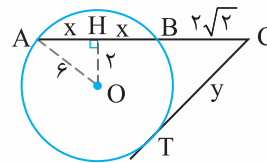
می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر از همان دایره، عمود کنیم، این پاره‌خط

وتر را نصف می‌کند، پس $AH = HB = x$

$$\triangle OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 6^2 = x^2 + 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$$

$$TC^2 = BC \times AC \Rightarrow y^2 = 2\sqrt{2}(10\sqrt{2}) = 40 \Rightarrow y = 2\sqrt{10}$$



متوسط

۱۹-5- گزینه ۳»

می‌دانیم OM عمود منصف AB است ($\widehat{H} = 90^\circ$) و شعاع وارد بر خط مماس

در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. ($\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$)

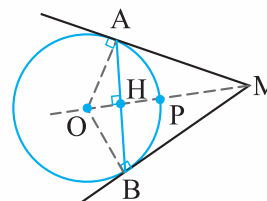
$$OM = MP + R = 4\sqrt{2} - 4 + 4 = 4\sqrt{2}$$

$$\triangle OAM : OM^2 = OA^2 + AM^2 \Rightarrow 32 = 16 + AM^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4$$

پس مثلث OAM قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ($\widehat{A} = 90^\circ, AM = OA = 4$)

است، پس ارتفاع AH، میانه هم می‌باشد بنابراین $OH = \frac{OM}{2} = 2\sqrt{2}$

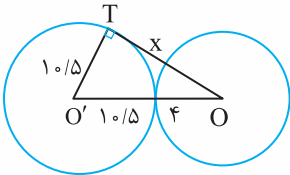


آسان

۲۷- گزینه «۴»

چون دو دایره مماس بیرون هستند $OO' = R + R' = ۱۴/۵$ و می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس $\hat{T} = ۹۰^\circ$ است.

$$\begin{aligned} \Delta OO'T : OO'^2 &= O'T^2 + OT^2 \Rightarrow (۱۴/۵)^2 = (۱۰/۵)^2 + x^2 \\ \Rightarrow ۲۱۰/۲۵ &= ۱۱۰/۲۵ + x^2 \Rightarrow x^2 = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰. \end{aligned}$$

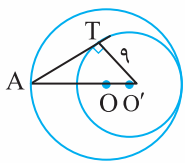


آسان

۲۸- گزینه «۳»

چون دو دایره مماس درون هستند، $OO' = |R - R'| = ۳$ و می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است $(\hat{T} = ۹۰^\circ)$

$$O'A = OO' + R = ۳ + ۱۲ = ۱۵$$



$$\begin{aligned} \Delta O'AT : AO'^2 &= AT^2 + O'T^2 \\ \Rightarrow ۲۲۵ &= AT^2 + ۸۱ \\ \Rightarrow AT^2 &= ۱۴۴ \Rightarrow AT = ۱۲ \end{aligned}$$

متوسط

۲۹- گزینه «۱»

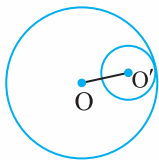
فرض کنیم شعاع دایره بزرگ‌تر R و شعاع دایره کوچک‌تر R' باشند.

$$OO' = R - R' \Rightarrow ۳/۵ = R - R'$$

$$S = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow ۲۱\pi = \pi(R^2 - R'^2)$$

$$\Rightarrow ۲۱ = \frac{(R - R')(R + R')}{۳/۵} \Rightarrow R + R' = ۶$$

$$\begin{cases} R + R' = ۶ \\ R - R' = ۳/۵ \end{cases} \Rightarrow R = ۴/۷۵, R' = ۱/۲۵$$



آسان

۳۰- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \Rightarrow ۱۵ = \sqrt{OO'^2 - (۱۴ - ۶)^2} \\ \Rightarrow ۲۲۵ &= OO'^2 - ۶۴ \Rightarrow OO'^2 = ۲۸۹ \Rightarrow OO' = ۱۷ \end{aligned}$$

آسان

۳۱- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \Rightarrow ۴\sqrt{۶} = \sqrt{OO'^2 - (۵ + ۵)^2} \\ \Rightarrow ۹۶ &= OO'^2 - ۱۰۰ \Rightarrow OO'^2 = ۱۹۶ \Rightarrow OO' = ۱۴ \end{aligned}$$

آسان

۳۲- گزینه «۴»

اگر دو دایره مماس بیرون باشند $OO' = R + R'$ است بنابراین داریم:

$$۳x - ۳ = ۲x + ۳ - ۱ \Rightarrow ۳x - ۳ = ۲x + ۲ \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow R = ۸, R' = ۴$$

دشواری

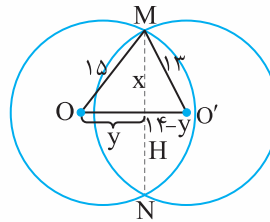
۳۳- گزینه «۲»

چون $|R - R'| < OO' < R + R'$ است پس دو دایره متقاطع هستند و می‌دانیم OO' عمود منصف MN است $(MH = NH)$ اگر فرض کنیم $OH = y$ ، $MH = x$ آن‌گاه $HO' = ۱۴ - y$ است.

$$\Delta OMH : OM^2 = OH^2 + MH^2 \Rightarrow ۲۲۵ = y^2 + x^2 \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \Delta O'MH : O'M^2 &= MH^2 + HO'^2 \Rightarrow ۱۶۹ = x^2 + (۱۴ - y)^2 \\ \Rightarrow ۱۶۹ &= \frac{x^2 + y^2}{۲۲۵} - ۲۸y + ۱۹۶ \Rightarrow ۲۸y = ۲۵۲ \Rightarrow y = ۹ \end{aligned}$$

$$(۱) \text{ رابطه } ۲۲۵ = ۸۱ + x^2 \Rightarrow x^2 = ۱۴۴ \Rightarrow x = ۱۲ \Rightarrow MN = ۲x = ۲۴$$

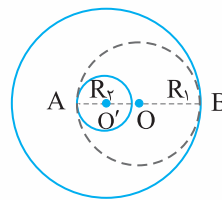


آسان

۳۴- گزینه «۱»

چون $OO' = d < |R - R'|$ است دو دایره متداخل هستند، که AB قطر بزرگ‌ترین دایره‌ای است که به هر دو دایره مماس است که داریم:

$$۲r = AB = R_2 + OO' + R_1 = ۱ + ۲ + ۷ = ۱۰ \Rightarrow r = ۵$$

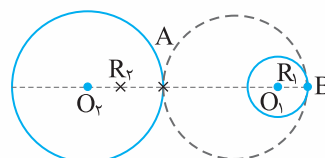


آسان

۳۵- گزینه «۳»

چون $OO' > R + R'$ است، دو دایره متخارج هستند و اگر شعاع دایره موردنظر r باشد، داریم:

$$۲r = AB = O_1O_2 + R_1 - R_2 = ۱۰ + ۲ - ۶ = ۶ \Rightarrow r = ۳$$



متوسط

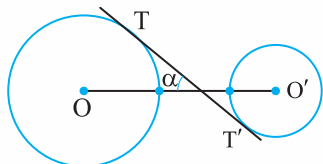
۳۶- گزینه ۳»

اگر زاویه بین مماس مشترک داخلی و خط‌المركزين α باشد،

$$\sin \alpha = \frac{R + R'}{OO'}$$

است بنابراین داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{22/5 + 7/5}{OO'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{30}{OO'} \Rightarrow OO' = 60$$



متوسط

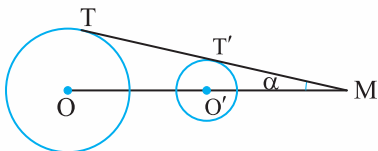
۳۷- گزینه ۲»

اگر زاویه بین مماس مشترک خارجی و خط‌المركزين α باشد،

$$\sin \alpha = \frac{|R - R'|}{OO'}$$

است، بنابراین داریم:

$$\sin 30^\circ = \frac{|30 - 7/5|}{OO'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{22/5}{OO'} \Rightarrow OO' = 45$$



آسان

۳۸- گزینه ۳»

می‌دانیم دو دایره در حالت‌های متخارج و مماس خارج، مماس مشترک داخلی دارند و در حالت مماس مشترک برون، مماس مشترک داخلی بر خط‌المركزين عمود است، بنابراین دو دایره متخارج هستند.

متوسط

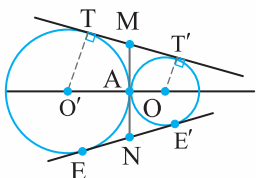
۳۹- گزینه ۱»

می‌دانیم اگر دو دایره مماس برون باشند

$$TM = MT' = EN = NE' = MA = AN = \sqrt{RR'}$$

بنابراین داریم

$$MA = \sqrt{RR'} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} \Rightarrow MA = 6$$



آسان

۴۰- گزینه ۴»

اگر دو دایره به شعاع‌های R و R' مماس خارج باشند، طول مماس مشترک

خارجی آن‌ها $2\sqrt{RR'}$ است بنابراین داریم: ($R > R'$)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} R = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow \frac{3}{4} R^2 = 4RR' \Rightarrow R = \frac{16}{3} R'$$

متوسط

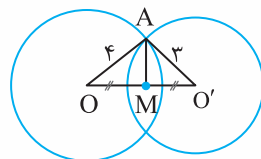
۳۳- گزینه ۳»

می‌دانیم فقط در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر

است ($AM = \frac{1}{2} OO'$ میانه) پس $\hat{A} = 90^\circ$ است.

$$\Delta OAO': OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow OO' = 5$$

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{5^2 - (4 - 3)^2} = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$



آسان

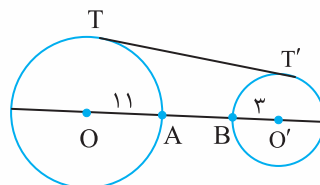
۳۳- گزینه ۳»

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{33} = \sqrt{OO'^2 - (11 - 3)^2}$$

$$\Rightarrow 297 = OO'^2 - 64 \Rightarrow OO'^2 = 361 \Rightarrow OO' = 19$$

کم‌ترین فاصله بین دو دایره طول پاره‌خط AB است که داریم:

$$AB = OO' - (R + R') = 19 - (11 + 3) = 19 - 14 = 5$$



متوسط

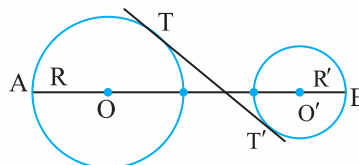
۳۴- گزینه ۲»

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \Rightarrow 4\sqrt{6} = \sqrt{OO'^2 - (7 + 3)^2}$$

$$\Rightarrow 96 = OO'^2 - 100 \Rightarrow OO'^2 = 196 \Rightarrow OO' = 14$$

بیش‌ترین فاصله بین دو دایره طول پاره‌خط AB است که داریم:

$$AB = R + OO' + R' = 7 + 14 + 3 = 24$$



آسان

۳۵- گزینه ۴»

می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون از دستور

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

به دست می‌آید اگر فرض کنیم $R > R'$ داریم:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow \sqrt{2} R = 2\sqrt{RR'} \Rightarrow 2R^2 = 4RR' \Rightarrow R = 2R'$$

دشوار

۴۴- گزینه ۴

می‌دانیم طول مماس مشترک خارجی دو دایره که مماس درون باشند از دستور $2\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید.

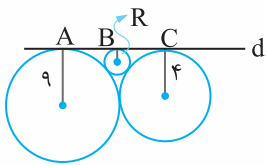
$$AB = 2\sqrt{9R} = 6\sqrt{R}$$

$$BC = 2\sqrt{4R} = 4\sqrt{R}$$

$$AC = 2\sqrt{9 \times 4} = 12$$

$$AC = AB + BC \Rightarrow 12 = 6\sqrt{R} + 4\sqrt{R} \Rightarrow 12 = 10\sqrt{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{R} = 1.2 \Rightarrow R = 1.44$$

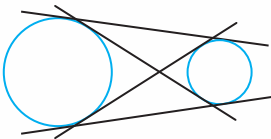


متوسط

۴۵- گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} R + R' &= 5 + 3 = 8 \\ OO' &= 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OO' > R + R' \Rightarrow \text{دو دایره متخارج هستند}$$

فاصله‌های گفته شده همان شعاع‌های دو دایره هستند بنابراین خطوط مورد نظر مماس مشترک‌های دو دایره‌اند که تعدادشان ۴ است.



دشوار

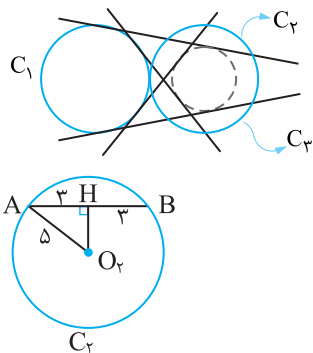
۴۶- گزینه ۳

فرض AB یکی از وترها به طول ۶ در دایره C_2 باشد. اگر از مرکز این دایره بر AB عمود کنیم، طول آن را نصف می‌کند، پس $AH = HB = 3$

$$\triangle OAH : O_2A^2 = O_2H^2 + AH^2 \Rightarrow 25 = O_2H^2 + 9$$

$$\Rightarrow O_2H^2 = 16 \Rightarrow O_2H = 4$$

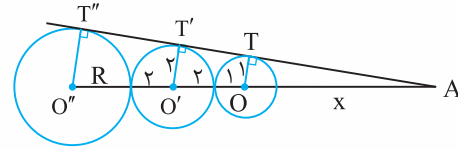
چنانچه از نقطه O_2 دایره‌ای به شعاع ۴ رسم کنیم (دایره C_3)، هر وتر از دایره C_2 که به دایره C_3 مماس باشد طول ۶ دارد. بنابراین جواب مسئله تعداد مماس مشترک‌ها بین دایره C_2 و C_3 است که چون دو دایره متخارج هستند، ۴ مماس مشترک دارند.



دشوار

۴۱- گزینه ۲

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، بنابراین $OT \perp AT''$, $O'T' \perp AT''$, $O''T'' \perp AT''$ است پس $OT \parallel O'T' \parallel O''T$



$$\triangle O'T'A : OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{AO}{AO'} = \frac{OT}{OT'}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 3+x \Rightarrow x = 3$$

$$\triangle O''T''A : O''T'' \parallel OT \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{OA}{AO''} = \frac{OT}{O''T''}$$

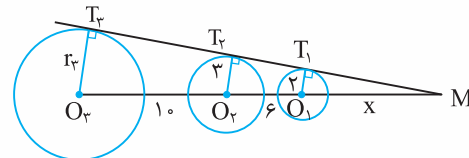
$$\Rightarrow \frac{x}{x+5+R} = \frac{1}{R} \xrightarrow{x=3} \frac{3}{8+R} = \frac{1}{R} \Rightarrow 3R = 8+R$$

$$\Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4$$

دشوار

۴۲- گزینه ۲

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس به خط مماس عمود است پس $O_2T_2 \perp MT_2$ و $O_1T_1 \perp MT_2$ و $O_3T_3 \perp MT_2$ است بنابراین $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$



$$\triangle O_2T_2M : O_2T_2 \parallel O_1T_1 \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{MO_1}{MO_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2x+12 \Rightarrow x = 12$$

$$\triangle O_3T_3M : O_3T_3 \parallel O_2T_2 \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{MO_2}{MO_3} = \frac{O_2T_2}{O_3T_3}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{28} = \frac{2}{r_3} \Rightarrow 12r_3 = 56 \Rightarrow r_3 = \frac{14}{3}$$

دشوار

۴۳- گزینه ۱

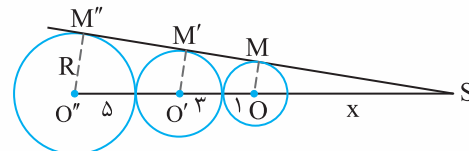
فرض SM یکی از خطوطی می‌باشد که به هر سه دایره مماس است، چون OM ، $O'M'$ و $O''M''$ بر SM عمودند پس $OM \parallel O'M' \parallel O''M''$

$$\triangle O'M'S : OM \parallel O''M'' \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{SO}{SO'} = \frac{OM}{O'M'}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = x+4 \Rightarrow x = 2$$

$$\triangle SO''M'' : OM \parallel O''M'' \xrightarrow{\text{تالی}} \frac{OS}{O''S} = \frac{OM}{O''M''} \Rightarrow \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

غلق ۱۵ = ۲





آسان

-۱

- (آ) نادرست (ب) درست
(پ) درست (ت) درست
(ث) درست

آسان

-۲

- (آ) تلاقی عمودمنصف‌ها (ب) $\frac{1}{4}$
(پ) ۴ (ت) محیطی
(ث) $2r \tan \frac{18^\circ}{n}$ (ج) $2r \sin \frac{18^\circ}{n}$

متوسط

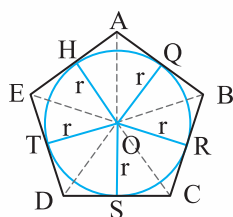
-۳

مرکز دایره محاطی را به همه رئوس وصل می‌کنیم و از O به همه اضلاع عمودی رسم می‌کنیم.

$$S = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle ODE} + S_{\triangle OEA} + \dots$$

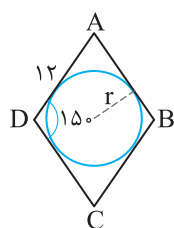
$$S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot CD + \frac{1}{2}r \cdot DE + \frac{1}{2}r \cdot EA + \dots$$

$$= \frac{1}{2}r \frac{(AB + BC + CD + DE + EA + \dots)}{2P} \Rightarrow S = r \cdot P$$



آسان

-۴



$$2P = 4(12) \Rightarrow P = 24$$

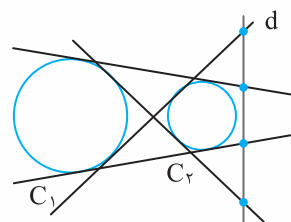
$$S = AD \times DC \times \sin 150^\circ = 12 \times 12 \times \frac{1}{2} = 72$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{72}{24} \Rightarrow r = 3 \Rightarrow \text{دایره } S = \pi r^2 = 9\pi$$

۴۷- گزینه «۳»

متوسط

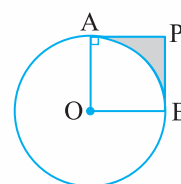
دو دایره چون متخارج هستند، ۴ مماس مشترک دارند که هر ۴ مماس خط d را قطع می‌کنند پس مسئله ۴ جواب دارد.



۴۸- گزینه «۱»

متوسط

چهارضلعی $OAPB$ چون ۴ زاویه قائمه دارد و طول و عرض آن با هم برابر است (OA = OB = R) یک مربع است.



$$S_{\text{مربع}} = (2)^2 = 4$$

$$S_{\text{قطاع OAB}} = \frac{\alpha \pi R^2}{360} = \frac{90 \pi (2)^2}{360} = \pi$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{قطاع}} = 4 - \pi$$

۴۹- گزینه «۴»

متوسط

چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است که:

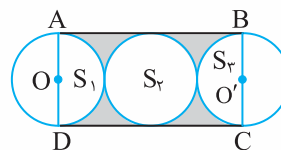
$$AD = 2R$$

$$AB = R + 2R + R = 4R$$

$$S_{\text{مستطیل}} = AD \times AB = 2R \times 4R = 8R^2$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2} \pi R^2 + \pi R^2 + \frac{1}{2} \pi R^2 = 2\pi R^2$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مستطیل}} - (S_1 + S_2 + S_3) = 8R^2 - 2\pi R^2 = 2R^2(4 - \pi)$$

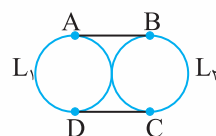


۵۰- گزینه «۳»

متوسط

AB و CD مماس مشترک‌های دو دایره هستند که $AB = 2\sqrt{R \times R} = 2R$

و $L_1 = L_2$ است که هر کدام نصف محیط دایره هستند.

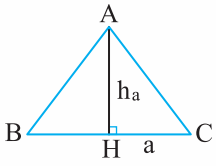


$$L_1 = L_2 = \pi R$$

$$\text{طول نخ} = 2AB + 2L_1 = 4R + 2\pi R$$

متوسط

-۸



$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

به همین ترتیب $h_b = \frac{2S}{b}$ و $h_c = \frac{2S}{c}$ است و می‌دانیم $r = \frac{S}{P}$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

متوسط

-۹

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1+2+3}{6} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{h} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{h} = 1 - \frac{7}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{5}{12} \Rightarrow h = \frac{12}{5} \Rightarrow h = 2\frac{4}{5}$$

دشوار

-۱۰

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد، که طول

مماس‌ها با هم برابرند. یعنی:

$$CM = CQ \text{ و } BN = BQ \text{ و } AN = AM \text{ و } AT = AT'$$

$$ABC_{\text{محیط}} = AB + BC + AC$$

$$\Rightarrow 2P = AN + NB + BQ + QC + CM + MA$$

$$\Rightarrow 2P = 2AN + 2BQ + 2QC \xrightarrow{\div 2} P = AN + \underbrace{BQ + QC}_a$$

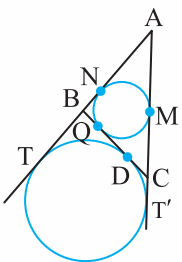
$$\Rightarrow AN = P - a \xrightarrow{AN=AM} AN = AM = P - a$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود $BN = BQ = P - b$

$$ABC_{\text{محیط}} = AB + BC + AC \Rightarrow 2P = AB + BD + DC + AC$$

$$= AB + BT + CT' + AC \Rightarrow 2P = AT + AT'$$

$$\xrightarrow{AT=AT'} 2P = 2AT \Rightarrow P = AT = AT'$$



متوسط

-۵

از مرکز دایره محاطی خارجی مماس با ضلع BC به ۳ رأس وصل می‌کنیم و از

این نقطه به ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کنیم.

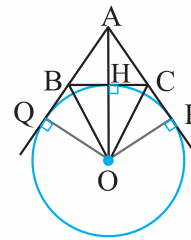
$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}OQ \cdot AB + \frac{1}{2}OP \cdot AC - \frac{1}{2}OH \cdot BC$$

$$\xrightarrow{OQ=OP=OH=r_a} S = \frac{1}{2}r_a(b+c-a) \Rightarrow S = \frac{1}{2}r_a(b+c+a-r_a)$$

$$\Rightarrow S = r_a(P-a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P-a}$$

به همین ترتیب $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$ است.

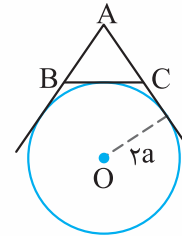


آسان

-۶

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ و محیط آن

۳a است پس داریم:



$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{3})^2 = 48\sqrt{3}$$

$$2P = 3a = 24\sqrt{3} \Rightarrow P = 12\sqrt{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{48\sqrt{3}}{12\sqrt{3}-a\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 12$$

آسان

-۷

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید و شعاع‌های

دایره‌های محاطی خارجی از $r_a = \frac{S}{P-a}$ و $r_b = \frac{S}{P-b}$ و $r_c = \frac{S}{P-c}$ به

دست می‌آید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{P-a}{S} + \frac{P-b}{S} + \frac{P-c}{S} = \frac{3P-(a+b+c)}{S}$$

$$= \frac{3P-2P}{S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

دشوار

-۱۳

محلای $ABCD$: فرض $\left\{ \begin{array}{l} ABCD \text{ دوزنقه متساوی الساقین: حکم} \\ AB \parallel CD \end{array} \right.$

می دانیم کمان های بین دو وتر موازی با هم موازیند و اگر دو کمان یک دایره با هم برابر باشند وترهای آنها نیز با هم برابرند و برعکس.

عکس قضیه: دوزنقه $ABCD$ محاطی است.

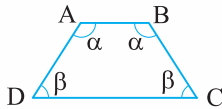
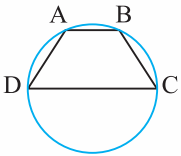
$$AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow$$

محلای $ABCD$: حکم دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$: فرض

می دانیم در دوزنقه متساوی الساقین زاویه های روبه رو به یک قاعده با هم برابرند، یعنی: $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \hat{D} = \beta$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{C} = \alpha + \beta = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{D} = \alpha + \beta = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{محلای } ABCD \text{ است}$$



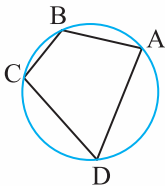
متوسط

-۱۴

$$\text{فرض: } \hat{A} + \hat{B} = 120^\circ, \hat{C} - \hat{D} = 60^\circ$$

می دانیم در هر چهار ضلعی محاطی مجموع زوایا مقابل 180° است پس $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \\ \hat{A} + \hat{B} = 120^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{C} + \hat{D} = 240^\circ \\ \hat{C} - \hat{D} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = 150^\circ, \hat{D} = 90^\circ$$



$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=150^\circ} \hat{A} = 30^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{D}=90^\circ} \hat{B} = 90^\circ$$

متوسط

-۱۵

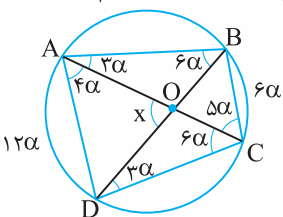
$$\text{محلای } \hat{CDB} = \hat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = 3\alpha, \widehat{BC} = 6\alpha$$

$$\text{محلای } \hat{DBA} = \hat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \hat{ACD} = 6\alpha, \widehat{AD} = 12\alpha$$

در چهارضلعی محاطی، مجموع زوایا مقابل 180° است پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 7\alpha + 11\alpha = 180^\circ \Rightarrow 18\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$$

$$\hat{O} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} \Rightarrow x = \frac{12\alpha + 6\alpha}{2} = 9\alpha = 9(10^\circ) \Rightarrow x = 90^\circ$$

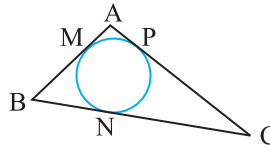


آسان

-۱۱

$$2P = AB + AC + BC = 7 + 8 + 10 = 25 \Rightarrow P = 12.5$$

$$AM = P - BC = 12.5 - 10 = 2.5$$



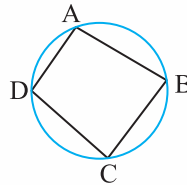
دشوار

-۱۲

محلای $ABCD$: فرض $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ حکم

$$\left. \begin{array}{l} \text{محلای } \hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \text{محلای } \hat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

می دانیم مجموع زاویه های هر ۴ ضلعی 360° است اگر $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ باشد پس $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$



عکس قضیه:

$$\text{فرض: } \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

محلای $ABCD$: حکم

از ۳ نقطه غیر واقع بر خط راست A و B و C یک دایره عبور می کند. باید ثابت کنیم رأس D هم روی همین دایره است.

برهان خلف: اگر رأس D روی دایره نباشد، دایره ضلع CD یا امتداد آن را در

D' قطع می کند که D' را به A وصل می کنیم چون هر ۴ رأس، ۴ ضلعی

$ABCD'$ روی دایره است این چهارضلعی محاطی است بنابراین دو زاویه

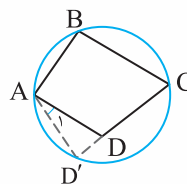
روبه رو با هم مکمل اند یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{D}' = 180^\circ \\ \text{فرض } \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D} = \hat{D}' \quad (1)$$

$$\Delta ADD' : \hat{D} = \hat{D}' + \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{D} > \hat{D}' \quad (2)$$

رابطه (۱) با رابطه (۲) در تناقض است پس فرض خلف باطل و دایره مورد نظر

از نقطه D می گذرد و یعنی چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.



$$\left. \begin{array}{l} \text{I روی نیمساز } B \rightarrow \text{قضیه نیمساز} \rightarrow IM = IN \\ \text{I روی نیمساز } C \rightarrow \text{قضیه نیمساز} \rightarrow IN = IP \end{array} \right\} \Rightarrow IM = IN = IP$$

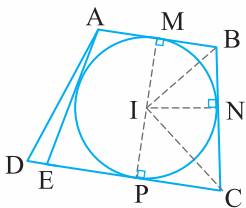
از نقطه **I** به شعاع **IM** دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره بر اضلاع **AB** و **BC** و **CD** مماس است باید ثابت کنیم این دایره بر **AD** نیز مماس است تا چهارضلعی **ABCD** محیطی شود.

برهان خلف: اگر دایره بر ضلع **AD** مماس نشود، از **A** مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا **DC** (یا امتداد آن) را در **E** قطع کند. چهارضلعی **ABCE** محیطی است بنابراین مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر هستند.

$$\left. \begin{array}{l} AB + EC = AE + BC \\ \text{فرض: } AB + CD = AD + BC \Rightarrow AB + CE + DE = AD + BC \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow AE + BC + DE = AD + BC \Rightarrow AE + DE = AD \quad (۱)$$

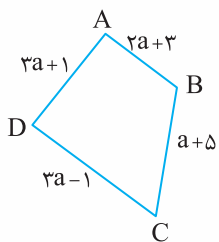
بنا به قضیه نامساوی مثلث، در هر مثلث مجموع هر دو از ضلع سوم بزرگ‌تر است پس در مثلث **ADE** داریم $AE + DE > AD$ که با رابطه (۱) در تناقض است پس فرض خلف باطل و دایره بر **AD** مماس می‌شود و چهارضلعی **ABCD** محیطی است.



آسان

-۱۹

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابر هستند.



$$\begin{aligned} AB + CD &= AD + BC \\ \Rightarrow 2a + 3 + 3a - 1 &= 3a + 1 + a + 5 \\ \Rightarrow 5a + 2 &= 4a + 6 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

متوسط

-۲۰

اگر فرض کنیم $AD = y$ و $DC = x$ داریم:

$$\text{محیط} = AB + BC + DC + AD \Rightarrow 30 = 5 + 8 + x + y$$

$$\Rightarrow x + y = 17$$

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر هستند.

$$AB + DC = BC + AD \Rightarrow 5 + x = 8 + y \Rightarrow x - y = 3$$

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 10, y = 7 \Rightarrow DC = 10 \Rightarrow AD = 7$$

آسان

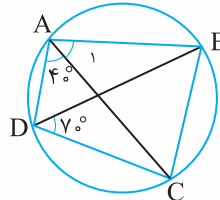
-۱۶

$$\widehat{BDC} = \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} = 70^\circ$$

$$\widehat{A} = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$$

می‌دانیم در چهارضلعی‌های محیطی مجموع دو زاویه مقابل 180° است.

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 110^\circ + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 70^\circ$$



متوسط

-۱۷

می‌دانیم در چهارضلعی محیطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل‌اند پس:

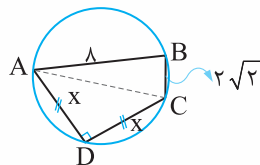
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$$

A را به **C** وصل می‌کنیم

$$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 = 64 + 8 = 72 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$$

$$\triangle ADC: AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow 72 = x^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow AD = 6$$



دشواری

-۱۸

محیطی **ABCD**: فرض $AB + CD = AD + BC$ حکم

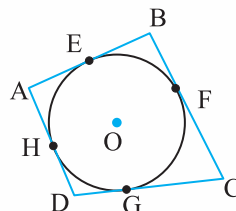
می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول این مماس‌ها با هم برابر هستند.

$$\begin{aligned} AB + CD &= AE + EB + CG + GD = AH + BF + FC + HD \\ &= (AH + HD) + (BF + FC) = AD + BC \end{aligned}$$

عکس قضیه:

فرض $AB + CD = AD + BC$

محیطی **ABCD**: حکم



نیمسازهای دو زاویه **B** و **C** همدیگر را در نقطه **I** قطع می‌کنند از **I** به **C** و **AB** و **BC** و **DC** عمود می‌کنیم و می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

دشوار

-۲۴

اگر دوزنقه محاطی باشد داریم:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow \text{دوزنقه متساوی الساقین است}$$

اگر دوزنقه محاطی باشد جمع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است (فرض

$$DC = b, AB = a$$

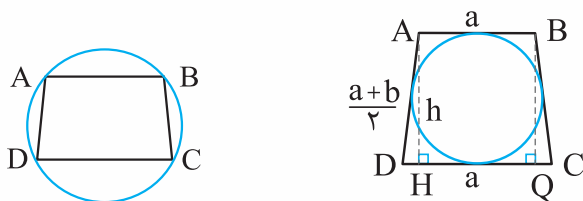
$$AB + DC = AD + BC \xrightarrow{AD=BC} a + b = 2AD \Rightarrow AD = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{از } A \text{ و } B \text{ بر } DC \text{ عمود می‌کنیم } AB = HQ = a \text{ و } DH = QC = \frac{b-a}{2}$$

$$\triangle ADH: AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = h^2 + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \Rightarrow h^2 = ab \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S = \frac{AB + DC}{2} \times AH \Rightarrow S = \frac{a+b}{2} \sqrt{ab}$$



دشوار

-۲۵

اندازه ساق AD برابر قطر دایره است پس $AD = 10$ است از B به DC

عمود می‌کنیم $BH = AD = 10$ و $AB = DH = x$

$$\triangle BHC: BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow 676 = 100 + HC^2$$

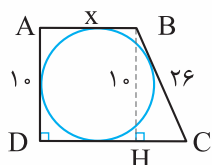
$$\Rightarrow HC^2 = 576 \Rightarrow HC = 24$$

و چون چهارضلعی $ABCD$ محاطی است داریم:

$$AB + DC = AD + BC \Rightarrow AB + DH + HC = 10 + 26$$

$$\Rightarrow 2x + 24 = 36 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

پس $AB = 6$ و $DC = 6 + 24 = 30$ است.



$$S = \frac{AB + DC}{2} \times BH$$

$$\Rightarrow S = \frac{6 + 30}{2} \times 10 = 180$$

آسان

-۲۱

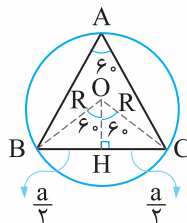
می‌دانیم شرط محاطی بودن یک چهارضلعی این است که جمع دو ضلع روبه‌رو

با هم برابر باشند که در کایت لوزی و مربع این شرط برقرار است اما در

مستطیل و متوازی‌الاضلاع برقرار نیست.

متوسط

-۲۲



$$\widehat{A} = \widehat{BC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A} = \frac{BC}{r} \Rightarrow 60^\circ = \frac{BC}{r} \Rightarrow BC = 120^\circ$$

O را به B و C وصل می‌کنیم، چون $OB = OC = R$ ، مثلث OBC متساوی

الساقین است و ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر ضلع BC بر هم منطبق هستند.

$$\widehat{O} = \widehat{BC} = 120^\circ$$

$$\triangle OHB: \sin \widehat{BOH} = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{a/2}{R} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = \sqrt{3}R$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از دستور $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ به

دست می‌آید، پس:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}R)^2 \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$$

دشوار

-۲۳

نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D و در ادامه دایره محاطی

را در E قطع کند $(\widehat{BAE} = \widehat{CAE} = \alpha)$.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{BAE} = \frac{BE}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{BE}{r} \Rightarrow BE = r\alpha \\ \widehat{CAE} = \frac{CE}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{CE}{r} \Rightarrow CE = r\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow BE = CE$$

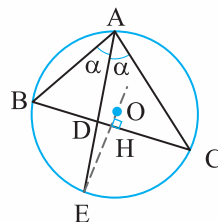
چون نقطه E کمان $\widehat{BC}$ را نصف کرده است، چنانچه از E به وسط BC

(نقطه H) وصل کنیم، می‌دانیم این پاره‌خط بر BC عمود است و چون آن را

نصف کرده است پس عمودمنصف BC است و در ادامه نیز از O مرکز دایره

می‌گذرد پس نیمساز A و عمودمنصف ضلع BC روی دایره محاطی مثلث

همدیگر را قطع می‌کنند.



دشوار

-۲۹

تمام وترهای AB و BC و ... چون اضلاع n ضلعی منتظم هستند با هم برابر هستند بنابراین $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \dots = \frac{360}{n}$ است. از O به A و B وصل می‌کنیم.

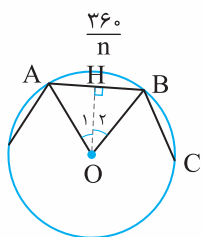
$$\widehat{AO} = \widehat{AB} = \frac{360}{n}$$

چون $OA = OB = R$ است مثلث OAB متساوی‌الساقین است و ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر ضلع AB بر هم منطبق هستند بنابراین

$$AH = HB = \frac{AB}{2} \text{ و } \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{180}{n}$$

$$\Delta OAH : \sin \hat{O}_1 = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \sin \frac{180}{n} = \frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{180}{n} = \frac{AB}{2R} \Rightarrow AB = 2R \sin \frac{180}{n}$$



دشوار

-۳۰

اندازه هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم $\frac{360}{n}$ است پس اندازه هر زاویه داخلی

آن $(180 - \frac{360}{n})$ است و چون مرکز دایره محاطی مثلث محل تلاقی نیمسازها

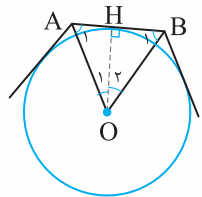
است $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90 - \frac{180}{n}$ است.

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{O} = 180 \Rightarrow 90 - \frac{180}{n} + 90 - \frac{180}{n} + \hat{O} = 180 \Rightarrow \hat{O} = \frac{360}{n}$$

ارتفاع، میانه، نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند.

$$\Delta OAB : \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow AOB \text{ متساوی‌الساقین}$$

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{180}{n} \text{ و } AH = HB = \frac{AB}{2}$$



$$\Delta OAH : \tan \hat{O}_1 = \frac{AH}{OH} \Rightarrow \tan \frac{180}{n} = \frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{180}{n} = \frac{AB}{2R} \Rightarrow AB = 2R \tan \frac{180}{n}$$

متوسط

-۲۶

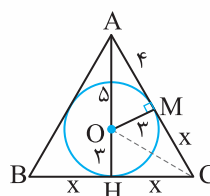
می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه و نیمساز وارد بر ساق بر هم منطبق هستند.

$$AH = AO + OH \Rightarrow 8 = AO + 2 \Rightarrow AO = 6$$

$$\Delta AOM : AO^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow 25 = AM^2 + 9 \Rightarrow AM^2 = 16$$

$$\Rightarrow AM = 4$$

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر است پس $CH = CM = x$.



$$\Delta AHC : AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow (4+x)^2 = 8^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 16 + 8x + x^2 = 64 + x^2$$

$$\Rightarrow 8x = 48 \Rightarrow x = 6$$

$$BC = 2x = 12$$

متوسط

-۲۷

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 2 = \frac{S}{P} \Rightarrow S = 2P$$

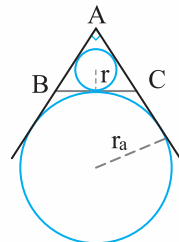
بزرگ‌ترین شعاع دایره محاطی خارجی در مثلث قائم‌الزاویه، دایره‌ای است که به وتر و امتداد دو ضلع قائمه مماس است پس

$$r_a = \frac{S}{P-a} \Rightarrow 15 = \frac{2P}{P-a} \Rightarrow 15P - 15a = 2P \Rightarrow 13P = 15a$$

$$\Rightarrow P = \frac{15}{13}a$$

در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره محاطی داخلی $P-a$ است.

$$r = P-a \Rightarrow 2 = \frac{15}{13}a - a \Rightarrow 2 = \frac{2}{13}a \Rightarrow a = 13$$



در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره محاطی $\frac{a}{2}$ است

$$R = \frac{a}{2} = 6.5$$

$$S = \pi R^2 = 42.25\pi$$

متوسط

-۲۸

چهارضلعی $BCDE$ محیطی است پس مجموع اضلاع مقابل با هم برابر است.

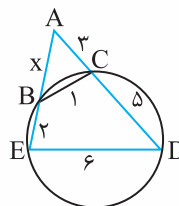
$$BC + ED = BE + CD \Rightarrow 1 + 6 = BE + 5 \Rightarrow BE = 2$$

دو وتر BE و CD از دایره، همدیگر را در نقطه A خارج دایره قطع کرده‌اند بنابراین داریم:

$$AB \times AE = AC \times AD \Rightarrow x(x+2) = 3 \times 8$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$AE = AB + BE = 4 + 2 = 6$$



دشوار

۳- گزینه «۴»

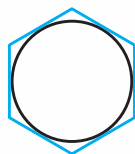
در یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a ، اندازه قطر کوچک $a\sqrt{3}$ و اندازه قطر بزرگ $2a$ و محیط آن $6a$ و مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

$$a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$$

$$2P = 6a = 6(4) = 24 \Rightarrow P = 12$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}(4)^2}{2} = 24\sqrt{3}$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر n ضلعی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.



$$r = \frac{24\sqrt{3}}{12} = 2\sqrt{3}$$

آسان

۴- گزینه «۲»

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر n ضلعی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.

$$3 = \frac{S}{P} \Rightarrow S = 3P$$

$$S + (2P)^2 = 162 \Rightarrow 4P^2 + 3P - 162 = 0.$$

$$\Rightarrow (P-6)(4P+27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} P = 6 \\ P = -\frac{27}{4} \text{ غلط} \end{cases}$$

$$S = 3P = 3(6) = 18$$

متوسط

۵- گزینه «۱»

روش اول: در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، اندازه ارتفاع $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و

اندازه محیط $3a$ و مساحت $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

$$\frac{\sqrt{3}a}{2} = 18 \Rightarrow a = \frac{36}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 12\sqrt{3}$$

$$2P = 3a = 36\sqrt{3} \Rightarrow P = 18\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \times (12\sqrt{3})^2}{4} \Rightarrow S = 108\sqrt{3}$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر n ضلعی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.

$$r = \frac{S}{P} = \frac{108\sqrt{3}}{18\sqrt{3}} \Rightarrow r = 6$$

روش دوم: اگر اندازه ضلع مثلث متساوی الاضلاع a باشد ارتفاع آن

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ است و شعاع دایره محاطی داخلی آن } r \text{ است که } r = \frac{\sqrt{3}}{6}a \text{ یا}$$

$$r = \frac{h}{3} \text{ است.}$$

$$r = \frac{h}{3} = \frac{18}{3} = 6$$



متوسط

۱- گزینه «۱»

می‌دانیم شعاع دایره محاطی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید که S مساحت

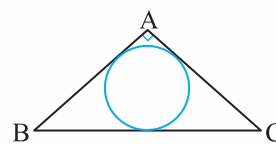
و P نصف محیط شکل است.

مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ حتماً قائم‌الزاویه است ($5^2 = 3^2 + 4^2$) بنابراین داریم:

$$S = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

$$2P = AB + AC + BC = 3 + 4 + 5 = 12 \Rightarrow P = 6$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{6} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow S = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi(1)^2 = \pi$$



متوسط

۲- گزینه «۳»

چهارضلعی که همه اضلاع آن با هم برابر باشد، لوزی است و می‌دانیم در لوزی

قطرها عمودمنصف هم هستند پس $DO = OB = x$ و $AO = OC = 3x$

$$\Delta OAB = AB^2 = OB^2 + OA^2 \Rightarrow 100 = 9x^2 + x^2 \Rightarrow 10x^2 = 100$$

$$\Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

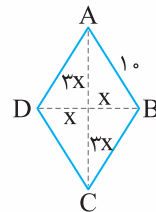
$$AC = 6x = 6\sqrt{10}$$

$$BD = 2x = 2\sqrt{10}$$

$$S = \frac{1}{2}AC \times BD \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \Rightarrow S = 60$$

$$2P = 4AB = 4(10) = 40 \Rightarrow P = 20$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر n ضلعی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.



$$r = \frac{S}{P} = \frac{60}{20} = 3$$

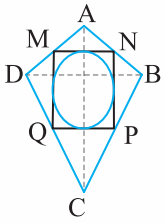
دشوار

۸- گزینه «۳»

هرگاه شکل حاصل از به هم وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع یک چهارضلعی مستطیل شود، یعنی قطرهای چهارضلعی بر هم عمود هستند که داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

هرگاه وسط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کنیم یک متوازی‌الاضلاع به وجود می‌آید که مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی اولیه است و محیط آن برابر مجموع دو قطر چهارضلعی اولیه است.



$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$2P = AC + BD = 6 + 4 = 10 \Rightarrow P = 5$$

اگر محیط و مساحت یک n ضلعی به ترتیب $2P$ و S باشد، شعاع دایره

محاطی آن از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید پس داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

متوسط

۹- گزینه «۴»

در یک چهارضلعی محیطی، مجموع هر دو ضلع غیرمجاور با هم برابرند و برابر نصف محیط هستند.

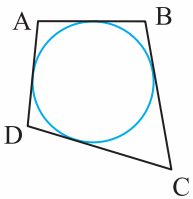
$$AB + DC = AD + BC = P = 18$$

$$= 2\pi r \Rightarrow 18/2 = (3/14)r \Rightarrow r = 2/5$$

اگر محیط و مساحت یک چهارضلعی محیطی به ترتیب $2P$ و S باشند، شعاع

دایره محاطی آن از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 2/5 = \frac{S}{18} \Rightarrow S = 45$$



دشوار

۶- گزینه «۱»

هر ۸ ضلعی منتظم درون یک مربع زندگی می‌کند.

$$\Delta MAB: AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow 4 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

اندازه هر ضلع مربع $MNPO$ را برابر a فرض می‌کنیم.

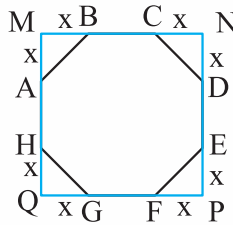
$$a = MN = MB + BC + CN = x + 2 + x = 2 + 2x = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$S = S_{\text{مربع}} - 4S_{\Delta AMB} = a^2 - 4\left(\frac{1}{2}x \times x\right) = a^2 - 2x^2$$

$$= (2 + 2\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})^2 = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 4 = 8(\sqrt{2} + 1)$$

$$2P = 8(2) \Rightarrow P = 8$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{8(\sqrt{2} + 1)}{8} \Rightarrow r = \sqrt{2} + 1$$



دشوار

۷- گزینه «۴»

شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی هر مستطیل، یک مربع است که اگر

اندازه اضلاع مستطیل a و b باشد، اندازه اضلاع مربع برابر $|b - a| \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{است که } MN = |8 - 2| \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

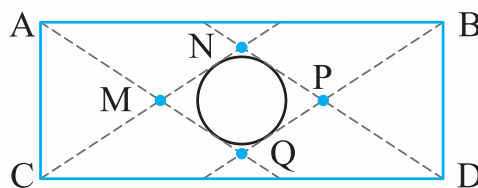
$$S_{MNPQ} = (3\sqrt{2})^2 = 18$$

$$2P = 4MN \Rightarrow P = 2MN = 2(3\sqrt{2}) \Rightarrow P = 6\sqrt{2}$$

می‌دانیم اگر مساحت یک چندضلعی S و محیط آن $2P$ باشد، شعاع دایره

محاطی برابر $r = \frac{S}{P}$ است.

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{18}{6\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



متوسط

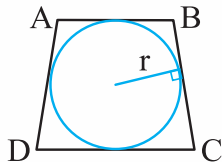
۱۴- گزینه «۲»

می‌دانیم شعاع دایره محاطی هر شکل محیطی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید که S مساحت و P نصف محیط است.

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 3 = \frac{45}{P} \Rightarrow P = 15$$

می‌دانیم در هر چهارضلعی محیطی، مجموع دو ضلع مقابل برابر نصف محیط است پس:

$$AD + BC = P \xrightarrow{AD=BC} 2AD = 15 \Rightarrow AD = 7.5$$



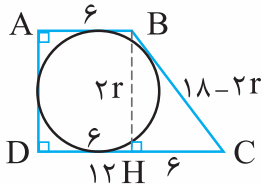
دشوار

۱۵- گزینه «۳»

می‌دانیم در چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو برابر نصف محیط است و در دوزنقه شکل مقابل ارتفاع برابر قطر دایره محاطی است ($AD = h = 2r$).
 $P = AB + DC = 6 + 12 = 18 \Rightarrow AD + BC = 18 \Rightarrow 2r + BC = 18$
 $\Rightarrow BC = 18 - 2r$

از B بر DC عمود می‌کنیم $BH = AD = 2r$ و $AB = DH = 6$ بنابراین $HC = 6$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow (18 - 2r)^2 = (2r)^2 + 6^2$$



$$\Rightarrow 324 - 72r + 4r^2 = 4r^2 + 36 \Rightarrow 324 - 72r = 36 \Rightarrow 288 = 72r \Rightarrow r = 4$$

دشوار

۱۶- گزینه «۳»

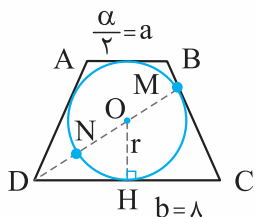
اگر یک دوزنقه متساوی‌الساقین با قاعده‌های a و b بر دایره‌ای به شعاع r محیط شود $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ است و $2r$ همان ارتفاع دوزنقه است.

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2} \times 8} = \frac{1}{2}\sqrt{36} \Rightarrow r = 3$$

اگر از مرکز دایره محاطی به قاعده‌ها عمود کنیم آن‌ها را نصف می‌کند پس
 $DH = \frac{DC}{2} = 4$

$$\Delta ODH: OD^2 = OH^2 + DH^2 \Rightarrow OD^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow OD = 5$$

$$DM = OD + OM = 5 + r = 5 + 3 = 8$$

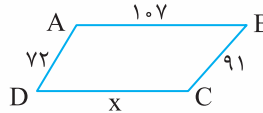


آسان

۱۰- گزینه «۱»

هرگاه در یک چهارضلعی ۳ نیمساز داخلی هم‌رس باشند، نیمساز زاویه چهارم هم حتماً از آن نقطه می‌گذرد و یعنی نیمسازها هم‌رسند و چهارضلعی محیطی است و در این صورت مجموع هر دو ضلع غیرمجاور با هم برابرند.

$$AB + DC = AD + BC \Rightarrow 107 + x = 72 + 91 \Rightarrow x = 56$$

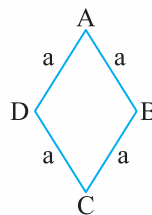


آسان

۱۱- گزینه «۲»

شرط آن که یک چهارضلعی محیطی باشد، آن است که

مجموع اضلاع مقابل با هم برابر باشد که بین گزینه‌ها
 لوزی چنین خاصیتی دارد.



$$AB + DC = AD + BC = P = 2a$$

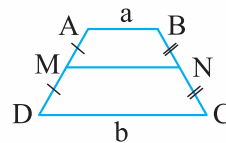
متوسط

۱۲- گزینه «۴»

نکته: در هر دوزنقه طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق برابر میانگین قاعده است.

$$MN = \frac{AB + BC}{2} = \frac{a + b}{2}$$

اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است و دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ می‌دانیم ($AD = BC$) است پس داریم:



$$AD + BC = AB + DC$$

$$\Rightarrow 2AD = a + b$$

$$\Rightarrow AD = \frac{a + b}{2} \Rightarrow AD = MN$$

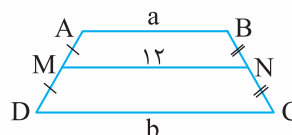
آسان

۱۳- گزینه «۴»

همواره در هر دوزنقه طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق برابر میانگین دو قاعده آن است.

$$MN = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow 12 = \frac{a + b}{2} \Rightarrow a + b = 24$$

می‌دانیم در هر ۴ ضلعی محیطی، مجموع دو ضلع روبه‌رو برابر نصف محیط است. (p)



$$p = AB + DC$$

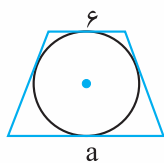
$$\Rightarrow P = a + b = 24$$

$$\Rightarrow 2P = 48$$

آسان

۱۹- گزینه ۴

از نقطه B، دو مماس BM و BN بر دایره رسم شده است پس BM = BN
می دانیم اگر قاعده های یک دوزنقه متساوی الساقین محیطی a و b باشد، شعاع



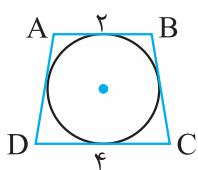
دایره محیطی برابر $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ است پس داریم:

$$\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{6a} \Rightarrow 15 = \frac{1}{4} \times 6a \Rightarrow 60 = 6a \Rightarrow a = 10$$

آسان

۲۰- گزینه ۱

می دانیم اگر قاعده های یک مثلث متساوی الساقین محیطی a و b باشد، شعاع



دایره محیطی برابر $r = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ است پس داریم:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$S = \pi r^2 = 2\pi$$

متوسط

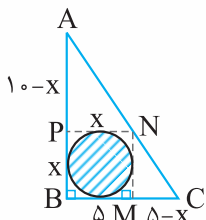
۲۱- گزینه ۱

اگر فرض کنیم قطر دایره x باشد، داریم:

$$PN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AB} = \frac{PN}{BC} \Rightarrow \frac{10-x}{10} = \frac{x}{5} \Rightarrow 10-x = 2x \Rightarrow 10 = 3x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 10-x = 50-5x \Rightarrow 15x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{15} \Rightarrow 2r = \frac{40}{3} \Rightarrow r = \frac{20}{3}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{20}{3}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{800}{9}\pi$$



آسان

۲۲- گزینه ۳

زمانی یک چهارضلعی محیطی است که زاویه های روبه رو مکمل باشند که تنها در گزینه ۳، دو زاویه ۵۷ و ۱۲۳ مکمل هستند که اگر روبه رو هم باشند، چهارضلعی محیطی است.

آسان

۲۳- گزینه ۲

می دانیم در هر چهارضلعی محیطی مجموع دو زاویه مقابل ۱۸۰ است پس

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = 106 \\ \hat{A} + \hat{D} = 112 \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} 2\hat{A} + \hat{B} + \hat{D} = 106 + 112$$

$$\Rightarrow 2\hat{A} + 180 = 218 \Rightarrow 2\hat{A} = 38 \Rightarrow \hat{A} = 19$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 19 + \hat{C} = 180 \Rightarrow \hat{C} = 161$$

دشواری

۱۷- گزینه ۱

از نقطه B، دو مماس BM و BN بر دایره رسم شده است پس BM = BN

$$\triangle BMN : BM = BN \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{BMN} = \hat{BNM} = 30^\circ$$

می دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

پس $\hat{OMA} = \hat{ONC} = 90^\circ$ بنابراین $\hat{OMN} = \hat{ONM} = 60^\circ$

$\hat{MON} = 60^\circ$ و مثلث OMN متساوی الاضلاع است.

$$OM = ON = MN = r$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 90 + 120 + 90 + \hat{C} = 360 \Rightarrow \hat{C} = 60^\circ$$

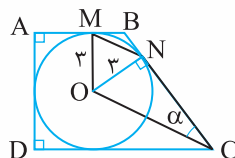
می دانیم مرکز دایره محیطی محل تلاقی نیمسازهای داخلی است بنابراین

$$\alpha = \hat{OCN} = \frac{\hat{C}}{2} = 30^\circ$$

$$\triangle ONC : \tan \alpha = \frac{ON}{NC} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{r}{NC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{NC} \Rightarrow NC = r\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ONC} = \frac{1}{2} ON \times NC = \frac{1}{2} \times r \times r\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{OMNC} = S_{\triangle OMN} + S_{\triangle ONC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$



دشواری

۱۸- گزینه ۳

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 90 + \hat{B} + 45 + 90 = 360 \Rightarrow \hat{B} = 135^\circ$$

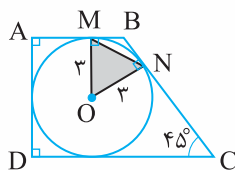
می دانیم شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

$$\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ$$

$$\triangle OMBN : \hat{O} + \hat{M} + \hat{B} + \hat{N} = 360^\circ \Rightarrow \hat{O} + 90 + 135 + 90 = 360$$

$$\Rightarrow \hat{O} = 45^\circ$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \times \sin O = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin 45^\circ = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$



متوسط

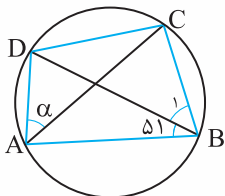
۲۷- گزینه ۱

می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی زوایای روبه‌رو مکمل‌اند، بنابراین داریم:

$$\widehat{ADC} + \widehat{CBA} = 180^\circ \Rightarrow 116 + \widehat{CBA} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{CBA} = 64$$

$$\widehat{CBA} = \widehat{ABD} + \widehat{B_1} \Rightarrow 64 = 51 + \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{B_1} = 13^\circ$$

$$\widehat{B_1} = \alpha = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \alpha = 13^\circ$$



آسان

۲۸- گزینه ۲

در چهارضلعی‌های محاطی، زوایای روبه‌رو مکمل‌اند پس مستطیل و مربع محاطی هستند و در چهارضلعی‌های محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو با هم برابر هستند و برابر نصف محیط هستند پس مربع و لوزی محیطی هستند، بنابراین مستطیل چهارضلعی است که محاطی است ولی محیطی نمی‌باشد.

متوسط

۲۹- گزینه ۱

می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن است پس داریم:

$$\widehat{AB} = 2\widehat{ADB} = 6x$$

$$\widehat{BC} = 2\widehat{BAC} = 4x$$

$$\widehat{DC} = 2\widehat{DBC} = 6x$$

$$\widehat{AD} = 2\widehat{ACD} = 8x$$

می‌دانیم مجموع کمان‌های کل دایره 360° است.

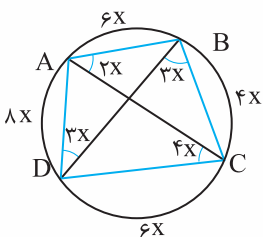
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = 360^\circ \Rightarrow 6x + 4x + 6x + 8x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 24x = 360^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2} \Rightarrow \widehat{C} = \frac{8x + 6x}{2} = 7x = 7(15) = 105$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{DCB}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{6x + 4x}{2} = 5x = 5(15) = 75$$

$$\widehat{C} - \widehat{A} = 105 - 75 = 30^\circ$$



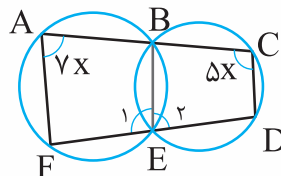
آسان

۳۴- گزینه ۲

B را به E وصل می‌کنیم هر دو چهارضلعی ABEF و BCDE محاطی هستند و زاویه‌های روبه‌رو در آن‌ها مکمل هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{E_1} = 180^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{E_2} = 180^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} \widehat{A} + \widehat{C} + \underbrace{\widehat{E_1} + \widehat{E_2}}_{180^\circ} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 7x + 5x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15$$



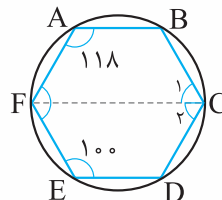
آسان

۳۵- گزینه ۳

C را به F وصل می‌کنیم، در این صورت دو چهارضلعی ABCF و FCDE محاطی خواهند بود و می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی زوایای روبه‌رو مکمل‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} + \widehat{C_1} = 180^\circ \Rightarrow 118 + \widehat{C_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} = 62 \\ \widehat{E} + \widehat{C_2} = 180^\circ \Rightarrow 100 + \widehat{C_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C_2} = 80 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 62 + 80 \Rightarrow \widehat{C} = 142$$



آسان

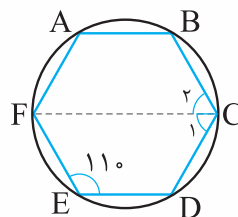
۳۶- گزینه ۲

C را به F وصل می‌کنیم، در این صورت دو چهارضلعی ABCF و FCDE محاطی خواهند بود و می‌دانیم در چهارضلعی‌های محاطی زوایای روبه‌رو مکمل‌اند

$$\widehat{E} + \widehat{C_1} = 180^\circ \Rightarrow 110 + \widehat{C_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} = 70$$

$$\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 125 \Rightarrow 70 + \widehat{C_2} = 125 \Rightarrow \widehat{C_2} = 55$$

$$\widehat{A} + \widehat{C_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 55 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 125$$



دشوار

۳۳- گزینه «۳»

همواره دو ضلعی محاط و محیط به یک دایره با هم متشابه هستند و نسبت

$$\text{تشابه آنها} \cos \frac{180}{n} \text{ می باشد.}$$

$$K = \cos \frac{180}{n} = \cos \frac{180}{6} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{نسبت تشابه}$$

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محاطی}}{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محیطی}} = K^2 \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{S} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3S = 24\sqrt{3} \Rightarrow S = 8\sqrt{3}$$

دشوار

۳۴- گزینه «۲»

می دانیم اندازه هر ضلع یک ضلعی منتظم محاطی از دستور زیر محاسبه می شود.

$$AB = 2R \sin \frac{180}{n} \Rightarrow 2 = 2R \sin \frac{180}{n} \Rightarrow 1 = R \sin 22/5 \Rightarrow R = \frac{1}{\sin 22/5}$$

می دانیم:

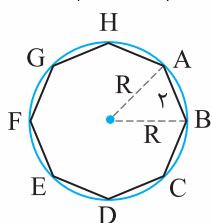
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

اگر به جای α ، $22/5$ درجه قرار دهیم، داریم:

$$\sin^2 22/5 = \frac{1 - \cos 44}{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{\sin 22/5}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin^2 22/5} = \frac{\pi}{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{4\pi}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow S = 2\pi(2 + \sqrt{2})$$



متوسط

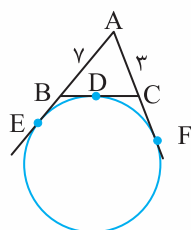
۳۵- گزینه «۱»

$$2P = AB + AC + BC = 7 + 3 + 5 = 15 \Rightarrow P = 7/5$$

می دانیم AE و AF با هم برابرند و هر کدام برابر نصف محیط می باشند.

$$AE = AB + BE \Rightarrow 7/5 = 7 + BE \Rightarrow BE = 0/5 = BD$$

$$AF = AC + CF \Rightarrow 7/5 = 3 + FC \Rightarrow FC = 4/5 = DC$$



$$\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{FC} = \frac{0/5}{4/5} = \frac{1}{9}$$

متوسط

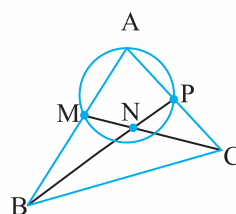
۳۰- گزینه «۳»

می دانیم اندازه زاویه ای که از برخورد ۲ نیمساز داخلی زوایا B و C از مثلث

ABC به وجود می آید برابر $(\hat{N} = 90 + \frac{A}{2})$ است و چون چهارضلعی

AMNP محاطی است پس زوایا روبه رو هم مکمل اند پس داریم:

$$\hat{A} + \hat{N} = 180 \Rightarrow \hat{A} + 90 + \frac{\hat{A}}{2} = 180 \Rightarrow \frac{3}{2}\hat{A} = 90 \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$



دشوار

۳۱- گزینه «۲»

می دانیم در دوزنقه متساوی الساقین زوایای روبه رو به یک قاعده با هم برابر

هستند پس $\hat{A} = \hat{B} = 2\alpha$ و $\hat{C} = \hat{D} = 2\beta$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360 \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 2\beta + 2\beta = 360$$

$$\xrightarrow{\div 4} \alpha + \beta = 90$$

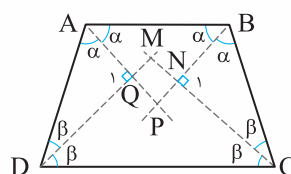
فرض کنیم چهارضلعی MNPQ حاصل از برخورد نیمسازهای دوزنقه

متساوی الساقین ABCD باشد:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADQ: \underbrace{\alpha + \beta}_{90} + \hat{Q}' = 180 \Rightarrow \hat{Q}' = 90 \Rightarrow \hat{Q} = 90 \\ \triangle BCN: \underbrace{\alpha + \beta}_{90} + \hat{N}' = 180 \Rightarrow \hat{N}' = 90 \Rightarrow \hat{N} = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{Q} + \hat{N} = 180$$

پس واضح است $\hat{M} + \hat{P} = 180$ و چون زوایای روبه رو مکمل اند پس

چهارضلعی MNPQ محاطی است.



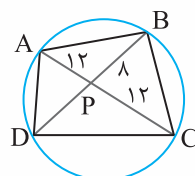
آسان

۳۳- گزینه «۳»

چون چهارضلعی محاطی است، همه رئوس آن روی دایره قرار گرفته است و دو

وتر AC و BD همدیگر را در نقطه P قطع کرده اند، بنابراین داریم:

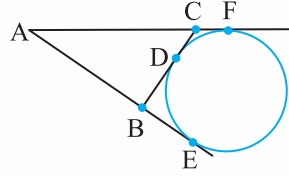
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow 12 \times 12 = 8 \times PD \Rightarrow PD = 18$$



۳۶- گزینه «۴»

آسان

با تغییر نقطه D روی دایره، محیط مثلث همچنان ثابت و برابر $2AE = 2AF$ است، اما مساحت مثلث تغییر می‌کند.



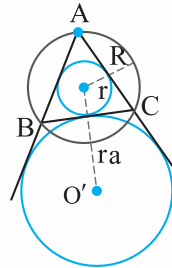
۳۷- گزینه «۱»

دشواری

در مثلث متساوی‌الاضلاع:

- (۱) مرکز دایره محیطی با مرکز دایره محاطی داخلی، یکی است.
- (۲) تمام دایره‌های محاطی خارجی با دایره محاطی داخلی مماس خارج هستند.
- (۳) شعاع دایره محاطی داخلی و محاطی و محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a به ترتیب $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ و $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ است.

$$OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a \xrightarrow{a=\sqrt{3}} OO' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$



۳۸- گزینه «۳»

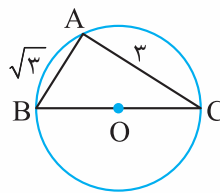
متوسط

در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایره محیطی وسط وتر است پس:

$$(R = \frac{2}{2}) \text{ محیطی}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3 + 9 = 12 \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



۳۹- گزینه «۴»

متوسط

$$S = \pi R^2 \Rightarrow 4\pi\sqrt{3} = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt[4]{3}$$

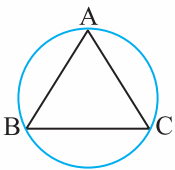
می‌دانیم شعاع دایره محیطی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر

$$\frac{\sqrt{3}}{3}a \text{ است.}$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow 2\sqrt[4]{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow a = \frac{6}{\sqrt[4]{3}}$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

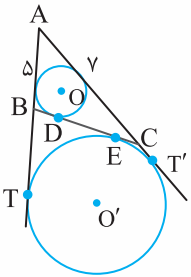
$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{6}{\sqrt[4]{3}} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{36}{\sqrt{3}} = 9$$



۴۰- گزینه «۳»

دشواری

محل تلاقی نیمسازهای داخلی (نقطه O) مرکز دایره محاطی داخلی است و محل تلاقی نیمساز داخلی A با نیمسازهای خارجی B و C مرکز دایره محاطی خارجی است که به ضلع BC مماس است که تصویر نقطه O روی ضلع BC نقطه D است و تصویر نقطه O' روی ضلع BC نقطه E است.



روش اول:

$$2P = AB + BC + AC = 5 + 8 + 7 = 20 \Rightarrow P = 10$$

$$BD = P - AC = 10 - 7 = 3$$

$$AT = AT' = P = 10$$

$$AT = AB + BT \Rightarrow 10 = 5 + BE \Rightarrow BE = 5$$

$$DE = BE - BD = 5 - 3 = 2$$

روش دوم: همواره طول DE برابر قدرمطلق تفاضل دو ضلع AB و AC است.

$$DE = |AC - AB| = |7 - 5| \Rightarrow DE = 2$$

دشوار

۱۴۵- گزینه ۱

می‌دانیم در هر مثلث، نسبت اضلاع برابر عکس نسبت ارتفاع‌ها است.

$$b + c = 3a \xrightarrow{\div a} \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} = 3$$

$$\xrightarrow{\div h_a} \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{3}{h_a} \xrightarrow{+\frac{1}{h_a}} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{4}{h_a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{4}{h_a} \Rightarrow \frac{r}{h_a} = \frac{1}{4} = 0.25$$

متوسط

۱۴۶- گزینه ۴

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی $r = \frac{S}{P}$ و شعاع دایره محاطی خارجی نظیر

رأس A از دستور $r_a = \frac{S}{P - a}$ به دست می‌آید.

$$2P = a + b + c = 7 + 6 + 11 = 24 \Rightarrow P = 12$$

$$\frac{r}{r_a} = \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P - a}} = \frac{P - a}{P} = \frac{12 - 7}{12} = \frac{5}{12}$$

متوسط

۱۴۷- گزینه ۴

می‌دانیم اگر r_a و r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی و r شعاع

دایره محاطی داخلی مثلث باشد رابطه $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ برقرار است.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4 + 6 + 3}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow r = \frac{36}{13}$$

شعاع دایره محاطی داخلی از دستور $r = \frac{S}{P}$ به دست می‌آید.

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow \frac{36}{13} = \frac{144}{P} \Rightarrow \frac{1}{13} = \frac{4}{P} \Rightarrow P = 52 \Rightarrow 2P = 104$$

متوسط

۱۴۸- گزینه ۳

اگر h_a و h_b و h_c سه ارتفاع یک مثلث و r_a و r_b و r_c شعاع‌های

دایره‌های محاطی خارجی و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \\ \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} &= \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{r_c}$$

$$\xrightarrow{\times 60} 5 + 4 + 3 = 6 + 2 + \frac{60}{r_c} \Rightarrow 4 = \frac{60}{r_c} \Rightarrow r_c = 15$$

متوسط

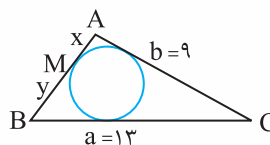
۱۴۹- گزینه ۱

$$2P = AB + AC + BC = 8 + 9 + 13 = 30 \Rightarrow P = 15$$

$$x = AM = p - a = 15 - 13 \Rightarrow x = 2$$

$$y = BM = p - b = 15 - 9 \Rightarrow y = 6$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

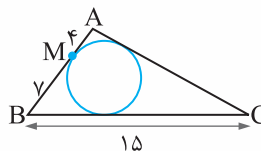


آسان

۱۵۰- گزینه ۳

$$AM = P - BC \Rightarrow 4 = P - 15 \Rightarrow P = 19$$

$$2P = 2(19) = 38$$



متوسط

۱۵۱- گزینه ۴

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم می‌باشد پس:

$$BH = HC = \frac{BC}{2} = 4$$

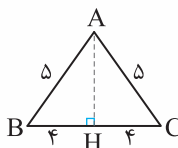
$$\Delta ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 25 = AH^2 + 16 \Rightarrow AH^2 = 9 \Rightarrow AH = 3$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \Rightarrow S = 12$$

$$2P = AB + AC + BC = 5 + 5 + 8 = 18 \Rightarrow P = 9$$

بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی، دایره‌ای است که به بزرگ‌ترین ضلع مثلث

مماس است.



$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{12}{9 - 8} = 12$$

متوسط

۱۵۲- گزینه ۲

اگر h_a و h_b و h_c باشد، شعاع داخلی از رابطه $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ به

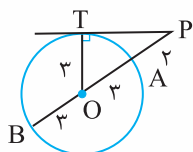
دست می‌آید.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4 + 3 + 2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

متوسط

۳-

از نقطه P به نقطه O مرکز دایره وصل می‌کنیم تا مطابق شکل دایره را در A و B قطع کند A نزدیک‌ترین نقطه روی دایره تا P است که $PA = 2$ است و می‌دانیم OT بر خط PT عمود است.

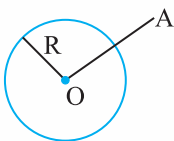


$$\begin{aligned} \Delta OTP : OP^2 &= OT^2 + PT^2 \Rightarrow 25 = 9 + PT^2 \\ \Rightarrow PT^2 &= 16 \Rightarrow PT = 4 \end{aligned}$$

آسان

۴-

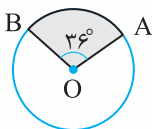
$$OA > R \Rightarrow 3m - 2 > 7 \Rightarrow 3m > 9 \Rightarrow m > 3$$



آسان

۵-

$$S = \frac{\alpha \pi R^2}{360} \Rightarrow S = \frac{36\pi(20)^2}{360} \Rightarrow S = 40\pi$$



متوسط

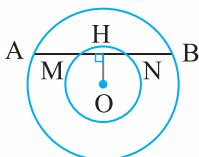
۶-

از نقطه O مرکز دو دایره به AB عمود می‌کنیم، می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند.

$$OH \perp MN \Rightarrow MH = HN$$

$$OH \perp AB \Rightarrow AH = HB$$

$$\Rightarrow AM + MH = HN + BN \xrightarrow{MH=NH} AM = BN$$



متوسط

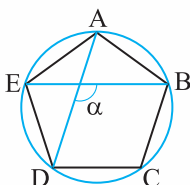
۷-

$$AB = BC = CD = DE = EA$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA} = \frac{360}{5} = 72^\circ$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AE} + \widehat{BCD}}{2} = \frac{\widehat{AE} + \widehat{BC} + \widehat{CD}}{2} = \frac{36 + 36 + 36}{2} = \frac{108}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 54^\circ$$

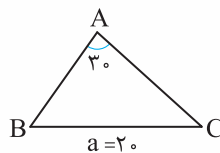


متوسط

۴۹- گزینه ۱»

در هر مثلث نسبت اندازه هر ضلع به $\sin$ زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر قطر دایره محیطی است.

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{20}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow R = 20$$



دشواری

۵۰- گزینه ۳»

می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره، ۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول این مماس‌ها با هم برابر است پس:

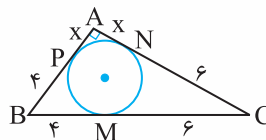
$$BM = BP = 4 \Rightarrow MC = CN = 10 - 4 = 6$$

و $AP = AN = x$ است در این صورت $AB = 4 + x$ و $AC = 6 + x$ و $BC = 10$ است.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow (4+x)^2 + (6+x)^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow 16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2 = 100 \Rightarrow 2x^2 + 20x - 48 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 2 \end{cases} \text{ غرق}$$



$$AC = 6 + x = 6 + 2 = 8$$



آسان

۱-

(آ) درست
(پ) درست
(ب) نادرست
(ت) نادرست

آسان

۲-

(آ) ۹۰ درجه
(پ) $2\sqrt{RR'}$
(ب) کمان
(ت) مربع

دشوار

-۱۳

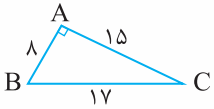
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$$

$$2P = AB + AC + BC = 8 + 15 + 17 = 40 \Rightarrow P = 20$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{60}{20} \Rightarrow r = 3$$

$$\text{مساحت دایره محاطی داخلی} = \pi r^2 = \pi (3)^2 = 9\pi$$



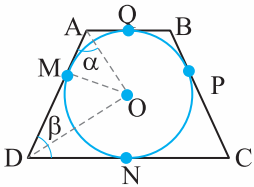
دشوار

-۱۴

اگر فرض کنیم $AB = 2a$ و $DC = 2b$ است می‌دانیم $AQ = QB = a$ و

$DN = NC = b$ است و از هر نقطه خارج دایره ۲ مماس بر دایره می‌توان

رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر است.



$$DN = DM = b, AQ = AM = a$$

هر دوزنقه متساوی‌الساقین $\hat{A} = \hat{B} = 2\alpha$ و $\hat{D} = \hat{C} = 2\beta$ است.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 2\beta + 2\beta = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{\div 4} \alpha + \beta = 90^\circ$$

می‌دانیم مرکز دایره محاطی داخلی، محل تلاقی نیمسازها است پس در مثلث

OAD داریم:

$$\underbrace{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}_{90^\circ} + \hat{O} = 180^\circ \Rightarrow \hat{O} = 90^\circ$$

و شعاع وارد بر خط مماس در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس

$\hat{M} = 90^\circ$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه

هندسی بین پاره‌خط‌های به وجود آمده است پس:

$$OM^2 = AM \times MD \Rightarrow R^2 = ab \Rightarrow 4R^2 = (2a)(2b)$$

$$\Rightarrow 4R^2 = AB \times DC$$

متوسط

-۱۵

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{6+4+3}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{13}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{13}$$

دشوار

-۸

$$Z + 220 = 360 \Rightarrow Z = 140$$

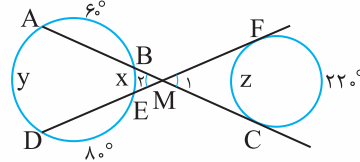
$$\hat{M}_1 = \frac{220 - Z}{2} = \frac{220 - 140}{2} = \frac{80}{2} \Rightarrow \hat{M}_1 = 40$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 40$$

$$\hat{M}_2 = \frac{y - x}{2} \Rightarrow 40 = \frac{y - x}{2} \Rightarrow y - x = 80$$

$$60 + x + 80 + y = 360 \Rightarrow x + y = 220$$

$$\Rightarrow y = 150, x = 70 \Rightarrow \widehat{BE} = 70^\circ$$



دشوار

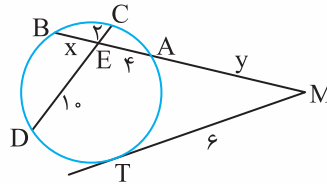
-۹

$$BE \cdot EA = EC \cdot ED \Rightarrow x \times 4 = 2 \times 10 \Rightarrow x = 5$$

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow 6^2 = y(y + 4 + x)$$

$$\xrightarrow{x=5} 36 = y^2 + 9y \Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 12)(y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -12 \text{ غرق} \\ y = 3 \end{cases}$$



آسان

-۱۰

$$OO' = 1$$

$$R + R' = 3 + \sqrt{5} \simeq 5.2$$

$$|R - R'| = 3 - \sqrt{5} \simeq 0.8$$

$$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

متوسط

-۱۱

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{1^2 - (3 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{289 - 225}$$

$$= \sqrt{64} \Rightarrow TT' = 8$$

متوسط

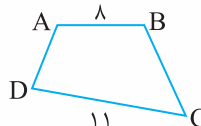
-۱۲

اگر یک چهارضلعی محیطی باشد، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر هستند و

برابر نصف محیط است ($2P = \text{محیط}$)

$$AB + DC = AD + BC = P \Rightarrow 11 + 8 = P \Rightarrow P = 19$$

$$\Rightarrow 2P = 38$$

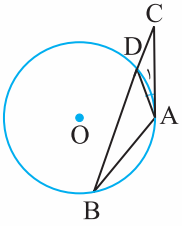


دشوار

-۵

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: AC = AB \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \text{ محاطی} \\ \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2} \text{ ظلی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_1$$

مثلث ADC متساوی الساقین است. $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} \Rightarrow$

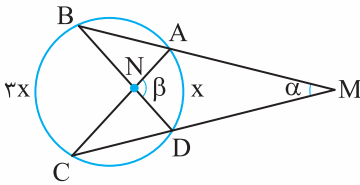


متوسط

-۶

اگر فرض کنیم $\widehat{AB} = x$ آن گاه $\widehat{BC} = 2x$.

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{\widehat{BC} + \widehat{AD}}{2} = \frac{2x + x}{2} \Rightarrow \beta = 3x \\ \alpha = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = \frac{2x - x}{2} \Rightarrow \alpha = x \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 2\alpha$$



دشوار

-۷

با فرض $N = x$ و $AM = y$ داریم:

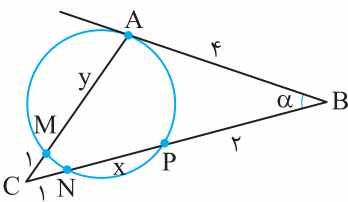
$$AB^2 = BP \cdot BN \Rightarrow 16 = 2 \times (2 + x) \Rightarrow 8 = 2 + x \Rightarrow x = 6$$

$$CN \cdot CP = CM \cdot CA \Rightarrow 1 \times 7 = 1(1 + y) \Rightarrow 7 = y + 1 \Rightarrow y = 6$$

$$BC = BP + PN + CN = 2 + 6 + 1 = 9$$

$$CA = CM + MA = 1 + 6 = 7$$

$$ABC \text{ محیط} = AB + BC + AC = 4 + 9 + 7 = 20$$



آسان

-۱

- (آ) درست
(پ) نادرست
(ب) درست
(ت) درست

آسان

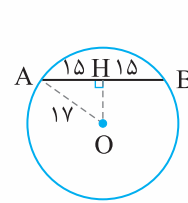
-۲

- (آ) با هم برابرند
(پ) متخارج
(ب) شعاع وارد بر آن نقطه عمود باشد
(ت) محیطی

متوسط

-۳

می‌دانیم اگر از مرکز دایره‌ای به یک وتر از همان دایره عمود کنیم، آن وتر را نصف می‌کند.



$$AH = HB = \frac{AB}{2} = 15$$

$$\begin{aligned} \triangle OAH: OA^2 &= OH^2 + AH^2 \\ \Rightarrow 17^2 &= OH^2 + 15^2 \Rightarrow 289 - 225 = OH^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= 64 \Rightarrow OH = 8 \end{aligned}$$

آسان

-۴

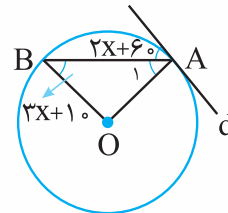
$$\widehat{dAB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow 2x + 60 = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = 4x + 120$$

$$\widehat{O} = \widehat{AB} = 4x + 120$$

$$\triangle OAB: OA = OB = R \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} \hat{B} = \hat{A}_1 = 2x + 10$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{O} = 180 \Rightarrow 3x + 10 + 4x + 120 + 2x + 10 = 180$$

$$\Rightarrow 10x = 40 \Rightarrow x = 4$$

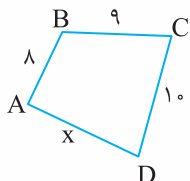


متوسط

-۱۳

وقتی ۳ نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه عبور می‌کند، حتماً نیمساز زاویه چهارم نیز از همان نقطه می‌گذرد یعنی نیمسازها همرسند و چهارضلعی محیطی است و در چهارضلعی محیطی، مجموع هر دو ضلع مقابل با هم برابرند.

$$AB + CD = BC + AD \Rightarrow 8 + 10 = 9 + x \Rightarrow x = 9$$



متوسط

-۱۴

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{4+3+2}{12} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{9}{12} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$



دشوار

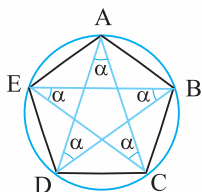
-۱ گزینۀ «۲»

$$AB = BC = CD = DE = EA$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EA} = \frac{360}{5} = 72$$

$$\alpha = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

$$\text{مجموع زوایا} = 5\alpha = 5(36) = 180$$

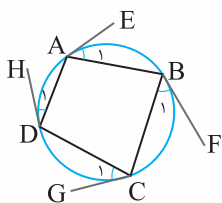


متوسط

-۲ گزینۀ «۱»

می‌دانیم اندازه هر زاویه ظلی نصف کمان روبه‌رو به آن است

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$



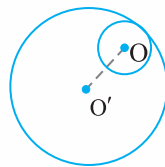
متوسط

-۸

اگر شعاع دایره بزرگ‌تر R' و شعاع دایره کوچک‌تر R باشد

$$OO' = R' - R = 3$$

$$21\pi = \pi R'^2 - \pi R^2 \xrightarrow{\div \pi} 21 = \underbrace{(R' - R)}_3 (R' + R) \Rightarrow R + R' = 7$$



$$\begin{cases} R' - R = 3 \\ R' + R = 7 \end{cases} \Rightarrow R' = 5$$

$$R = 2$$

متوسط

-۹

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 15 = \sqrt{OO'^2 - (14 - 6)^2}$$

$$\Rightarrow 225 = OO'^2 - 64 \Rightarrow OO'^2 = 289 \Rightarrow OO' = 17$$

آسان

-۱۰

دو دایره زمانی ۳ مماس مشترک دارند که مماس برون باشند

$$OD = R + R' \Rightarrow 12 = 2m + 1 + m + 2 \Rightarrow 3m + 3 = 12$$

$$\Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow m = 3$$

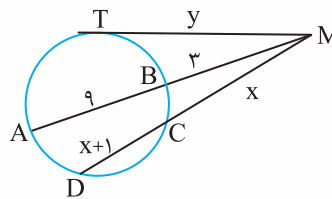
دشوار

-۱۱

$$MB \cdot MA = MC \cdot MD \Rightarrow 3 \times 12 = x \cdot (x + x + 1) \Rightarrow 36 = 2x^2 + x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 36 = 0 \Rightarrow (x - 4)(2x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{9}{2} \text{ غلط} \end{cases}$$

$$MT^2 = MB \cdot MA \Rightarrow y^2 = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow y = 6$$



دشوار

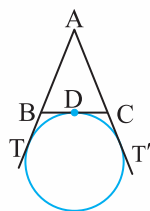
-۱۲

$$AB + BC + AC = 6 + 9 + 7 \Rightarrow AB + BD + DC + AC = 22$$

$$\Rightarrow AB + BT + CT' + AC = 11 \Rightarrow AT + AT' = 22$$

$$\Rightarrow 2AT = 22 \Rightarrow AT = 11$$

$$AT = AB + BT \Rightarrow 11 = 6 + BD \Rightarrow BD = 5$$



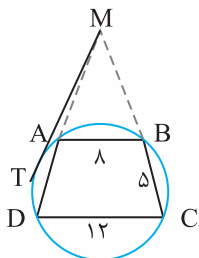
دشوار

۷- گزینه «۲»

$$AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{DC} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{MB}{MB+5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{MB}{MB+5} \Rightarrow 2MB = 2MB + 10 \Rightarrow MB = 10$$

$$MT^2 = MB \cdot MC \Rightarrow MT^2 = 10 \times 15 = 150 = 25 \times 6 \Rightarrow MT = 5\sqrt{6}$$



دشوار

۸- گزینه «۲»

از نقطه M به O و A وصل می کنیم.

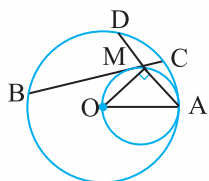
$$\hat{M} = 90^\circ \text{ محاطی رو به قطر}$$

چون از مرکز دایره بزرگتر به وتر AD عمود کرده ایم، آن وتر به قسمت

مساوی تقسیم می شود یعنی MA = MD است و برای دو وتر BC و AD

که یکدیگر را در نقطه M داخل دایره قطع کرده اند، داریم:

$$MA \cdot MD = MB \cdot MC \xrightarrow{MA=MD} MA^2 = MB \cdot MC$$



آسان

۹- گزینه «۱»

$$R + R' = \sqrt{5} + \sqrt{2} \approx 3.7$$

$$|R - R'| = \sqrt{5} - \sqrt{2} \approx 0.8$$

$$|R - R'| < OO' = 1 < R + R' \Rightarrow \text{دو دایره متقاطع هستند}$$

آسان

۱۰- گزینه «۴»

$$\begin{cases} 3R_1 + 4R_2 = 4d \\ R_1 + 2R_2 = \frac{11}{6}d \end{cases} \Rightarrow R_1 = \frac{d}{3}, R_2 = \frac{3}{4}d \Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{13d}{12}$$

$$R_2 - R_1 = \frac{5d}{12}$$

$$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow$$

دو دایره متقاطع هستند و ۲ مماس مشترک دارند.

آسان

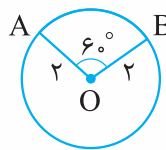
۱۱- گزینه «۳»

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{100 - (5 + 3)^2}$$

$$= \sqrt{36} \Rightarrow TT' = 6$$

آسان

۱۲- گزینه «۲»



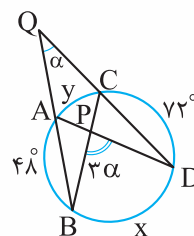
$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha \pi R}{180} = \frac{60 \pi \times 2}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

اگر $\hat{Q} = \alpha$ باشد با $\hat{P} = 3\alpha$ است با فرض $\widehat{AC} = y$ داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 2\alpha = x - y \\ 3\alpha = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 6\alpha = x + y \end{cases} \Rightarrow x = 4\alpha \Rightarrow y = 2\alpha$$



$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} + \widehat{AB} = 360$$

$$\Rightarrow y + 72 + x + 48 = 360$$

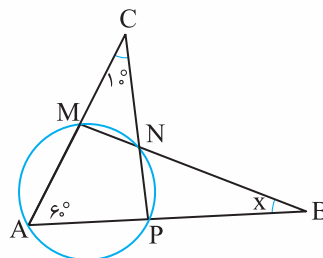
$$\Rightarrow 6\alpha = 240 \Rightarrow \alpha = 40$$

$$\widehat{BD} = x = 4\alpha = 160$$

آسان

۱۴- گزینه «۳»

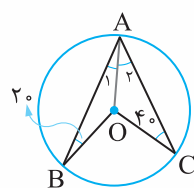
$$\hat{C} + \hat{B} + 2\hat{A} = 180 \Rightarrow 10 + x + 120 = 180 \Rightarrow x = 50$$



آسان

۱۵- گزینه «۴»

O را به A وصل می کنیم.



$$\begin{cases} \triangle AOB: OA = OB = R \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B} = 20 \\ \triangle AOC: OA = OC = R \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 60 \Rightarrow \hat{A} = 60$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow 60 = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 120$$

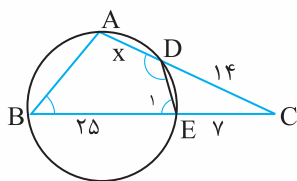
دشوار

۱۴- گزینه ۲»

چون $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ پس $\hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$ در نتیجه چهارضلعی $ADEB$ محاطی است و دو وتر AD و BE همدیگر را در نقطه C خارج دایره قطع کرده‌اند پس داریم:

$$CD \times CA = CE \times CB \Rightarrow 14 \times (14 + x) = 7 \times 32$$

$$\div 14 \rightarrow 14 + x = 16 \Rightarrow x = 2$$



دشوار

۱۵- گزینه ۲»

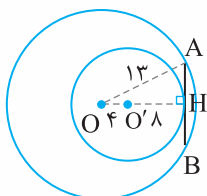
می‌دانیم هر وترى که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و هرگاه از مرکز یک دایره به یک وتر از همان دایره عمود کنیم آن وتر را نصف می‌کند $AH = HB$.

بیش‌ترین فاصله وترى از دایره بزرگ‌تر که به دایره کوچک‌تر مماس است برابر OH است که $OH = 4 + 8 = 12$.

$$\Delta OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 169 = AH^2 + 144$$

$$\Rightarrow AH^2 = 25 \Rightarrow AH = 5$$

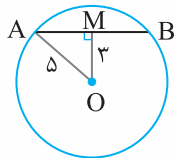
$$AB = 2AH = 10.$$



متوسط

۱۶- گزینه ۳»

کوتاه‌ترین وترى از دایره که از نقطه M می‌گذرد، وترى است که به قطر عبورى از M عمود باشد.



$$OA^2 = OH^2 + AM^2 \Rightarrow 25 = 9 + AM^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4$$

$$AB = 2AM = 2(4) = 8$$

متوسط

۱۷- گزینه ۱»

همواره طول مماس مشترک داخلی دو دایره از طول مماس مشترک خارجى آن بزرگ‌تر نمى‌باشد.

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2} \Rightarrow \sqrt{10^2 - (R + 1)^2}$$

$$\Rightarrow 64 = 100 - (R + 1)^2 \Rightarrow (R + 1)^2 = 36 \Rightarrow R + 1 = 6 \Rightarrow R = 5$$

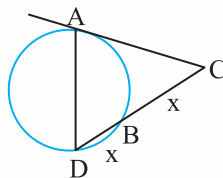
متوسط

۱۲- گزینه ۴»

$$DB = BC = x$$

$$AC^2 = CB \cdot CD \Rightarrow AC^2 = x \times 2x \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$



دشوار

۱۳- گزینه ۴»

می‌دانیم در چهارضلعی محیطی، جمع دو ضلع روبه‌رو با هم برابر است، اگر فرض کنیم $AB = a$ و $CD = b$ داریم:

$$AB + CD = AD + BC \xrightarrow{AD=BC} a + b = 2AD$$

$$\Rightarrow AD = \frac{a + b}{2}$$

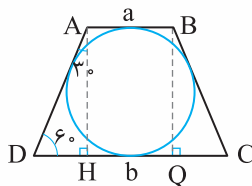
ارتفاع‌های AH و BQ را رسم می‌کنیم $AB = HQ = a$ و

$$DH = QC = \frac{b - a}{2} \text{ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به}$$

زاویه 30° نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه 60° ، وتر است $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$DH = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{4} \Rightarrow 2b - 2a = a + b \Rightarrow b = 3a$$

$$P = AB + DC = a + b = 4a$$



می‌دانیم اگر یک دوزنقه هم محیطی و هم محاطی باشد (دوزنقه متساوی‌الساقین همواره محاطی است) مساحت آن برابر حاصل ضرب واسطه حسابی در واسطه هندسی قاعده‌ها است.

$$S = \frac{a + b}{2} \sqrt{ab} \xrightarrow{b=3a} S = 2a \times a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4a} \Rightarrow r = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$S = 2a^2\sqrt{3} = 2 \times \frac{16}{3} \sqrt{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

۲- گزینه ۳»

M را به A و B وصل می‌کنیم.

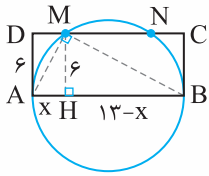
$\widehat{AMB} = 90^\circ$ محاطی روبه‌رو به قطر

در مثلث قائم‌الزاویه $\widehat{AMB}$ ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم فرض کنیم $AH = x$ باشد، در این صورت $HB = 13 - x$ است.

$$MH^2 = AH \times HB \Rightarrow 36 = x(13 - x) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 9)(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

چون $x < \frac{13}{2}$ است پس $x = 4$ یعنی $DM = 4$ و به طریق $NC = 4$ است.



$$\begin{aligned} MN &= DC - (DM + NC) \\ &= 13 - (4 + 4) = 13 - 8 = 5 \end{aligned}$$

۳- گزینه ۱»

B را به D وصل می‌کنیم، زاویه D محاطی رو به قطر است پس $\widehat{D} = 90^\circ$.

$$ED = EH \xrightarrow{\text{عکس قضیه نیمساز}} \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{CD}$$

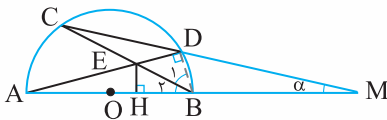
در چهارضلعی HEDB مجموع زوایا 360° است پس داریم:

$$90 + 110 + 90 + B = 360 \Rightarrow \widehat{B} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} = 35^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{CD} = 70^\circ$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{DB} = 180^\circ \Rightarrow 70 + 70 + \widehat{DB} = 180 \Rightarrow \widehat{DB} = 40^\circ$$

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2} = \frac{70 - 40}{2} = 15^\circ$$

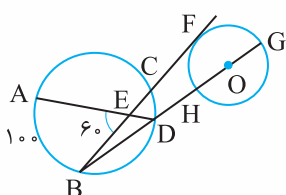


۴- گزینه ۴»

$$\widehat{AEB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 60 = \frac{100 + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 20^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{20}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 10^\circ$$

اگر فرض کنیم $\widehat{FH} = x$ آن‌گاه $\widehat{FG} = 180 - x$ است و در دایره کوچک‌تر داریم:



$$\widehat{B} = \frac{\widehat{FG} - \widehat{FH}}{2} \Rightarrow 10 = \frac{180 - x - x}{2}$$

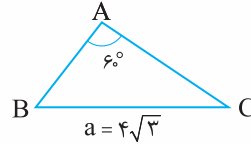
$$\Rightarrow 20 = 180 - 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 160 \Rightarrow x = 80$$

۱۸- گزینه ۳»

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow 8 = 2R \Rightarrow R = 4$$

$$S = \pi R^2 = \pi(4)^2 \Rightarrow S = 16\pi$$



متوسط

۱۹- گزینه ۲»

می‌دانیم در چهارضلعی محاطی مجموع زوایا روبه‌رو 180° است اگر

$\widehat{A} = 102^\circ$ و $\widehat{B} = 75^\circ$ باشد چون $\widehat{A} + \widehat{B} \neq 180^\circ$ است پس A و B روبه‌رو هم نیستند.

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180 \Rightarrow 102 + \widehat{C} = 180 \Rightarrow C = 78^\circ$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = 180 \Rightarrow 75 + \widehat{D} = 180 \Rightarrow D = 105^\circ$$

پس $\widehat{D} = 105^\circ$ بزرگ‌ترین زاویه چهارضلعی است.

متوسط

۲۰- گزینه ۱»

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{4+3+2}{24} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{24}{9} \Rightarrow r = \frac{8}{3}$$



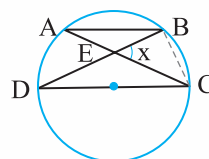
۱- گزینه ۲»

C را به B وصل کنیم، $\widehat{EBC} = 90^\circ$ محاطی رو به قطر است پس

است در مثلث قائم‌الزاویه EBC داریم:

$$\cos x = \frac{BE}{EC} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \widehat{A} = \widehat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{محاطی} \\ \text{محاطی} \end{aligned} \Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta EDC \Rightarrow K = \frac{BE}{EC} \xrightarrow{(1)} K = \cos x$$



$$\frac{S_{\Delta AEB}}{S_{\Delta EDC}} = K^2 = \cos^2 x$$

۸- گزینه «۳»

A را به N وصل می‌کنیم، چون N محاطی رو به قطر است، $\hat{N} = 90^\circ$

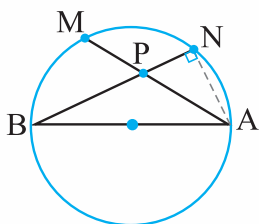
$$\Delta ANP : PA^2 = PN^2 + AN^2 \Rightarrow 100 = 36 + NA^2$$

$$\Rightarrow NA^2 = 64 \Rightarrow NA = 8$$

$$PB \cdot PN = PM \cdot PA \Rightarrow PB \times 6 = 5/4 \times 10 \Rightarrow PB = 9$$

$$BN = BP + PN = 9 + 6 = 15$$

$$\Delta NBA : BA^2 = BN^2 + NA^2 \Rightarrow (2R)^2 = 225 + 64 = 289$$

$$\Rightarrow 2R = 17 \Rightarrow R = 8.5$$


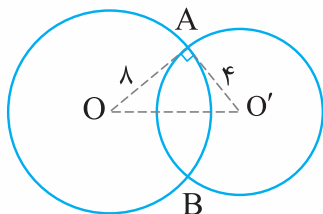
۹- گزینه «۳»

روش اول:

$$\Delta OAO' : OO'^2 = OA^2 + O'A^2 = 64 + 16 = 80 \Rightarrow OO' = \sqrt{80}$$

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{80 - (8 - 4)^2} = \sqrt{80 - 16} = \sqrt{64} = 8$$

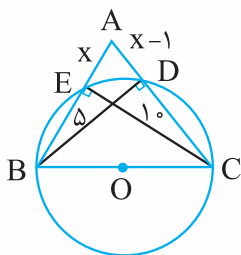
روش دوم: اگر دو دایره در نقطه A متقاطع باشند و $\angle OAO' = 90^\circ$ باشد طول مماس مشترک خارجی دو دایره از دستور $TT' = \sqrt{2RR'}$ به دست می‌آید.

$$TT' = \sqrt{2RR'} = \sqrt{2 \times 4 \times 8} = \sqrt{64} \Rightarrow TT' = 8$$


۱۰- گزینه «۲»

دایره به قطر BC حتماً از D و E می‌گذرد چون D و E محاطی رو به قطر هستند که $\hat{D} = \hat{E} = 90^\circ$ است و امتداد دو وتر BE و CD از این دایره در خارج دایره همدیگر را قطع کرده‌اند پس داریم:

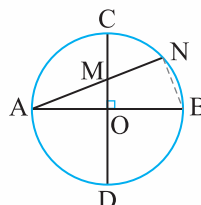
$$AE \cdot AB = AD \cdot AC \Rightarrow x(x+5) = (x-1)(x+9)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = x^2 + 8x - 9 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$


۵- گزینه «۱»

B را به N وصل می‌کنیم، زاویه N محاطی رو به قطر است پس $\hat{N} = 90^\circ$

$$\hat{O} = \hat{N} = 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ن.ز.}} \Delta AOM \sim \Delta ABN \xrightarrow{\text{ا.م.}} \frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AN} \\ \text{مشترک } \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{10} = \frac{5}{8} \Rightarrow AM = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} \Rightarrow AM = 6.25$$


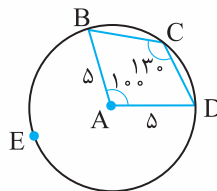
۶- گزینه «۲»

به مرکز A و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم چون $AB = AD = 5$ است حتماً روی این دایره می‌باشد، ثابت می‌کنیم C هم روی این دایره است.

$\hat{A} = \widehat{BCD} \Rightarrow \widehat{BCD} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 360 - 100 = 260$

$\hat{C} = \frac{\widehat{BED}}{2} = 130^\circ \Rightarrow$ C روی دایره است.

پس $AC = R = 5$ است.



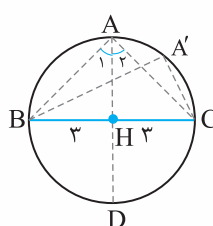
۷- گزینه «۴»

قاعده $BC = 6$ ثابت است و زمانی مساحت ماکزیمم می‌شود که ارتفاع آن

ماکزیمم شود و برای این منظور A باید روی قطر عمود بر BC در دایره

محیطی مثلث ABC قرار گیرد که می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن را نصف

می‌کند و کمان آن را هم نصف می‌کند پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$.



$$\tan A_1 = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{AH}$$

$$\Rightarrow AH = 3\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 6 = 9\sqrt{3}$$

۱۳- گزینه «۳»

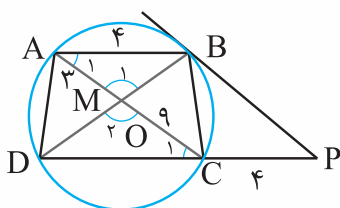
$$AB \parallel DC, AC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{ متقابل به راس} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \triangle AMB \sim \triangle MDC$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{6}{DC} \Rightarrow DC = 18$$

از نقطه P مماس PB و قاطع PD رسم شده است بنابراین داریم:

$$PB^2 = PC \cdot PD \Rightarrow PB^2 = 6 \times 24 = 144 \Rightarrow PB = 12$$



۱۴- گزینه «۲»

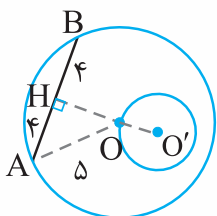
ابتدا مکان هندسی نقاطی را پیدا می‌کنیم که وسط وترى به طول ۸ از دایره بزرگ‌تر باشد، می‌دانیم اگر از نقطه O (مرکز دایره) به وسط وتر وصل کنیم بر آن عمود است.

$$\begin{aligned} \triangle OAH : OA^2 &= AH^2 + OH^2 \Rightarrow 25 = 16 + OH^2 \\ \Rightarrow OH^2 &= 9 \Rightarrow OH = 3 \end{aligned}$$

دو دایره $C'(O', 2)$ و $C''(O'', 3)$ چون $OO' = 2$ است و

$$|R'' - R| < OO' < R' + R'' \quad (1 < OO' < 5)$$

مماس مشترک دارند.



۱۱- گزینه «۴»

O را به O' وصل می‌کنیم.

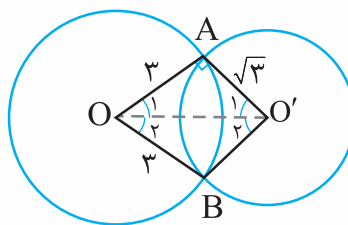
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = 3 \\ O'A = O'B = \sqrt{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAO' \cong \triangle OBO'$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\hat{O}}{2} \\ \hat{O}'_1 = \hat{O}'_2 = \frac{\hat{O}'}{2} \end{array} \right.$$

$$\triangle OAO' : \tan \hat{O}'_1 = \frac{OA}{O'A} \Rightarrow \tan \frac{\hat{O}'}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{O}'}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{O}' = 120^\circ$$

$$|\widehat{AB}| = \frac{\hat{O}' \times \pi R'}{180} = \frac{120 \times \pi \times \sqrt{3}}{180} \Rightarrow |\widehat{AB}| = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$



۱۲- گزینه «۱»

از مرکز دایره به وتر BC عمود می‌کنیم. می‌دانیم این پاره‌خط وتر BC را نصف می‌کند یعنی $BH = HC = 6$.

$$\triangle OBH : OB^2 = OH^2 + BH^2 \Rightarrow 100 = OH^2 + 36$$

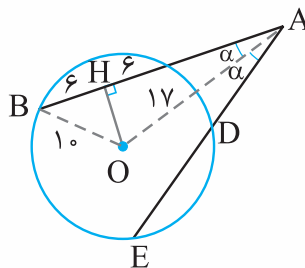
$$\Rightarrow OH^2 = 64 \Rightarrow OH = 8$$

$$\triangle OHA : OA^2 = OH^2 + HA^2 \Rightarrow 289 = 64 + HA^2$$

$$\Rightarrow HA^2 = 225 \Rightarrow HA = 15$$

$$\triangle OHA : \tan \alpha = \frac{OH}{HA} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{8}{15}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{16}{25}}{1 - \frac{64}{225}} = \frac{\frac{16}{25}}{\frac{161}{225}} = \frac{16}{161} = \frac{240}{161}$$



۱۷- گزینۀ «ا»

O را به T و T' وصل کنیم حتماً $\hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ$ است چون چهارضلعی

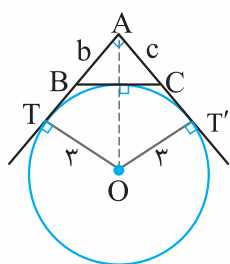
ATOT' دارای ۴ زاویه قائمه است و طول عرض آن با هم برابر است

$$AT = AT' = 3 \text{ پس مربع است بنابراین } OT = OT' = R = 3$$

$$AT = P \Rightarrow P = 3$$

$$r_a = \frac{s}{p-a} \Rightarrow 3 = \frac{6}{3-a} \Rightarrow 3-a=2 \Rightarrow a=1$$

شعاع دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است پس $R = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$



۱۸- گزینۀ «ا»

O را به A وصل می‌کنیم چون از مرکز دایره به وتر AB عمود شده است پس

AH = HB است و می‌دانیم قطر AC مربع، قطر دایره هم می‌باشد و

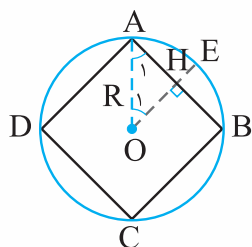
قطرهای مربع نیمساز هستند پس $\hat{A}_1 = 45^\circ$ در نتیجه $\hat{O}_1 = 45^\circ$ است.

$$\triangle OAH : \hat{O}_1 = \hat{A}_1 \xrightarrow{\text{متساوی الساقین}} AH = HO$$

$$AO^2 = OH^2 + AH^2 \Rightarrow R^2 = 2OH^2 \Rightarrow R = \sqrt{2}OH$$

$$\Rightarrow OH + HE = \sqrt{2}OH \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = (\sqrt{2} - 1)OH \Rightarrow OH = 1$$

$$R^2 = 2OH^2 = 2(1)^2 = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}$$



۱۵- گزینۀ «ا»

شعاع‌های O'P و O'N و OM بر خط Δ عمودند از O'' به OM

عمود رسم می‌کنیم $O'P = HN = QM = 2$ پس $O'H = 4 - 2 = 2$ و

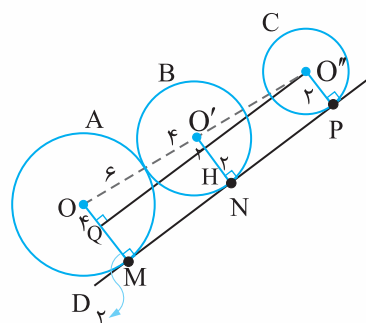
OQ = 6 - 2 = 4 است چون دایره C و C' مماس خارج هستند

$$OO' = R + R' = 6 + 4 = 10$$

$$\triangle OQO'' : O'H \parallel OQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O''O'}{O'O} = \frac{O'H}{OQ}$$

$$\Rightarrow \frac{O''O'}{O'O + 10} = \frac{2}{4} \Rightarrow 2O''O' = 10 + O''O' \Rightarrow O''O' = 10$$

$$\Rightarrow R' + BC + R'' = 10 \Rightarrow 4 + BC + 2 = 10 \Rightarrow BC = 4$$



۱۶- گزینۀ «ب»

شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی ذوزنقه یک کایت قائم‌الزاویه است،

می‌دانیم قطر بزرگ کایت نیمساز هم می‌باشد، پس چون در مثلث قائم‌الزاویه

ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه 60° و وتر $\frac{\sqrt{3}}{2}$

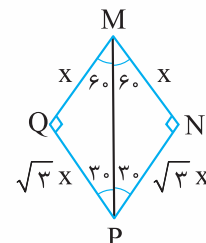
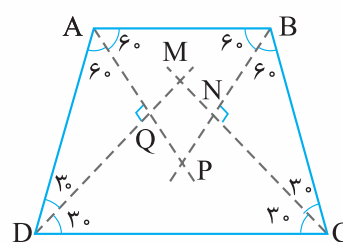
است پس با فرض $MP = 2x$ داریم $MQ = MN = x$

QP = PN = $\sqrt{3}x$ چون مثلث MNP در رأس N قائمه است شعاع

$$\text{دایره محیطی نصف وتر است یعنی } R = \frac{MP}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{MQ \times MN}{MQ + QP} = \frac{x \times x \sqrt{3}}{x + x \sqrt{3}} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{x(1 + \sqrt{3})} \Rightarrow r = \frac{x \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{\frac{x \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$



۱۹- گزینه «۲»

در مثلث متساوی الساقین می‌دانیم، ارتفاع وارد بر قاعده، میانه هم می‌باشد پس

$$BH = HC = \frac{BC}{2} = ۸, \text{ اگر فرض کنیم } AB = AC = x \text{ داریم:}$$

$$\triangle ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow x^2 = AH^2 + ۶۴ \Rightarrow AH = \sqrt{x^2 - ۶۴}$$

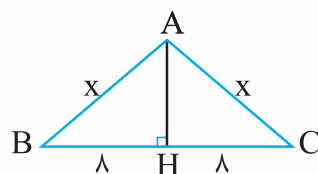
$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{\sqrt{x^2 - ۶۴} \times ۱۶}{2} = ۸\sqrt{x^2 - ۶۴}$$

$$2p = x + x + ۱۶ \Rightarrow p = x + ۸$$

$$r = \frac{s}{p} \Rightarrow \frac{۸}{3} = \frac{۸\sqrt{x^2 - ۶۴}}{x + ۸} \Rightarrow x + ۸ = 3\sqrt{x^2 - ۶۴}$$

$$\Rightarrow x^2 + ۱۶x + ۶۴ = ۹x^2 - ۵۷۶ \Rightarrow ۸x^2 - ۱۶x - ۶۴۰ = ۰$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - ۸۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱۰)(x + ۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۰ \\ x = -۸ \end{cases} \text{ غلط}$$



۲۰- گزینه «۴»

واضح است که $BQ = 2$ و $QC = 3$ است و می‌دانیم از هر نقطه خارج دایره

۲ مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که طول مماس‌ها با هم برابر هستند.

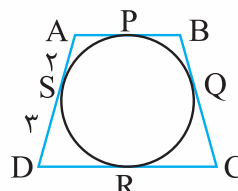
$$\begin{cases} AP = AS = 2 \\ PB = PQ = 2 \end{cases} \Rightarrow AB = AP + PB = 4$$

$$\begin{cases} DS = DR = 3 \\ CR = CQ = 3 \end{cases} \Rightarrow DC = DR + RC = 3 + 3 = 6$$

می‌دانیم اگر یک دوزنقه متساوی الساقین محیطی باشد (چون محاطی هم

می‌باشد) مساحت آن برابر است با حاصل ضرب واسطه حسابی در واسطه

هندسی قاعده‌ها.



$$\begin{aligned} S &= \frac{AB \times CD}{2} \sqrt{AB \cdot CD} \\ &= \frac{4 + 6}{2} \times \sqrt{4 \times 6} \\ &= 5 \times 2 \times \sqrt{6} = 10\sqrt{6} \end{aligned}$$