

تجانس:

نسبت تجانس

تجانس با ضرایب

تعریف: اگر O نقطه ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) سه نقطه M ، O و M' روی یک خط راست باشند.

$$\frac{OM'}{OM} = |k|$$

(ب) $OM' = |k|OM$ ← ضرایب صریح تجانس تا تصویر
 ← ضرایب صریح تجانس تا شکل اولیه

(پ) اگر k مثبت باشد M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند. و اگر k منفی باشد نقطه O بین نقاط M و M' قرار می گیرد.



به عنوان مثال با فرض $k = 2$ داریم: $OM' = 2OM$

و اگر $k = -\frac{1}{3}$ در این صورت $OM' = \frac{1}{3}OM$

در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k ؛

اگر $k > 0$ تجانس را تجانس مستقیم می نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را تجانس معکوس می نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل کوچکتر می شود و آن را انقباض می نامیم.

اگر $|k| > 1$ تصویر شکل بزرگتر می شود و آن را انبساط می نامیم.

نکته ۱: اگر $k = 1$ باشد تجانس تبدیل همانی است. یعنی هر نقطه را به خودش تصویر می کند.



$$OM' = |k| \times OM = 1 \times OM$$

نکته ۲: اگر $k = -1$ باشد تجانس دوران به زاویه 180° است.

تست: نقطه M' تصویر نقطه M در تجانس به مرکز O و به نسبت $\frac{4}{3}$ است. اگر نقطه M' تصویر نقطه O در

$$OM' = k \times OM$$

$$k > 1$$

تجانس به مرکز M باشد، نسبت تجانس کدام است؟

$$\rightarrow \frac{OM'}{OM} = k \Rightarrow -\frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \right)$$

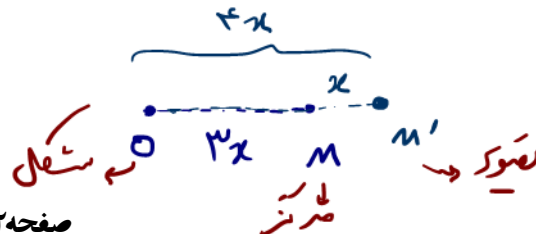
البسته میم

$$\frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$-\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \right) \checkmark$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} OM' = 4x \\ OM = 3x \end{cases}$$



راه حل:

اما چون مرکز تناسل نقطه O است : $k = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$
 اما k عددی منفی است : $k = -\frac{1}{3}$
 قضیه : تنجاس، شیب خط را حفظ می کند.

اثبات: تنجاس D با مرکز تنجاس O و نسبت تنجاس k و خط AB را در نظر می گیریم. دو حالت اتفاق می افتد:

$AB = 1$ و $k = 2$

$OA' = 2 \times OA$

$2 \times 4 = 8$

$OB' = 2 \times OB = 2 \times 4 = 8$

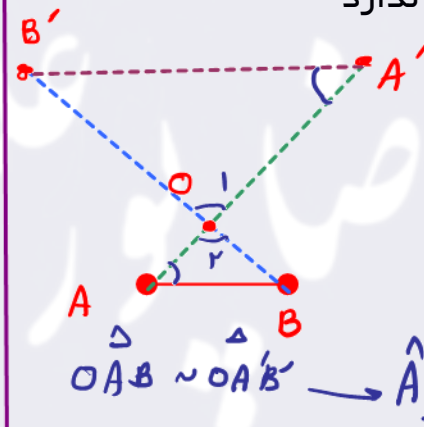
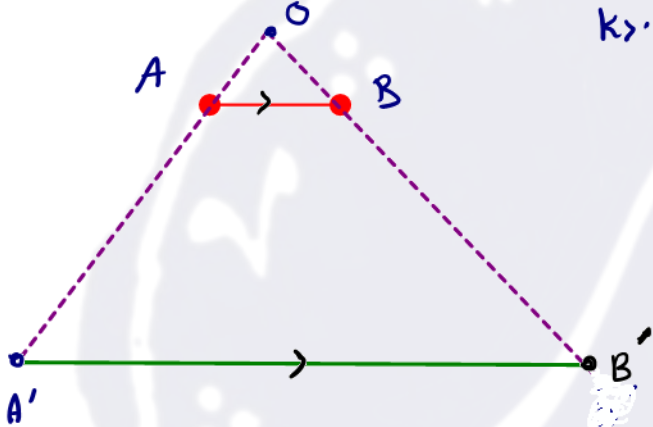
الف) نقطه O روی خط AB است فرض کنیم $k > 0$

$AB \parallel A'B' \Rightarrow \angle AOB = \angle A'O'B'$



ب) نقطه O روی خط AB قرار ندارد

$k < 0$



$\frac{OA'}{OA} = k$
 $\frac{OB'}{OB} = k$
 $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$
 دو مثلث متشابه
 مرکز تنجاس O

$OA \sim OA'$
 $\hat{A} = \hat{A}'$
 $AB \parallel A'B'$

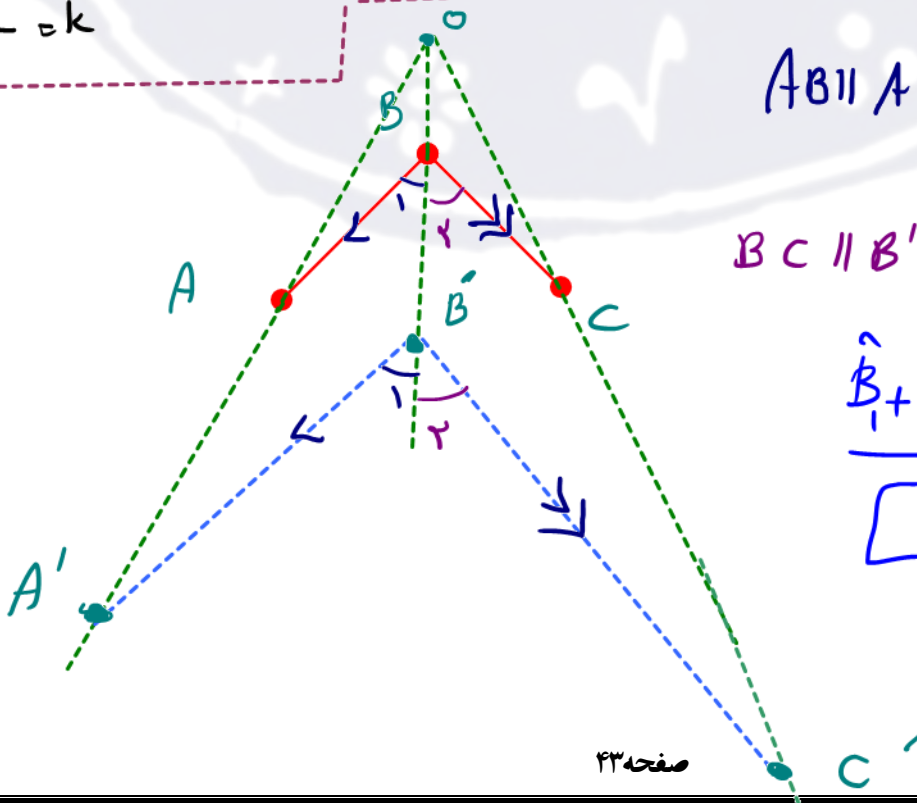
قضیه : تنجاس اندازه زاویه را حفظ می کند.

اثبات:

$AB \parallel A'B'$ و BB'
 $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$
 مورب

$BC \parallel B'C'$ و BB'
 $\hat{B}_2 = \hat{B}'_2$
 مورب

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_2$
 $\hat{B} = \hat{B}'$



خواص تجانس:

چون سبب را حفظ می کند.

۱- تصویر یک در خط در یک تجانس خطی موازی با آن است.

سبب کتاب

۲- تجانس، طول را $|k|$ برابر و مساحت را k^2 برابر می کند. پس

تجانس طولی نیست مگر این که $k = \pm 1$ باشد.

نسبت کردیم

۳- تجانس، اندازه زاویه و جهت شکل را تغییر نمی دهد

۴- تجانس دارای یک نقطه ثابت است که همان مرکز تجانس می

باشد

۵- دو پاره خط موازی در صفحه همواره مجانس یکدیگرند

محلوس

اگر طول دو پاره خط برابر نباشد مرکز تجانس، نقطه تلاقی قطرهای و یا محل

تلاقی امتداد ساق های دوزنقه ایجاد شده می باشد.

مستقیم

مرکز تجانس
محلوس

و اگر طول دو پاره خط برابر باشد در تجانس معکوس به نسبت $k = -1$

مجانس یکدیگرند.

مرکز تجانس
محلوس

$$k = -1$$

مرکز تجانس

$$k = \frac{2}{3} \oplus$$

خطی هم

مثال: یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای

تصویر کرده ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد محیط مربع اولیه را

محاسبه کنید. $OA' = \frac{2}{3}OA$, $OB' = \frac{2}{3}OB$, $OC' = \frac{2}{3}OC$

$$OD' = \frac{2}{3}OD$$

راه حل: $A'B'C'D' \leftarrow$ تصویر $ABCD$

$$AB = a, A'B' = kAB \rightarrow A'B' = \frac{2}{3}a$$

$$S_{رد} = 5 \rightarrow S_{رد} = S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'}$$

$$5 = a^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \rightarrow \frac{5}{9}a^2 - \frac{4}{9}a^2 = 5 \rightarrow$$

$$\frac{1}{9}a^2 = 5 \rightarrow a^2 = 45 \rightarrow a = 3\sqrt{5}$$

تست: دو دایره به شعاع های ۲ و ۵ و طول خط المرکزین ۷ مجانس یکدیگرند. اگر تجانس مستقیم باشد کمترین فاصله مرکز تجانس از دایره کوچکتر کدام است؟

$$۴ \quad (۴)$$

$$\frac{10}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{8}{3} \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

راه حل:

تبدیل همانی: تبدیل I را یک تبدیل همانی گویند هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم

$$I(A) = A$$

سوال: در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می توانند تبدیل همانی باشند؟

جواب:

انتقال $\leftarrow$ بردار انتقال صفر باشد

دوران $\leftarrow$ زاویه دوران صفر یا ۳۶۰° باشد، $\alpha = ۳۶۰^\circ n$

تجانس $\leftarrow k = 1$

سوال: آیا تبدیل همانی طولیاست؟

جواب:

بله چون هر نقطه را روی خودش تبدیل می کند:

نقشه شکل

$$I(A) = A$$

$$I(B) = B \Rightarrow AB = AB \quad \checkmark$$

نقشه بر نقشه شکل

مثال: جدول زیر را کامل کنید ~~و~~ **امتحان نهایی**

تبدیل	طول پاره خط را حفظ می کند (مطلوبی)	زاویه اندازه حفظ را می کند	شیب خط را حفظ می کند	جهت شکل را حفظ می کند	مساحت شکل را حفظ می کند
بازتاب	✓	✓	✗	✗	✓
انتقال	✓	✓	✓	✓	✓
دوران	✓	✓	✗	✓	✓
تجانس	✗	✓	✓	✓	✗

$$\hookrightarrow S' = k^2 S$$

کاربرد تبدیل ها: (درس ۲ فصل ۲)

کاربردهایی از بازتاب (قرینه یابی):

بازتاب علاوه بر شاخه های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و ... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی های بازتاب همان ویژگی های آینه تخت است.

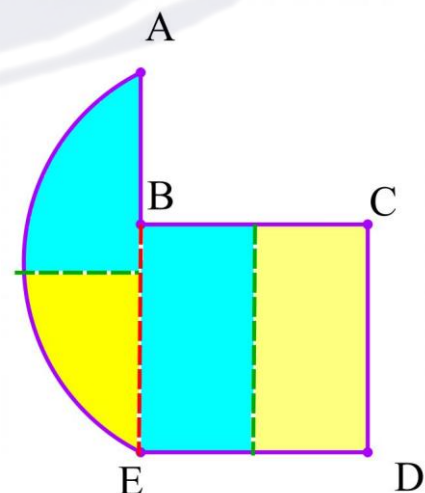
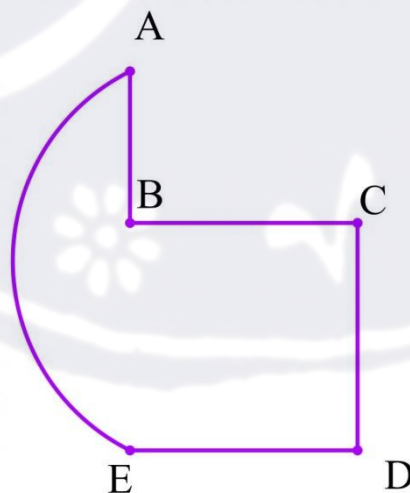
مثال: می خواهیم کیک به شکل زیر را به طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع

$BCDE$ و کمان AE از یک دایره تشکیل شده

است به طوری که A و B و E روی یک خط

هستند. با استفاده از تبدیل بازتاب به دو

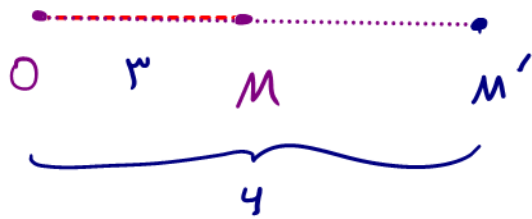
قسمت مساوی تقسیم کنید.



$$OM' = k \times OM = 2 \times 2 = 4$$

$$OM' = ? , OM = 2 , k = 2 \quad (1)$$

در نقطه M' و M در یک طرف O قرار می‌گیرد
(در خطی که M وجود دارد)

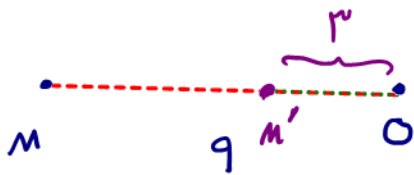


← + : انبساط مستقیم

$$OM' = k \times OM = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

$$OM' = ? , OM = 9 , k = \frac{1}{3} \quad (2)$$

← + : M و M' در یک طرف O قرار دارد
← انقباض مستقیم



$$OM' = |k| \times OM = 3 \times 1,5 = 4,5$$

$$OM' = ? , OM = 1,5 , k = -3 \quad (3)$$

← - : یعنی ممتزج‌جانبی (O) بین M و M'
← انبساط معکوس



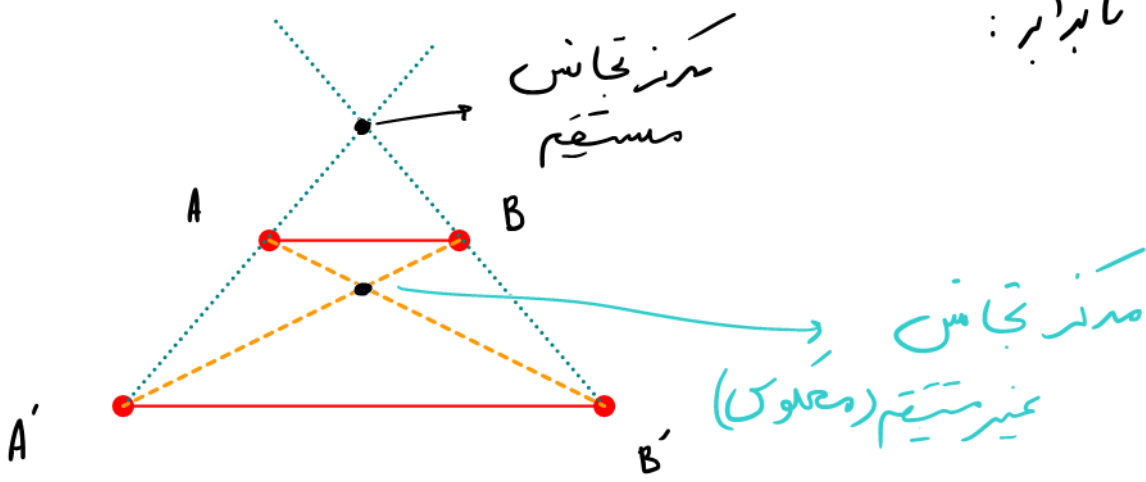
$$OM' = |k| \times OM = \frac{1}{4} \times 12 = 3$$

$$OM' = ? , OM = 12 , k = -\frac{1}{4} \quad (4)$$

← - : نشانه‌دهی این است که O بین M و M'
← انقباض معکوس

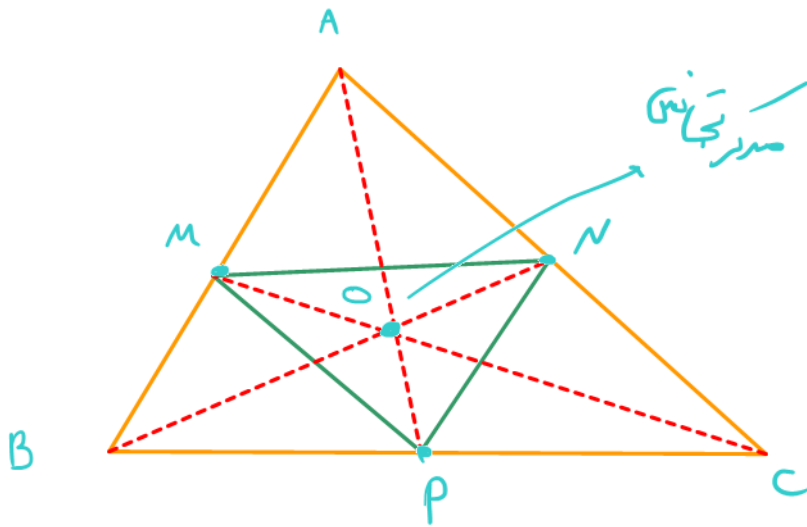


دو خط موازی نابرابر:



پ) اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، مثلثی ایجاد می‌شود که با مثلث اصلی متجانس است. مرکز ثقل چیست؟

- ۱) نقطه هم‌رسی سه ارتفاع مثلث
- ۲) نقطه هم‌رسی سه میانه مثلث
- ۳) نقطه هم‌رسی سه نیمساز مثلث
- ۴) نقطه هم‌رسی سه عمود منصف مثلث اصلی



تکلیف: ص ۵۴ و ۵۷ / ک

ص ۴۱

کتاب کار:

کتاب درسی:

ص ۳۲ تا ص ۴۹

کتاب عالی درسی

در کتاب - مری

سوال ۲: به ازای ضرایب مقدار متغیر t ، تجانس ثابت $t^2 + 4t + 8$ ، قوی است؟
 ۲/۲ ۱/۱ ۳/۳ ۴/۴

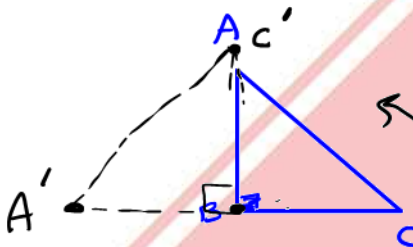
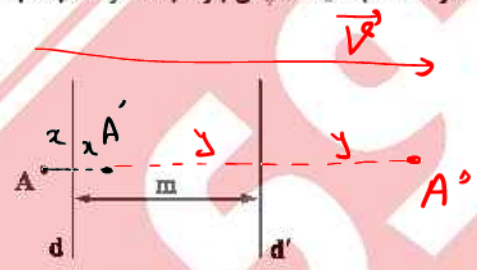
$$|k|=1 \rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-1 \end{cases}$$

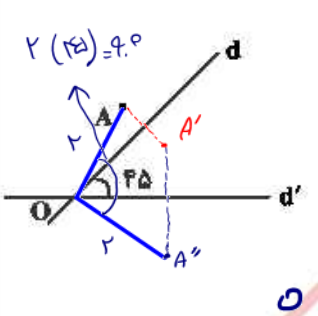
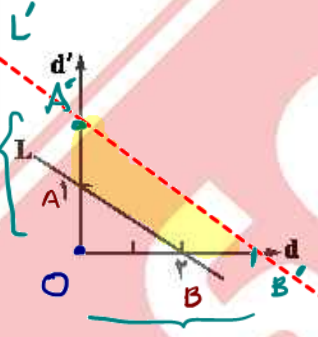
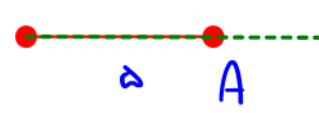
$$t^2 + 4t + 8 = 1 \rightarrow t^2 + 4t + 7 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 28 = -12 < 0$$

۲ جواب ندارد

$$t^2 + 4t + 8 = -1 \rightarrow t^2 + 4t + 9 = 0 \rightarrow (t+2)^2 = -5 \rightarrow t = -2 \pm i\sqrt{5}$$

نام و نام خانوادگی:		برنام خداوند جان و خرد	نام آزمون: همگام ۳
نام طرح: گروه مولفان علوی		مؤسسه علمی آموزشی علوی	زمان: ۷۵ دقیقه
درس / پایه: هندسه / یازدهم (ریاضی)		علوی	تاریخ برگزاری آزمون: ۱۴۰۳/۱۱/۰۷
ردیف	سوالات هندسه پایه یازدهم	بارم	
۱	جملهای خالی را پر کنید. الف) بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند، مگر آن‌که خط و محور بازتاب باشد یا موازی ب) تبدیل است که نقطه ثابت ندارد و تبدیل است که بی‌نهایت نقطه ثابت دارد. استقال با مرکز می‌مندی بازتاب پ) دوران به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α، تبدیلی است که در آن اگر A' تصویر A باشد، داریم $\angle AOA' = \alpha$ و $\angle OA'A = \alpha$	۱/۵ نمره	
۲	ثابت کنید در بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند. (اثبات در حالتی که پاره خط با محور بازتاب موازی باشد). (صبرده) اثبات سده	۲ نمره	
۳	نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد، تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه A' به اندازه ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطه A'' به دست آید. طول پاره خط AA'' را به دست آورید. صبرده	۲ نمره	
۴	در سوالات زیر گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) کدامیک از موارد زیر، تبدیل است؟ (۱) تصویر قائم هر نقطه از صفحه روی خط d ☒ X (۲) تصویر قائم هر نقطه روی محیط نیم‌دایره بر روی قطرش ☒ X (۳) تصویر قائم هر نقطه از محیط دایره بر روی قطرش ☒ X (۴) تصویر قائم هر نقطه از فضا روی صفحه p ☒ X	۱ نمره	  

نام و نام خانوادگی:		برنام خداوند جان و خرد	نام آزمون: همگام ۳
درس / پایه: هندسه / یازدهم (ریاضی)		علوی	زمان: ۷۵ دقیقه
نام طراح: گروه مولفان علوی		مؤسسه علمی آموزشی علوی	تاریخ برگزاری آزمون: ۱۴۰۳/۱۱/۰۷
ردیف	سوالات هندسه پایه یازدهم	بارم	
	(ب) کدام گزاره درست است؟ (۱) انتقال جهت را حفظ نمی‌کند. ☒ (۳) دوران بی‌شمار نقطه ثابت دارد. ☒ (پ) اگر وسط‌های اضلاع مثلثی را به هم وصل کنیم، مثلثی ایجاد می‌شود که با مثلث اصلی متجانس است. مرکز تجانس چیست؟ (۱) نقطه هم‌رسی سه ارتفاع مثلث ☐ (۳) نقطه هم‌رسی سه نیمساز مثلث ☐ (ت) کدام تبدیل زیر، طولیای نیست؟ (۱) بازتاب ☐ (۲) انتقال ☐ (۳) تجانس ☒ (۴) دوران ☐ (۲) بازتاب شیب را حفظ می‌کند. ☒ (۴) انتقال شیب را حفظ می‌کند. ☒ (۲) نقطه هم‌رسی سه میانه مثلث ☒ (۴) نقطه هم‌رسی سه عمودمتصف مثلث اصلی ☐	۱	
۵	مثلث قائم‌الزاویه دلخواهی رسم کنید مرکز دوران را راس قائم در نظر بگیرید و با زاویه ۹۰ درجه برخلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران آن را رسم کنید. 	انمره ۱	
۶	در شکل زیر $d' \parallel d$ است اگر ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d پیدا کرده A' بنامید، سپس بازتاب A' را نسبت به خط d' پیدا کرده A'' بنامید.  الف) ثابت کنید تبدیلی که A را به A'' تصویر می‌کند، انتقال است. ب) اندازه بردار انتقال را بیابید. $V = x + x + y + y = 2(x + y) = 2m$ حیره	۲ انمره	
۷	ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. (در حالتی که مرکز تجانس خارج خط و $k \neq 0$ باشد). حیره	۱/۵ انمره	

نام و نام خانوادگی:	برنام خداوند جان و خرد	نام و نام خانوادگی:
نام آزمودن: همگام ۳	علوی	درس / پایه: هندسه / یازدهم (ریاضی)
زمان: ۷۵ دقیقه	مؤسسه علمی آموزشی علوی	نام طراح: گروه مولفان علوی
بارم	سوالات هندسه پایه یازدهم	ردیف
۱/۲۵ نمره	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) دوران با زاویه 180° در جه یک تبدیل همانی است. ب) در انتقال، پاره خط‌هایی که نقطه را به تصویرش وصل می‌کند با هم برابرند. پ) در دوران شیب خط حفظ می‌شود. ت) دوران جهت شکل را حفظ نمی‌کند. ث) تجانس با ضریب تجانس متفی، انبساط نامیده می‌شود. درست ☐ نادرست ☒ درست ☒ نادرست ☐ درست ☐ نادرست ☒ درست ☐ نادرست ☒ درست ☐ نادرست ☒ درست ☐ نادرست ☒	۸
۱/۵ نمره	در شکل مقابل $OA = 2$ است. نقطه A را نسبت به خط d بازتاب دهیم و سپس تصویر حاصل را نسبت به خط d' بازتاب می‌دهیم. فاصله نقطه A از تصویر نهایی آن را به دست آورید. هرگاه در خط محور بازتاب متناهی باشند زاویه بین آنها θ باشد، ترکیب همان دوران است به رایی در $\alpha = 2\theta$ $AA'' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 	۹
۱/۵ نمره	در شکل زیر، اگر تجانس خط L را نسبت به مرکز مبداء مختصات و ضریب تجانس $\frac{7}{4}$، خط L' بنامیم. مساحت شکل محصور بین خطوط L و L' و d و d' را بیابید. (نهایی) نسبت $\rightarrow L > مستقیم$ $OA' = k \times OA = \frac{7}{4} \times 1 = \frac{7}{4}$ $OB' = k \times OB = \frac{7}{4} \times 2 = \frac{14}{4}$ $S_{\text{زرد}} = S_{OA'B'} - S_{OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{14}{4} - \frac{1 \times 2}{2} = \frac{49}{14} - 1 = \frac{25}{14}$ 	۱۰
۰/۷۵ نمره	نقطه A به فاصله ۵ از نقطه O قرار دارد. اگر A' متجانس نقطه A نسبت به مرکز O و ضریب تجانس ۲ باشد. فاصله AA' را به دست آورید. $k = 2 \rightarrow$ است A' ترا در مستقیم $OA' = k \times OA$ $OA' = 2 \times 5 = 10$ $AA' = 10 - 5 = 5$ 	۱۱
موفق باشید.		