پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ روش اول:

$$۲x - ۳ = t \Rightarrow ۲x = t + ۳ \Rightarrow x = \frac{t+۳}{۲}$$

$$= t^۲ + ۹ + ۶t - ۷t - ۲۱ + ۱۳ = t^۲ - t + ۱ \Rightarrow f(x) = x^۲ - x + ۱ \Rightarrow f(t) = ۴(\frac{t+۳}{۲})^۲ - ۱۴(\frac{t+۳}{۲}) + ۱۳ = (t+۳)^۲ - ۷(t+۳) + ۱۳$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مانند $x = ۲$ را انتخاب می‌کنیم.

$$f(۲x-۳) = ۴x^۲ - ۱۴x + ۱۳ \xrightarrow{x=۲} f(۱) = ۱۶ - ۲۸ + ۱۳ \to f(۱) = ۱$$

تنها گزینهٔ چهارم است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم T حاصل برابر یک می‌شود.

۲ - گزینه ۴ روش اول:

ابتدا دامنهٔ تعریف دو تابع f , g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f : ۳ - x \geq ۰ \to x \leq ۳$$

$$D_g : x^۲ + ۲x = x(x+۲) > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -۲ \text{ یا } x > ۰$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x < -۲ \text{یا} x > ۰ \mid \log_{۲}^{x^۲+۲x} \leq ۳\}$$

$$= \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid x^۲ + ۲x \leq ۲^۳\} = \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid x^۲ + ۲x - ۸ \leq ۰\}$$

$$= \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid (x+۴)(x-۲) \leq ۰\} = \{x < -۲ \quad \text{یا} \quad x > ۰ \mid -۴ \leq x \leq ۲\}$$

$$= -۴ \leq x < -۲ \quad \text{یا} \quad ۰ < x \leq ۲ \Rightarrow D_{fog} = [-۴, -۲) \cup (۰, ۲]$$

البته می‌توانیم $fog(x)$ را تشکیل داده (تابع را ساده نکنید) سپس دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

روش دوم:

$x = -۱$: در دامنهٔ تعریف g قرار ندارد. بنابراین در دامنهٔ تعریف fog هم نباید باشد، یعنی هر گزینه‌ای که $x = -۱$ دارد نادرست است. پس فقط گزینهٔ چهارم درست است.

۳ - گزینه ۲

می‌دانیم: $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -۱ & x \notin \mathbb{Z} \\ ۰ & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) : \begin{cases} x \notin \mathbb{Z} : & g(-۱) = ۱ - ۱ - ۲ = -۲ \\ x \in \mathbb{Z} : & g(۰) = -۲ \end{cases}$$

پس به ازای هر عدد حقیقی برقرار است.

۴ - گزینه ۲ نکته: اگر خط $y = x$ محور تقارن یک تابع باشد، آنگاه آن تابع با وارون خودش برابر است.

نکته: شرط این که تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با تابع وارون خودش یکی باشد آن است که $a + d = ۰$، پس در این سؤال داریم:

$$a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

$$\Rightarrow f(x) = f^{-۱}(x) = \frac{-۳x+۲}{x+۳} \Rightarrow f^{-۱}(-۲) = \frac{۶+۲}{-۲+۳} = ۸$$

۵ - گزینه ۴

$$f = \{(۱,۲), (-۳,-۱), (۳,۴), (۴,-۳)\} \longrightarrow f(۳) = ۴$$
$$f^{-۱} = \{(۲,۱), (-۱,-۳), (۴,۳), (-۳,۴)\} \longrightarrow f^{-۱}(-۳) = ۴$$

پس: $۲f^{-۱}(-۳) + f(۳) = ۸ + ۴ = ۱۲$

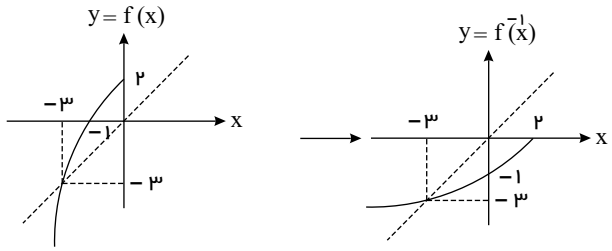
۶ - گزینه ۳

$$g = \{(-۲,۰), (۰,۳), (۱,-۱), (۳,-۲)\} \to g^{-۱} = \{(۰,-۲), (۳,۰), (-۱,۱), (-۲,۳)\}$$

پس : $(fog^{-۱})(-۲) = f(g^{-۱}(-۲)) = f(۳) = ۹ - \sqrt{۹} = ۹ - ۳ = ۶$

۷ - گزینه ۳

می‌دانیم تابع $f^{-1}(x)$ همان تابع $f(x)$ است که نسبت خط $y=x$ قرینه شده است.



اما زیررادیکال باید مثبت باشد. یک تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-۳	-۲	۲	$+\infty$
$x+۲$		$-$	$-$	$+$	
$x-f^{-1}(x)$		$-$	$+$	$+$	
$\frac{x+۲}{x-f^{-1}(x)}$		$+$ ن	ت $-$	$+$	

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۳)\cup[-۲,۲]$$

۸ - گزینه ۴ تابع را به‌صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$x\le -۲ : f(x)=-۳x-۶+۳x-۳-۴x=-۴x-۹$$
$$-۲<x<۱ : f(x)=۳x+۶+۳x-۳-۴x=۲x+۳$$
$$x\ge ۱ : f(x)=۳x+۶-۳x+۳-۴x=-۴x+۹$$

تابع مفروض $-۲<x<۱$ و $f(x)=۲x+۳$ صعودی است.

$$y=۲x+۳\Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}$$
$$-۲<x<۱\Rightarrow -۱<۲x+۳<۵\Rightarrow D_{f^{-۱}}=(-۱,۵)$$

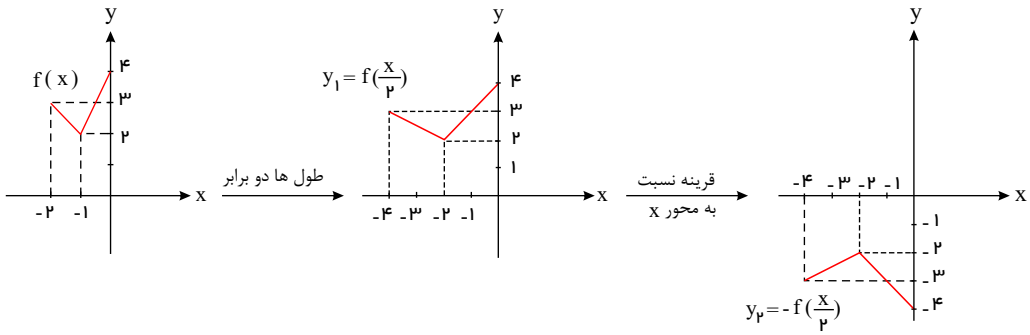
۹ - گزینه ۲ برای قرینه کردن نمودار نسبت به محور yها باید x را به $-x$ تبدیل کنیم.

برای منبسط کردن افقی با ضریب ۳ باید x را به $\frac{۱}{۳}x$ تبدیل کنیم.

برای انتقال ۲ واحد به چپ باید x را به $x+۲$ تبدیل کنیم.

$$y=f(x)\xrightarrow{x\to -x} f(-x)\xrightarrow{x\to \frac{۱}{۳}x} f(-\frac{۱}{۳}x)\xrightarrow{x\to x+۲} f(-\frac{۱}{۳}(x+۲))=f(-\frac{۱}{۳}x-\frac{۲}{۳})$$

۱۰ - گزینه ۲ نمودار $h(x)=f(x-۱)-۲$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



۱۱ - گزینه ۲ دترمینان ماتریس $۲A$ را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|۲A|=\begin{vmatrix}|A| & -۲\\ ۲ & |A|\end{vmatrix}$$
$$۲^{۲}|A|=|A|^{۲}+۴\to |A|^{۲}-۴|A|+۴=۰\to (|A|-۲)^{۲}=۰\Rightarrow |A|=۲$$

۱۲ - گزینه ۴ می‌دانیم اگر دو سطر (یا دو ستون) مضربی از هم (یا مانند هم) باشند حاصل دترمینان صفر است. بنابراین اگر $x-۱=۱$ (یا $x-۲=۲$) باشند ستون اول (یا ستون دوم) با ستون سوم مانند یکدیگر می‌شوند. پس:

$$\begin{matrix}x-۱=۱\to x=۲\\ x-۲=۲\to x=۴\end{matrix}\to \text{حاصل‌ضرب جواب‌ها}=۸$$

۱۳ - گزینه ۲

$A^{-۱}$ را از سمت چپ در رابطهٔ ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX = A - ۲I \xrightarrow{A^{-۱}\times} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}X = A^{-۱}(A - ۲I) \Rightarrow X = A^{-۱}A - ۲A^{-۱}I$$

$$\Rightarrow X = I - ۲A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲ \times \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱۴ - گزینه ۲

$$y = \frac{۴x+۱}{x-۲} \in Z \Rightarrow \text{باید} \quad : x-۲ | ۴x+۱ \xrightarrow{x-۲|x-۲} x-۲ | ۴x+۱-۴(x-۲)$$

$$\Rightarrow x-۲ | ۹ \Rightarrow x-۲ \in \{-۹,-۳,-۱,۱,۳,۹\} \xrightarrow{+۲} x \in \{-۷,-۱,۱,۳,۵,۱۱\}$$

چون قرار است نقطهٔ مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x < ۰$ و $y > ۰$ باشد.

$$x = -۱ \to y = \frac{۴x+۱}{x-۲} = ۱ \to$$ **در ربع دوم است.**

$$x = -۷ \to y = \frac{۴x+۱}{x-۲} = \frac{-۲۷}{-۹} = ۳ \to$$ **در ربع دوم است.**

۱۵ - گزینه ۴ معادله ضمنی دایره به‌صورت روبه‌رو می‌باشد:

$$x^۲ + y^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۲\sqrt{۲}y - ۱ = ۰$$

با استفاده از معادله ضمنی، شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲\sqrt{۲})^۲ + (۲\sqrt{۲})^۲ - ۴(-۱)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۸+۸+۴}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰} = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}$$

مساحت دایره برابر است با:

$$S = \pi R^۲ = \pi(\sqrt{۵})^۲ = ۵\pi$$

۱۶ - گزینه ۴

$$xy + ۳y = ۲x - ۵ \Rightarrow y(x+۳) = ۲x - ۵ \Rightarrow y = \frac{۲x-۵}{x+۳}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} +۳ \mid ۲x-۵ \\ x+۳ \mid ۲(x+۳) \end{matrix} \Big\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x+۳ \mid ۱۱ \xrightarrow{x \in N} x+۳ = ۱۱ \Rightarrow x = ۸$$

۱۷ - گزینه ۳ ابتدا دترمینان A را یافته و از روی آن دترمینان $A^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -\tan x \\ \tan x & ۱ \end{bmatrix} \to |A| = ۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{\frac{۱}{\cos^۲ x}} = \cos^۲ x$$

۱۸ - گزینه ۲

$$d | n^۲ + n \xrightarrow{\times ۲} d | ۲n^۲ + ۲n \xrightarrow{(-)} d | ۳n$$

$$d | ۲n + ۵ \xrightarrow{\times n} d | ۲n^۲ + ۵n$$

$$d | ۲n + ۵ \xrightarrow{\times ۳} d | ۶n + ۱۵ \xrightarrow{(-)} d | ۱۵ \xrightarrow{d \text{ اول است}} d = ۳ \text{یا} ۵$$

$$d | ۳n \xrightarrow{\times ۲} d | ۶n$$

مجموع مقادیر $d = ۳ + ۵ = ۸$

۱۹ - گزینه ۲ طبق فرض $p + ۲۷ = a^۳$ بنابراین داریم:

$$p = a^۳ - ۲۷ = (a-۳)(a^۲ + ۳a + ۹)$$

پس $a^۲ + ۳a + ۹ \mid p$, $a - ۳ \mid p$ چون a عددی طبیعی است پس $a^۲ + ۳a + ۹ > ۱$ و چون p عددی اول است، بنابراین $a^۲ + ۳a + ۹ = p$ و $a - ۳ = ۱$ از اینجا $a = ۴$ به‌دست می‌آید. درنتیجه $p = ۳۷$.

۲۰ - گزینه ۳

$$(۳a+۵, a^۲ - ۳a) = d \to \left\{ \begin{matrix} d | ۳a+۵ \xrightarrow{\times a} d | ۳a^۲ + ۵a \\ d | a^۲ - ۳a \xrightarrow{\times ۳} d | ۳a^۲ - ۹a \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(-)}$$

$$d | ۱۴a \to \left\{ \begin{matrix} d | ۱۴a \xrightarrow{\times ۳} d | ۴۲a \\ d | ۳a+۵ \xrightarrow{\times ۱۴} d | ۴۲a + ۷۰ \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(-)} \to d | ۷۰ \to d | ۲ \times ۵ \times ۷$$

در بین مقسوم‌علیه‌های طبیعی d، عدد ۷ بزرگ‌ترین مقدار اول می‌باشد.

۲۱ - گزینه ۳

معادلهٔ مستقل از شتاب : $\Delta x = \frac{v + v_{\circ}}{۲}\Delta t \Rightarrow \circ - ۱۲ = \frac{\circ + v_{\circ}}{۲} \times ۴ \Rightarrow v_{\circ} = -۶m/s$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = ۴$ است، سرعت در $t = ۸s$، هم‌اندازهٔ سرعت در لحظهٔ صفر است، پس: $v = +۶m/s$

۲۲ - گزینه ۲ روش اول: سرعت اولیهٔ متحرک را $v_{\circ}$ در نظر می‌گیریم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{\circ}t \Rightarrow \Delta x_{۱} = \frac{۱}{۲}(۲)(۲)^{۲} + v_{\circ} \times ۲ = ۴ + ۲v_{\circ}$$

سرعت متحرک بعد از دو ثانیه

$$v = at + v_{\circ} \Rightarrow v = ۲ \times ۲ + v_{\circ} = ۴ + v_{\circ}$$

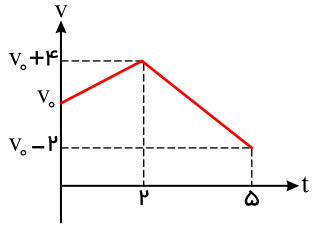
$$\Delta x_{۲} = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{\circ}t = \frac{۱}{۲} \times (-۲)(۳)^{۲} + (۴ + v_{\circ}) \times ۳ \Rightarrow \Delta x_{۲} = -۹ + ۱۲ + ۳v_{\circ} = ۳ + ۳v_{\circ}$$

$$\Delta x_{۱} + \Delta x_{۲} = ۴ + ۲v_{\circ} + ۳ + ۳v_{\circ} = ۷ + ۵v_{\circ}$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{۷ + ۵v_{\circ}}{۵} \Rightarrow ۵v_{\circ} + ۷ = ۳۲ \Rightarrow ۵v_{\circ} = ۲۵ \Rightarrow v_{\circ} = ۵m/s$$

روش دوم: رسم نمودار $v - t$ از روی نمودار $a - t$:

سطح زیر نمودار $v - t$ معرف جابه‌جایی می‌باشد:



$$V_{av} = \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow ۶/۴ = \frac{\frac{(v_{\circ} + v_{\circ} + ۴) \times ۲}{۲} + \frac{(v_{\circ} + ۴ + v_{\circ} - ۲) \times ۳}{۲}}{۵}$$

$$\Rightarrow v_{\circ} = ۵m/s$$

۲۳ - گزینه ۳ با توجه به نمودار، شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ در لحظهٔ $t = \circ$ برابر صفر است، پس $v_{\circ} = \circ$ است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{\circ}t + x_{\circ} \Rightarrow ۱\circ = \frac{۱}{۲}a(۶)^{۲} + \circ - ۸ \Rightarrow a = ۱$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{\circ}t + x_{\circ} \Rightarrow \circ = \frac{۱}{۲} \times t^{۲} - ۸ \Rightarrow t^{۲} = ۱۶ \Rightarrow t = ۴$$ لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند.

$$v = at + v_{\circ} \Rightarrow v = ۱ \times ۴ + \circ = ۴\frac{m}{s}$$

۲۴ - گزینه ۲ با توجه به معادلهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را به‌دست می‌آوریم:

$$x_{\circ} = \circ \Rightarrow \Delta x = x$$

$$x = \frac{v^{۲}}{۸} - ۲ \Rightarrow \begin{cases} v^{۲} = ۸x + ۱۶ \\ v^{۲} = ۲a\Delta x + v_{\circ}^{۲} \end{cases} \Rightarrow ۲a\Delta x = ۸x \Rightarrow ۲ax = ۸x \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^{۲}}$$

$$v_{\circ}^{۲} = ۱۶ \Rightarrow v_{\circ} = \pm ۴\frac{m}{s} \xrightarrow{\text{حرکت در جهت محور } x \text{ ها}} v_{\circ} = +۴\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_{\circ} \Rightarrow v_{(t=۲s)} = ۴ \times ۲ + ۴ = ۱۲\frac{m}{s}$$

۲۵ - گزینه ۱ جهت مثبت را برای هر متحرک به‌طور جداگانه همان جهت حرکت خودش فرض می‌کنیم.

$$\Delta x_{۱} = \frac{۱}{۲}a_{۱}t^{۲} + v_{\circ ۱}t = \frac{۱}{۲} \times ۲t^{۲} + ۱\circ t = t^{۲} + ۱\circ t$$

$$\Delta x_{۲} = \frac{۱}{۲}a_{۲}t^{۲} + v_{\circ ۲}t = \frac{۱}{۲} \times ۴t^{۲} + ۲\circ t = ۲t^{۲} + ۲\circ t$$

$$|\Delta x_{۱}| + |\Delta x_{۲}| = ۱۱۲۵ \Rightarrow ۳t^{۲} + ۳\circ t = ۱۱۲۵$$

$$\Rightarrow t^{۲} + ۱\circ t - ۳۷۵ = \circ \Rightarrow t = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۳۷۵}}{۱}$$

$$\Rightarrow t_{۱} = ۱۵s\ ,\ t_{۲} = -۲۵s \Rightarrow t = ۱۵s$$

۲۶ - گزینه ۱ معادلهٔ مکان - زمان درجهٔ ۲ برحسب زمان است. بنابراین حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است. (مشابه کتاب درسی از مشتق کمک نمی‌گیریم.)

$$\begin{cases} x = ۲t^{۲} + ۴t - ۸ \\ x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{\circ}t + x_{\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{۲} = ۲ \rightarrow a = +۴ \\ v_{\circ} = +۴ \end{cases} \rightarrow v = at + v_{\circ} = ۴t + ۴$$

مشخص است که $v \neq \circ$ یعنی متحرک بر خط راست، بدون تغییر جهت است.

بنابراین: $\frac{L}{|\Delta x|} = ۱$

۲۷ - گزینه ۳ روش‌های متفاوتی وجود دارد. می‌توان از رسم نمودار $(v - t)$ و یافتن مساحت سطح زیر نمودار $(v - t)$ استفاده نمود.

یک روش، مشخص نمودن سرعت در ابتدا و انتهای بازه‌های زمانی داده‌شده و یافتن جابه‌جایی‌های انجام شده در بازه است:

$$(\text{در بازهٔ زمانی صفر تا } ۱۰s) \Rightarrow \begin{cases} v_{(۱۰)} = at + v_۰ = (-۲)(۱۰) + ۳۰ = ۱۰\,m/s \\ v_{(۰)} = ۳۰\,m/s \end{cases}$$

$$(\text{در بازهٔ زمانی } ۱۰s \text{ تا } ۱۵s) \Rightarrow \Delta x_۱ = v\Delta t = v_{(۱۰)}\Delta t = ۱۰ \times ۵ = ۵۰m$$

$$(\text{در بازهٔ زمانی } ۱۵s \text{ تا } ۳۰s) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_۲ = (\frac{۱۰ + ۴۰}{۲})(۱۵) = ۲۵ \times ۱۵ = ۳۷۵ \\ v_{(۱۵)} = v_{(۱۰)} = ۱۰\,m/s \\ v_{(۳۰)} = v_{(۱۵)} + ۲ \times ۱۵ = ۱۰ + ۳۰ = ۴۰\,m/s \end{cases}$$

$$\text{کل } \Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۵۰ + ۳۷۵ = ۴۲۵ \rightarrow v_{av} = \frac{۴۲۵}{۲۰} = ۲۱/۲۵$$

۲۸ - گزینه ۴

با نوشتن معادلهٔ جابه‌جایی برای ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ اول، می‌توان نسبت آنها را پیدا کرد.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲$$

$$\begin{cases} t = ۱s \Rightarrow \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a \times ۱^۲ = \frac{۱}{۲}a \ (\text{ثانیهٔ اول}) \\ t = ۲s \Rightarrow \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ = ۲a \ (\text{دو ثانیهٔ اول}) \end{cases}$$

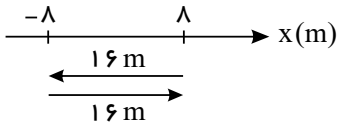
$$\Rightarrow \frac{\text{جابه‌جایی دو ثانیهٔ اول}}{\text{جابه‌جایی ثانیهٔ دوم}} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۲ - \Delta x_۱} = \frac{۲a}{۱/۵a} = \frac{۴}{۳}$$

۲۹ - گزینه ۳ شتاب حرکت ثابت است.

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = ۴t^۲ - ۱۶t + ۸ \Rightarrow \begin{cases} a = ۸\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۱۶\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$v = at + v_۰ = ۸t - ۱۶ \xrightarrow{v=۰} t = ۲s$$

متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ تغییر جهت می‌دهد.



$$\begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۸m \\ t_۲ = ۲s \Rightarrow x_۲ = -۸m \\ t_۳ = ۴s \Rightarrow x_۳ = ۸m \end{cases}$$

$$\text{کل مسافت طی‌شده} = ۱۶m + ۱۶m = ۳۲m$$

۳۰ - گزینه ۴ روش اول: ابتدا شتاب حرکت را با بررسی جابه‌جایی بین $t = ۰$ و $t = ۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times a \times ۲^۲ \Rightarrow a = ۴\,\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۴t + ۰ \xrightarrow{t=۲} v = ۸\,\frac{m}{s}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \times \Delta t \Rightarrow ۸ = \frac{۰ + v_۲}{۲} \times ۲ \Rightarrow v_۲ = ۸\,\frac{m}{s}$$

۳۱ - گزینه ۲ روش اول: از لحظهٔ $t = ۶$ تا لحظهٔ $t = ۰$ برمی‌گردیم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \xrightarrow[\Delta x = ۱۸m]{v_۰ = ۰, t = ۶s} ۱۸ = \frac{۱}{۲}a(۶)^۲ \rightarrow a = ۱\,\frac{m}{s^۲}$$

روش دوم:

نمودار مکان - زمان یک سهمی است بنابراین حرکت بر روی محور x، با شتاب ثابت است؛ در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۶s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \rightarrow ۰ - ۱۸ = (\frac{۰ + v_۰}{۲})(۶) = ۳v_۰ \rightarrow v_۰ = -۶m/s$$

$$v = at + v_۰ \rightarrow ۰ = a \times ۶ + (-۶) \rightarrow a = ۱m/s^۲$$

روش سوم:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ v = at + v_۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{صفر تا } ۶s]{\text{در بازهٔ زمانی}} \begin{cases} ۰ = \frac{۱}{۲}a \times ۶^۲ + v_۰ \times ۶ + ۱۸ \rightarrow a = ۱m/s^۲ \\ ۰ = a \times ۶ + v_۰ \rightarrow v_۰ = -۶a \end{cases}$$

۳۲ - گزینه ۳ یونش را برای ترکیب‌های مولکولی در نظر می‌گیریم، چون طبق تعریف به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود؛ یونش می‌گویند. پس استفاده از لفظ یونش برای ترکیب‌های یونی مانند منیزیم هیدروکسید نادرست است و باید از عبارت «تفکیک یونی» استفاده کرد.

۳۳ - گزینه ۱ عبارت (ت) جمله را به درستی تکمیل نمی‌کند.

بررسی موارد:

مورد (ب): طبق نظریهٔ آرنیوس هیدروژن کلرید ($HCl(g)$) یک اسید است، زیرا پس از حل‌شدن در آب محلول هیدروکلریک اسید ($HCl(aq)$) را پدید می‌آورد و یون‌های هیدروژن (H^+) و کلرید (Cl^-) تولید می‌کند.

$$HCl(g) \xrightarrow{\text{آب}} H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

مورد (پ): معادلهٔ بازی بودن سدیم هیدروکسید ($NaOH(s)$) به‌صورت زیر است و این یک باز آرنیوس است، زیرا پس از حل‌شدن در آب تولید یون هیدروکسید می‌نماید.

$$NaOH(s) \xrightarrow{\text{آب}} Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

مورد (ت): معادلهٔ اسیدی بودن $N_2O_5(s)$ به‌صورت زیر است:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

۳۴ - گزینه ۲ رسانایی الکتریکی محلول‌ها به فراوانی یون‌ها در محلول بستگی دارد. بنابراین محلول اسیدی که یونش آن کم‌تر است، یون‌های کم‌تری وارد محلول می‌کند و رسانایی الکتریکی کم تری خواهد داشت. در بین ۴ اسید داده شده، سولفوریک‌اسید و نیتریک‌اسید اسیدهای قوی هستند. اما از آنجایی که H_2SO_4 یک اسید چند پروتون‌دار است، غلظت یون‌های حاصل از تفکیک آن در محیط آبی بیشتر از HNO_3 است که یک اسید تک پروتون‌دار است.

HCN و HNO_2 جزو اسیدهای ضعیف هستند اما ثابت یونش اسید HNO_2 بیشتر از HCN است. بنابراین ترتیب میزان رسانایی الکتریکی محلول این چهار اسید در گزینه ۲ به درستی نشان داده شده است.

۳۵ - گزینه ۲

$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$			
غلظت اولیه	M	۰	۰
تغییر غلظت	$-x$	$+x$	$+x$
غلظت نهایی	$M-x$	x	x

طبق جدول تغییر غلظت و نمودار داده شده در صورت سؤال داریم:

$$[HCOO^-] = x = ۰/۰۱ mol \cdot L^{-1}$$
$$[HCOOH] = M - x = ۰/۲۴ mol \cdot L^{-1} \Rightarrow M = ۰/۲۵ mol \cdot L^{-1}$$
$$\alpha = \frac{x}{M} = \frac{۰/۰۱}{۰/۲۵} = ۰/۰۴ \Rightarrow \%\alpha = \%۴$$

حجم محلول برابر است با:

$$?mL\text{محلول} = ۲/۳ g HCOOH \times \frac{۱ mol HCOOH}{۴۶ g HCOOH} \times \frac{۱ L\text{محلول}}{۰/۲۵ mol HCOOH} \times \frac{۱۰۰۰ mL\text{محلول}}{۱ L\text{محلول}} = ۲۰۰ mL\text{محلول}$$

۳۶ - گزینه ۲ الف) تنها در صورتی درست است که محلول، یک محلول اسیدی مانند HF باشد. (غلط)

ب) درست است.

ج) این نسبت برابر درجهٔ یونش است. (غلط)

د) درست است.

۳۷ - گزینه ۴

$$\text{درصد یونش} = \frac{\text{غلظت مولکول‌های یونیده شده}}{\text{غلظت کل مولکول‌های حل شده}} \times ۱۰۰ \Rightarrow \%\alpha = \frac{۱/۵ \times ۱۰^{-۳}}{۰/۱} = ۱/۵\%$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱) اسیدها را بر مبنای میزان تفکیک و یونشی که در آب دارند، به دو دستهٔ ضعیف و قوی تقسیم می‌کنند.

گزینهٔ ۲) ۴۸ یون ناشی از یونش ۲۴ مولکول HF است.

$$\%\alpha = \frac{۲۴}{۱۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۲/۴\%$$

گزینهٔ ۳) به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند.

۳۸ - گزینه ۴ CH_3OH و C_2H_5OH به‌ترتیب متانول و اتانول هستند و جزو الکل‌ها محسوب می‌شوند. الکل‌ها در آب به‌صورت مولکولی حل‌شده و یونش نمی‌یابند و محلول آبی آن‌ها خاصیت اسیدی یا بازی ندارد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: اسیدهای آرنیوس: HCN, N_2O_5، بازهای آرنیوس: $NH_4OH, NaHCO_3$

گزینهٔ «۲»: اسیدهای آرنیوس: HNO_3, H_2SO_4، باز آرنیوس: Na_2O

گزینهٔ «۳»: اسیدهای آرنیوس: CO_2, CH_3COOH، بازهای آرنیوس: $Ba(OH)_2, CaO$

گزینهٔ «۴»: اسیدهای آرنیوس: SO_3 و NO_2، باز آرنیوس: $Ba(OH)_2$

۳۹ - گزینه ۲ رسانایی الکتریکی محلول به غلظت یون‌های موجود در محلول بستگی دارد، لذا امکان دارد محلول الکترولیت قوی بسیار رقیق باشد و غلظت یون‌های آن نیز کمتر از غلظت یون‌های محلول غلیظ الکترولیت ضعیف باشد. همچنین خاصیت اسیدی به غلظت یون هیدرونیوم موجود در محلول بستگی دارد و آن هم به قدرت اسیدی (K_a) و غلظت اسید بستگی دارد، در نتیجه ممکن است غلظت یک اسید قوی خیلی کمتر از اسید ضعیف باشد و در نتیجه غلظت یون هیدرونیوم کمتری داشته باشد.

۴۰ - گزینه ۲ نادرست. آرنیوس طی پژوهش‌هایی که روی رسانایی الکتریکی ترکیب‌های محلول در آب (نه ترکیب‌های یونی) انجام داد به نظریه‌ای برای اسیدها و بازها دست یافت.

- درست.
- نادرست. محلول آبی HCl هیدروکلریک اسید نام دارد نه $HCl(g)$.
- درست. N_2O_5 (اکسید نافلزی) و K_2O (اکسید فلزی) به ترتیب اسید و باز آرنیوس هستند. با حل شدن در آب (واکنش با آب) به ترتیب یون‌های $H^+(aq)$ و $OH^-(aq)$ پدید می‌آورند.

۴۱ - گزینه ۲ در محلول‌های بازی غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است.

بررسی موارد:

«الف»: اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس هستند. این مواد در آب به‌صورت شیمیایی حل می‌شوند و فراوردهٔ واکنش به‌صورت یونی در آب حل می‌شود و غلظت یون H^+ را زیاد می‌کند.

$$SO_3(g) + H_2O(l) \rightarrow H_2SO_4(aq) \rightarrow H^+(aq) + HSO_4^-(aq)$$

«ب»:

$$NaOH(aq) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

غلظت یون OH^- را زیاد کرده پس باز آرنیوس است.

«پ»: اغلب اکسیدهای فلزی گروه ۱ و ۲، باز آرنیوس هستند. این مواد در آب به‌صورت شیمیایی حل می‌شوند و غلظت یون OH^- را زیاد می‌کنند.

$$K_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2KOH(aq) \rightarrow 2K^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

«ت»: اکسیدهای نافلزی، اسید آرنیوس هستند. این اکسیدها در آب به‌صورت شیمیایی حل می‌شوند و غلظت یون H^+ را زیاد می‌کنند.

$$N_2O_3(g) + H_2O(l) \rightarrow 2HNO_2(aq) \rightleftarrows 2H^+(aq) + 2NO_2^-(aq)$$