پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$y = a + b\cos(\frac{\pi}{۲} - x) = a + b\sin x$$

نقطه $(۰ , -\frac{۵\pi}{۶})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left|\begin{matrix}\frac{-۵\pi}{۶} \\ ۰\end{matrix}\right. \rightarrow ۰ = a + b\sin(\frac{-۵\pi}{۶}) \rightarrow ۰ = a - b\sin(\frac{۵\pi}{۶})$$

$$\rightarrow ۰ = a - b\sin(\pi - \frac{\pi}{۶}) \rightarrow ۰ = a - b\sin(\frac{\pi}{۶}) \rightarrow a - \frac{b}{۲} = ۰ \quad (I)$$

در تابع $y = a\sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطهٔ $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده‌شده فرمت سینوس را دارد $ab > ۰$ است و چون $y(۰) > ۰$ است پس $a > ۰$ است و در نتیجه $b > ۰$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow ۳ = |b| + a \rightarrow ۳ = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = ۱$ و $b = ۲$ حاصل می‌شوند.

پس: $f(x) = ۱ + ۲\sin x \rightarrow f(\frac{\pi}{۶}) = ۱ + ۲(\frac{۱}{۲}) = ۲$

۲ ـ گزینه ۴

$$y_۱ = -۲\sin((a^۲ + ۲)x) + ۳ : T_۱ = \frac{۲\pi}{|a^۲ + ۲|}$$
$$y_۲ = -۳\cos ۳ax - ۲ : T_۲ = \frac{۲\pi}{|۳a|}$$

$$\xrightarrow{T_۱ = T_۲} |a^۲ + ۲| = |۳a| \Rightarrow \begin{cases} a^۲ + ۲ = ۳a \Rightarrow a^۲ - ۳a + ۲ = ۰ \\ a^۲ + ۲ = -۳a \Rightarrow a^۲ + ۳a + ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - ۱)(a - ۲) = ۰ \\ (a + ۱)(a + ۲) = ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = -۱, ۱, -۲, ۲$$

۳ ـ گزینه ۴ در تابع $y = a\sin bx + c$، بیشترین مقدار تابع از رابطهٔ $|a| + c$ بدست می‌آید.

$$|a| + c = ۱ \rightarrow |a| - ۱ = ۱ \rightarrow |a| = ۲ \rightarrow a = \pm ۲$$

شکل داده شده فرمت خود سینوس را دارد بنابراین a و b هم‌علامتند ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که b و a هر دو مثبت هستند.

$$f(x) = ۲\sin(b\pi x) - ۱ \xrightarrow[\text{صدق}]{\left|\begin{matrix}\frac{۵}{۳} \\ ۰\end{matrix}\right.} ۰ = ۲\sin\frac{۵b\pi}{۳} - ۱ \rightarrow \sin\frac{۵b\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

مقدار سینوس برابر $\frac{۱}{۲}$ شده است برای xهای مثبت این اتفاق اولین بار در $\frac{\pi}{۶}$ و بار دوم در $\frac{۵\pi}{۶}$ اتفاق می‌افتد و با توجه به شکل تابع، باید $\frac{۵b\pi}{۳}$ برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ باشد.

$$\frac{۵b\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۶} \rightarrow \frac{b}{۳} = \frac{۱}{۶} \rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

به طریق مشابه برای حالتی که a و b هر دو منفی هستند، $b = -\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۴ ـ گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع $\tan x$، باید $\tan a = ۱$ و a در ربع اول باشد بنابراین $a = \frac{\pi}{۴}$ است و $\tan b = \sqrt{۳}$ و b در $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ است، پس $b = \frac{۴\pi}{۳}$. بنابراین

$$b - a = \frac{۴\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۳\pi}{۱۲}.$$

۵ ـ گزینه ۳

می‌دانیم $\sin a\cos a = \frac{۱}{۲}\sin ۲a$ و $\cos^۲ a - \sin^۲ a = \cos ۲a$ است و دورهٔ تناوب تابع $f(x) = a\sin bx + c$ به‌صورت $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است.

$$f(x) = \sin x\cos x(\sin^۲ x - \cos^۲ x) = -\sin x\cos x(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = -\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x$$

$$f(x) = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\sin ۲(۲x) = -\frac{۱}{۴}\sin ۴x \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

۶ ـ گزینه ۱ در تابع $y = a\sin bx + c$ داریم:

دورهٔ تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ ، $Max=|a|+c$ ، $Min=-|a|+c$

$y=۳\sin cx-۲ \Rightarrow$ دورهٔ تناوب $T=\frac{۲\pi}{|c|}=\pi \Rightarrow |c|=۲ \Rightarrow c=\pm ۲$

$$y=\pi\sin(-x)+c \Rightarrow \begin{cases} Max=\pi+c \\ Min=-\pi+c \end{cases} \Rightarrow Max+Min=۲c \Rightarrow \begin{cases} c=۲ \Rightarrow Max+Min=۴ \\ c=-۲ \Rightarrow Max+Min=-۴ \end{cases}$$

۷ - گزینه ۱ با توجه به نمودار و اینکه $۰<c<\pi, b>۰$ مشخص است که a مثبت است.

$$\max=|a|=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{a>۰} a=\frac{۱}{۴} \rightarrow f(x)=\frac{۱}{۴}\cos(bx+c)$$

نقطهٔ $A(\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴})$ در تابع صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{۴}\cos(\frac{۳}{۴}b+c)=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos(\frac{۳b}{۴}+c)=-۱ \Rightarrow \frac{۳b}{۴}+c=\pi$$

همچنین در $x=\frac{۵}{۴}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f(\frac{۵}{۴})=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰ \Rightarrow \cos(\frac{۵}{۴}b+c)=۰$$

با توجه به نمودار در $x=\frac{۵}{۴}$ دومین بار است که نمودار تابع محور xها را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲} \\ \frac{۳}{۴}b+c=\pi \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \frac{۵}{۴}b-\frac{۳}{۴}b=\frac{۳\pi}{۲}-\pi \Rightarrow \frac{۲}{۴}b=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b=\pi$$

$$\frac{۵}{۴}b+c=\frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{b=\pi} c=\frac{۳\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}$$

$$\frac{a\cdot c}{b}=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{\pi}{۴}}{\pi}=\frac{۱}{۱۶}$$

۸ - گزینه ۱ بیشترین مقدار تابع برابر ۱ است. پس:

$$|a|-۲=۱ \Rightarrow |a|=۳ \xrightarrow{a>۰} a=۳ \Rightarrow f(x)=۳\sin(\frac{b\pi x}{۲})-۲$$

پس کمترین مقدار تابع برابر $۵-=۲-۳-$ است. در نتیجه $f(۱)=-۵$.

$$۳\sin(\frac{b\pi}{۲})-۲=-۵ \Rightarrow \sin(\frac{b\pi}{۲})=-۱$$

$$\frac{b\pi}{۲}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b=۴k-۱$$

با توجه به اینکه اولین بار در سمت راست محور عرض‌ها، تابع در $x=۱$ مینیمم شده است، پس b باید کمترین مقدار ممکن مثبت را داشته باشد. یعنی $b=۳$.

در نتیجه $a+b=۶$.

۹ - گزینه ۳

می‌دانیم: $\sin x\cdot\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ ، $y=\sin bx \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}$

$$y=۱+a\cdot\sin bx\cdot\cos bx=۱+\frac{a}{۲}\cdot\sin ۲bx$$

چون فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر با دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T=\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۴})=\pi$$

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۱ \Rightarrow b=\pm ۱$$

$$y=۱+\frac{a}{۲}\cdot\sin ۲bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} ۱+|\frac{a}{۲}|=\frac{۳}{۲} \Rightarrow |a|=۱ \Rightarrow a=\pm ۱$$

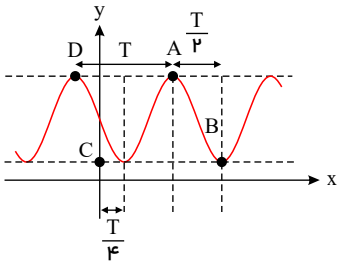
تابع دراطراف $x=۰$ صعودی است، پس a و b هم‌علامتند و داریم:

$$a+b=۲ \text{ یا } a+b=-۲$$

۱۰ - گزینه ۴ برای تابع f داریم:

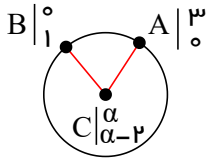
$$T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴\quad,\quad\begin{cases}\max(f)=|-۳|+۴=۷\\ \min(f)=-|-۳|+۴=۱\end{cases}$$

از طرفی چهارضلعی $ABCD$ ذوزنقه است.



$$\Rightarrow\begin{cases}AD=T=۴\\ BC=T+\frac{۱}{۴}T=۵\\ \text{ارتفاع}=\max(f)-\min(f)=۶\end{cases}\qquad\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۶(۴+۵)}{۲}=۲۷$$

۱۱ - گزینه ۳



قطر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس مختصات مرکز به‌صورت $C\begin{vmatrix}\alpha\\ \alpha-۲\end{vmatrix}$ می‌باشد. (زیرا معادله قطر دایره به‌صورت $y=x-۲$ می‌باشد.)

$$R=AC=\sqrt{(۳-\alpha)^۲+(-\alpha+۲)^۲}\quad,\quad R=BC=\sqrt{\alpha^۲+(\alpha-۳)^۲}$$
$$\Rightarrow\sqrt{(۳-\alpha)^۲+(-\alpha+۲)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+(-\alpha+۳)^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{توان}۲}۹-۶\alpha+\alpha^۲+\alpha^۲-۴\alpha+۴=\alpha^۲+\alpha^۲-۶\alpha+۹\Rightarrow-۴\alpha=-۴\Rightarrow\alpha=۱$$
بنابراین : $R=AC\overset{\alpha=۱}{=\!=}\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۱+۲)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$

۱۲ - گزینه ۱ ضرب ماتریس‌ها را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}x & ۲x & -۱\end{bmatrix}_{۱\times۳}\times\begin{bmatrix}۳ & -۱ & ۱\\ ۴ & ۰ & -۲\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}_{۳\times۳}\times\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱۱x-۱ & -x-۲ & -۳x\end{bmatrix}_{۱\times۳}\times\begin{bmatrix}x\\ ۲x\\ -۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}=۰$$

$$\Rightarrow[۱۱x^۲-x-۲x^۲-۴x+۳x]=۰\Rightarrow۹x^۲-۲x=۰\Rightarrow x(۹x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=\frac{۲}{۹}\end{cases}$$

۱۳ - گزینه ۱ نکته: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ از دستور $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. پس:

$$AX=B\xrightarrow{A^{-۱}\times}\underbrace{A^{-۱}A}_{I}X=A^{-۱}B\xrightarrow{IX=X}X=A^{-۱}B$$
$$\Rightarrow X=\frac{۱}{-۴+۳}\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=-۱\times\begin{bmatrix}-۲ & -۱۳\\ ۱ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۲ & ۱۳\\ -۱ & -۸\end{bmatrix}$$

۱۴ - گزینه ۲

تذکر : تقسیم در هم نهشتی

$$\begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bc\\ (c\ ,\ m)=d\end{cases}\overset{\div c}{\Rightarrow}a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$$

$$۳۶a\overset{۸۴}{\equiv}۱۹۲\overset{\div۱۲}{\rightarrow}۳a\overset{۷}{\equiv}۱۶\overset{۷}{\equiv}۲$$
$$۳a\overset{۷}{\equiv}۲\overset{۷}{\equiv}۹\overset{\div۳}{\rightarrow}a\overset{۷}{\equiv}۳$$
$$a\overset{۷}{\equiv}۳\overset{\times۲}{\rightarrow}۲a\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}-۱$$

۱۵ - گزینه ۱ روش اول:

نکته: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$، آنگاه $a\overset{[m,n]}{\equiv\!=}b$

$$\left.\begin{aligned}a=۶q+۵\Rightarrow a\overset{۶}{\equiv}۵\overset{۶}{\equiv}۲۹\\ a=۱۱q'+۷\Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}۷\overset{۱۱}{\equiv}۲۹\end{aligned}\right\}\longrightarrow a\overset{[۶,۱۱]=۶۶}{\equiv\!=}۲۹$$

روش دوم:

آزمون حسابی ۲۶ آبان

$$\left.\begin{array}{l} a=۶q+۵ \xrightarrow{\times ۱۱} ۱۱a=۶۶q+۵۵ \\ a=۱۱q'+۷ \xrightarrow{\times ۶} ۶a=۶۶q'+۴۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{-} ۵a=۶۶\underbrace{(q-q')}_{q''}+۱۳ \Rightarrow ۵a=۶۶q''+۱۳$$

داشتیم $۶a=۶۶q'+۴۲$ پس:

$$\begin{cases} ۵a=۶۶q''+۱۳ \\ ۶a=۶۶q'+۴۲ \end{cases} \xrightarrow{-} a=۶۶\underbrace{(q'-q'')}_{k}+۲۹ \Rightarrow a=۶۶k+۲۹$$

روش سوم:

گزینه‌ای درست است که باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ عدد ۵ و باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۱ عدد ۷ باشد.

۱۶ - گزینه ۴ می دانیم در قضیه تقسیم $a=bq+r$ و $۰ \le r \le b$ است. بنابراین $r=q^۲-۲$ بوده و داریم:

$$a=۳۷q+q^۲-۲$$
$$۰ \le r \le b \Rightarrow q^۲-۲<۳۷ \Rightarrow q^۲<۳۹$$
$$\xrightarrow[q\in Z]{} \max(q)=۶ \Rightarrow \max(a)=۳۷\times ۶+۶^۲-۲=۲۲۲+۳۴=۲۵۶=۱۶^۲$$

۱۷ - گزینه ۲

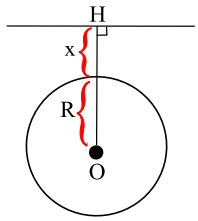
$$x^۲+y^۲+۲y-۴x=۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}=O(۲,-۱) \\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۰}=\sqrt{۵} \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲-۲y-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}=O'(۰,۱) \\ R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰+۴-۴(-۲)}=\sqrt{۳} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{خط المرکزین}=d=OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۸}$$

از آنجایی که $R-R'<d<R+R'$ پس دو دایره متقاطع‌اند.

۱۸ - گزینه ۲ ابتدا مرکز و شعاع دایره را یافته و سپس فاصلهٔ مرکز دایره از خط موردنظر را می‌یابیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹$$
$$\Rightarrow \begin{cases} O(۱,-۲) \\ R=۳ \end{cases} \Rightarrow OH=\left|\frac{۳(۱)+۴(-۲)-۱۵}{\sqrt{۹+۱۶}}\right|=۴$$
$$x=OH-R=۴-۳=۱$$



۱۹ - گزینه ۴ اگر x عددی صحیح باشد آنگاه تنها در صورتی y نیز عددی صحیح خواهد بود که صورت کسر بر مخرج کسر بخش‌پذیر باشد. بنابراین:

$$y=\frac{۳x-۱}{x+۲}$$
$$x+۲ | ۳x-۱ \quad , \quad x \in \mathbb{Z}$$
$$\begin{cases} x+۲|۳x-۱ \\ x+۲|x+۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+۲|۳x-۱ \\ x+۲|۳x+۶ \end{cases} \Rightarrow x+۲|۷$$
$$\Rightarrow x+۲=-۱ \text{ یا } ۱ \text{ یا } -۷ \text{ یا } ۷$$
$$\Rightarrow x=-۳ \text{ یا } ۱ \text{ یا } -۹ \text{ یا } ۵$$

a	-۳	-۱	-۹	۵
b	۱۰	-۴	۴	۲

۲۰ - گزینه ۴ با توجه به تعریف ب.م.م داریم:

$$\begin{cases} d|۳n^۲-۲n+۶ \\ d|۳n+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|۳n^۲-۲n+۶ \quad (۱) \\ d|(۳n+۵)n \Rightarrow d|۳n^۲+۵n \quad (۲) \end{cases}$$

رابطهٔ (۲) و (۱) را از هم کم می‌کنیم؛ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} d|۷n-۶ \\ d|۳n+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|-۳(۷n-۶) \\ d|۷(۳n+۵) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|-۲۱n+۱۸ \\ d|۲۱n+۳۵ \end{cases} \Rightarrow d|۵۳ \xrightarrow{d\neq ۱} d=۵۳$$

۲۱ - گزینه ۱

با توجه به روابط مثلثاتی در مثلث می‌توان طول مسیر حرکت روی سطح شیبدار را به دست آورد:

$$\sin ۳۷^\circ=\frac{۶}{d} \Rightarrow d=۱۰m$$

با توجه به عدم پایستگی انرژی داریم:

$E_۱ - E_۲ = |W_f| \Rightarrow (U_{g_۱} + K_۱^{\circ}) - (U_{g_۲}^{\circ} + K_۲) = |W_f|$

$\Rightarrow mgh_۱ - \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = |f \cdot d\cos\alpha| \Rightarrow ۲ \times ۱۰ \times ۶ - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times v_۲^۲ = |۴ \times ۱۰ \times \cos ۱۸۰|$

$۱۲۰ - v_۲^۲ = ۴۰ \Rightarrow v_۲^۲ = ۸۰ \Rightarrow v_۲ = ۴\sqrt{۵}\frac{m}{s}$

۲۲ - گزینه ۴ چون جسم به طرف پایین جابه‌جا شده کار نیروی وزن مثبت است و از رابطهٔ $W_{mg} = +mgh$ به دست می‌آید:

$W_{mg} = +mgh \xrightarrow{m=۲kg\ ,\ h=۵m} W_{mg} = ۲ \times ۱۰ \times ۵ = ۱۰۰J$

۲۳ - گزینه ۳ در آزمایش اول که نخ را به آرامی می‌کشیم، اثر نیروی وارده بر نخ فرصت انتقال پیدا می‌کند و از قسمت بالای وزنه پاره می‌شود چون نیروی کشش نخ در قسمت بالا بیشتر است.
درآزمایش دوم که نخ را به صورت ضربه ای و آنی می‌کشیم ، اثر نیرو فرصت انتقال پیدا نمی‌کند و از قسمت پایین پاره می‌شود.

۲۴ - گزینه ۲ ابتدا تندی را برحسب متر بر ثانیه نوشته، سپس با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی کار کل را محاسبه و پس از آن توان متوسط را به دست می‌آوریم:

$V = V_۲\frac{km}{h} = ۲۰\frac{m}{s}$

$W_t = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲) = \frac{۱}{۲} \times ۹۰۰(۲۰^۲ - ۰) = ۱۸۰۰۰۰W$

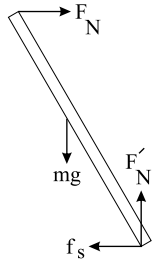
$P_{av} = \frac{W_t}{\Delta t} = \frac{۱۸۰۰۰۰}{۱۰} \rightarrow P_{av} = ۱۸۰۰۰W = ۱۸kW$

۲۵ - گزینه ۲ نیروهای وزن و عمودی تکیه‌گاه سطح افقی متوازن هستند. از طرفی نیروهای اصطکاک و عمودی تکیه‌گاه دیوار قائم نیز متوازن هستند.

تعادل افقی : $f_s = F_N = ۳۰۰N$

تعادل قائم : $F'_N = mg = ۴۰ \times ۱۰ = ۴۰۰N$

نیروی وارده از طرف سطح افقی به نردبان : $R = \sqrt{f_s^۲ + F_N'^۲} = ۵۰۰N$



۲۶ - گزینه ۳ طبق قانون سوم نیوتون، نیروی وارده از طرف جسم به کف آسانسور با نیروی وارده از طرف کف آسانسور به جسم، هم اندازه (شتاب و سرعت (جهت حرکت) هم‌سو هستند حرکت تندشونده است:

رو به بالا $N = m(g+a)$
رو به پایین $N' = m(g-a)$
$\Rightarrow N - N' = ۲ma = ۲ \times ۵ \times ۲ = ۲۰N$

۲۷ - گزینه ۱

$W = F_x \times \Delta x \Rightarrow W = ۳۰ \times ۶ = ۱۸۰J$

۲۸ - گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$، برای مقایسهٔ دو حالت داریم:

میزان افزایش انرژی جنبشی

$v_۱ = v\ ,\ v_۲ = v + ۵\ ,\ K_۲ = K_۱ + \boxed{\frac{۴۴}{۱۰۰}K_۱} = ۱/۴۴K_۱$

$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow \frac{K_۲}{K_۱} = (\frac{v_۲}{v_۱})^۲ \Rightarrow ۱/۴۴ = (\frac{v+۵}{v})^۲$

$\Rightarrow ۱/۲ = \frac{v+۵}{v} \Rightarrow ۱/۲v = v + ۵ \Rightarrow ۰/۲v = ۵ \Rightarrow v = ۲۵\frac{m}{s}$

۲۹ - گزینه ۴ با توجه به این که اصطکاک وجود ندارد، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند:

$E_A = E_B \Rightarrow mgh_A + ۰ = mgh_B + \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \Rightarrow ۳۰۰ = ۱۲۰ + \frac{۱}{۲}v_B^۲ \Rightarrow v_B^۲ = ۳۶۰$

$E_C = E_A \Rightarrow mgh_C + \frac{۱}{۲}mv_C^۲ = mgh_A + ۰ \Rightarrow ۲۴۰ + \frac{۱}{۲}v_C^۲ = ۳۰۰ \Rightarrow v_C^۲ = ۱۲۰$

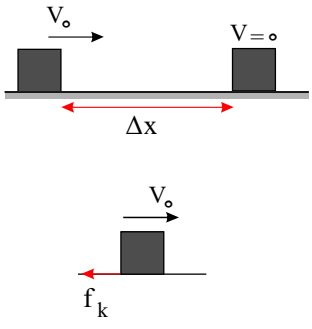
$\Rightarrow \frac{v_B}{v_C} = \sqrt{\frac{۳۶۰}{۱۲۰}} = \sqrt{۳}$

۳۰ - گزینه ۴ با توجه به اینکه پس از پرتاب تنها نیروی مؤثر بر جسم‌ها در راستای افقی، نیروی اصطکاک است، پس حرکت جسم‌ها کند شونده بوده و پس از طی مسافت Δx متوقف می‌شوند.

$F_{net} = ma \rightarrow -f_k = ma \rightarrow -\mu_k mg = ma \rightarrow a = -\mu_k g$

$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x_{\text{توقف}} \xrightarrow{v=۰} \Delta x_{\text{توقف}} = \frac{-v_۰^۲}{۲a} = \frac{v_۰^۲}{۲\mu_k g}$

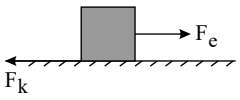
$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{v_{۰A}^۲}{v_{۰B}^۲} \times \frac{\mu_{k_B}}{\mu_{k_A}} \xrightarrow[\mu_{kA}=۲\mu_{kB}]{v_{۰A}=v_{۰B}} \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{۱}{۲}$



آزمون حسابی ۲۶ آبان

توجه داشته باشید که جرم وزنه‌ها در مسافت توقف آنها تأثیری ندارد.

۳۱ - گزینه ۱



چون سرعت ثابت است، نیروهای وارد بر جسم متوازن‌اند، یعنی نیروی محرک F و نیروی مقاوم اصطحکاک جنبشی هم اندازه‌اند.

$$\vec{v} = \text{ثابت} \rightarrow \vec{a} = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_{net} = m\vec{a} = \vec{0}$$

$$F_e - f_k = 0 \rightarrow F_e = f_k$$

$$f_k = k\Delta x = \mu_k \times mg$$

$$\mu_k \times 50 = 200 \times \frac{5}{100} \Rightarrow 50\mu_k = 10 \Rightarrow \mu_k = 0/2$$

۳۲ - گزینه ۲

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی } ad \text{ درصد جرمی } 10}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{10 \times 49 \times 1/25}{98} = 6/25\, mol \cdot L^{-1}$$

۳۳ - گزینه ۱

$$MnO_2 + 4HCl \rightarrow MnCl_2 + Cl_2 + 2H_2O$$

$$\text{حجم محلول} = 6/72 LCl_2 \times \frac{1 molCl_2}{22/4 LCl_2} \times \frac{4 molHCl}{1 molCl_2} \times \frac{36/5 gHCl}{1 molHCl} \times \frac{100 g \text{ محلول}}{14/6 gHCl} \times \frac{1 mL \text{ محلول}}{1 g \text{ محلول}} = 300 mL \text{ محلول}$$

۳۴ - گزینه ۴

$$ppm = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 50 = \frac{4 \times 10^{-3} g}{x\ g} \times 10^6 \Rightarrow \text{جرم محلول} = 80\ g$$

$$NaOH + NaHSO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + H_2O$$

$$?molNaHSO_4 = 4 \times 10^{-3} gNaOH \times \frac{1 molNaOH}{40 gNaOH} \times \frac{1 molNaHSO_4}{1 molNaOH} = 10^{-4} molNaHSO_4$$

۳۵ - گزینه ۱ فرمول یون‌های نیترات، فسفات و سولفات به ترتیب NO_3^-، PO_4^{3-} و SO_4^{2-} است:

$$\left.\begin{array}{l} \text{جمع جبری بار یون‌ها} = -6 \\ \text{جمع تعداد اکسیژن‌ها} = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow 11 + (-6) = 5$$

۳۶ - گزینه ۱

برای به‌دست آوردن مقدار $[A^-]$ در محلول جدید، باید مقدار کل $[H^+]$ موجود در محلول جدید را در فرمول K_a اسید جای‌گذاری کنیم. ولی با توجه به اینکه مقدار $[H^+]$ حاصل از HCl بالاست ($pH = 1$ و محلول بسیار اسیدی است) و اسید حل‌شده ضعیف است (K_a کوچک دارد)، از H^+ حاصل از اسید ضعیف صرف‌نظر می‌کنیم و فقط H^+ حاصل از HCl را در فرمول K_a جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار تقریبی $[A^-]$ در محلول جدید به دست آید:

$$[HA] = \frac{1 mol\ HA}{\text{محلول } 1 L} = 1 mol \cdot L^{-1} \quad , \quad [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1} = 0/1$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow 2 \times 10^{-5} = \frac{0/1 \times [A^-]}{1} \Rightarrow [A^-] = 2 \times 10^{-4}$$

۳۷ - گزینه ۴

باتوجه به رابطهٔ $[H_3O^+][OH^-] = 10^{-14}$ داریم:

$$pH = 8/5 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-8/5} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-5/5}$$

$$pH = 7/4 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-7/4}$$

$$\text{نسبت خواسته‌شده} = \frac{10^{-5/5}}{10^{-7/4}} = 10^{1/9} = 10 \times (10^{0/3})^3 = 10 \times 2^3 = 80$$

۳۸ - گزینه ۳ با توجه به رابطه ثابت یونش می‌توان نوشت. (دقت کنید نمی‌توان از رابطه تقریبی استفاده کرد، زیرا مقدار K_s بزرگ است.)

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]}$$

اگر مقدار $[H^+]$ را برابر x در نظر بگیریم:

$$K_a = \frac{x^۲}{۰/۲ - x} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{x^۲}{۰/۲ - x} \rightarrow x^۲ = -۰/۱x + ۰/۰۲$$

$$x^۲ + ۰/۱x - ۰/۰۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۰/۱ \pm \sqrt{۰/۰۱ + ۰/۰۸}}{۲} = \frac{-۰/۱ \pm \sqrt{۰/۰۹}}{۲} = \frac{۰/۲}{۲} = ۰/۱$$

$$\Rightarrow [H^+] = x = ۰/۱ mol \cdot L^{-۱} \Rightarrow pH = -\log ۱۰^{-۱} \Rightarrow pH = ۱$$

۳۹ - گزینه ۱ واکنش موازنه شده به صورت زیر است:

$$۱Na_۲CO_۳ + ۲HA \rightarrow ۲NaA + ۱CO_۲ + ۱H_۲O$$

غلظت یون H^+ و اسید HA با هم برابر است. بنابراین:

$$[H_۳O^+] = ۱۰^{-pH} \xrightarrow{\text{اسید قوی}} [H_۳O^+] = [HA] \Rightarrow [HA] = ۱۰^{-۵} mol \cdot L^{-۱}$$

حال داریم:

$$۵L \text{ محلول} \times \frac{۱۰^{-۵}\ mol\ HA}{۱L \text{ محلول}} \times \frac{۱mol\ Na_۲CO_۳}{۲mol\ HA} \times \frac{۱۰۶\ g\ Na_۲CO_۳}{۱\ mil\ Na_۲CO_۳} \times \frac{۱۰۰۰mg}{۱g} = ۲/۶۵mg$$

۴۰ - گزینه ۲

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ \rightarrow ۱۵ = \frac{x}{۴۰} \times ۱۰۰ \rightarrow x = ۶g$$

۴۱ - گزینه ۱

$$\frac{\text{فعالیت } [H^+]}{\text{استراحت } [H^+]} = \frac{۱۰^{-۱/۴}}{۱۰^{-۳/۷}} = \frac{۱۰^{-۰/۴} \times ۱۰^{-۱}}{۱۰^{-۰/۷} \times ۱۰^{-۳}} = \frac{۰/۴ \times ۱۰^{-۱}}{۰/۲ \times ۱۰^{-۳}} = ۲۰۰$$

به دلیل قوی بودن اسید معده (HCl) غلظت اولیهٔ اسید با $[H^+]$ برابر است.