پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳ با توجه به نمودار تابع در همسایگی نقاط ۳^- و -۱^- و تشکیل $\frac{-x}{۳}$ و $-۲x$ و یافتن نقاط حدی جدید خواهیم داشت:

$$x \to ۳^- : x < ۳ \to \frac{x}{۳} < ۱ \to -\frac{x}{۳} > -۱$$

پس: $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(-\frac{x}{۳}) = \lim\limits_{x \to (-۱)^+} f(x) = -۱$

ازطرفی: $\lim\limits_{x \to (-۱)^-} [f(۲x)] = [f((-۲)^-)] = [۰^-] = -۱$

توجه کنید وقتی x از سمت مقادیر کوچک‌تر از -۲ به -۲ نزدیک می‌شود y از سمت مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود.

بنابراین: $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(-\frac{x}{۳}) + \lim\limits_{x \to (-۱)^-} [f(۲x)] = -۱ + (-۱) = -۲$

۲ - گزینه ۲ در $x \to ۲$ مقادیر تابع از پایین به ۴ نزدیک می‌شوند.

$$۲ \lim_{x \to ۲} [f(x)] - \left[\lim_{x \to ۲} f(x)\right] = ۲[۴^-] - [۴] = ۲ \times ۳ - ۴ = ۲$$

۳ - گزینه ۴ وقتی $x \to a$، می‌توان نتیجه گرفت که x در یک همسایگی از عدد a قرار می‌گیرد که حتماً غیرصحیح است پس: وقتی x به هر سه عدد نزدیک می‌شود مقدار حد -۲ می‌شود و $f(۲) = ۳$ خواهد بود.

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = -۲ + (-۲) + (-۲) + ۳ = -۳$$

۴ - گزینه ۳ توجه کنید $(a, b) \cup (b, c)$ یک همسایگی محذوف عدد b است.

با توجه به تساوی $(۳b - ۲a, ۷) \cup (c, ۲a + b) = (c, ۲a + b) \cup (۳b - ۲a, ۷)$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۴ \\ ۳b - ۲a = ۴ \end{cases} \Rightarrow ۴b = ۸ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۴ \xrightarrow{b=۲} a = ۱$$

بازهٔ (a, b) برابر با $(۱, ۲)$ است که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{۴}{۳}$ است.

۵ - گزینه ۳ هرگاه در مسائل حدی، کسینوس برابر یک شد حتما ۱^- است.

$$\lim_{x \to ۰} \left[\frac{۳}{\cos x}\right] = \left[\frac{۳}{۱^-}\right] = [۳^+] = ۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد راست} = \lim\limits_{\substack{x \to ۰^+ \\ \text{ناحیهٔ اول}}} [۳ \sin x] = [۳ \times ۰^+] = [۰^+] = ۰ \\ \text{حد چپ} = \lim\limits_{\substack{x \to ۰^- \\ \text{ناحیهٔ چهارم}}} [۳ \sin x] = [۳ \times ۰^-] = [۰^-] = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to ۰} [۳ \sin x] : \text{حد ندارد.}$$

۶ - گزینه ۴ عدد $x = ۱$ باید عضو بازهٔ $(a - ۲\ ,\ ۳a + ۲)$ باشد، پس داریم:

$$۱ \in (a - ۲, ۳a + ۲) \Rightarrow a - ۲ < ۱ < ۳a + ۲ \Rightarrow \begin{cases} a - ۲ < ۱ \Rightarrow a < ۳ \\ ۳a + ۲ > ۱ \Rightarrow a > -\frac{۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۱}{۳} < a < ۳$$

۷ - گزینه ۴ با توجه به نمودار تابع در حوالی نقاط ۴ و ۰ و -۲ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to ۴^+} [fof(x)] - \lim_{x \to ۰} [f(x)] + \left[\lim_{x \to (-۲)^+} f(x)\right] = \Big[f(f(۴^+))\Big] - \Big[۱^+\Big] + [۳]$$

$$\Big[f(۲^+)\Big] - ۱ + ۳ = \Big[(-۲)^-\Big] + ۲ = -۳ + ۲ = -۱$$

۸ - گزینه ۴ با استفاده از اتحاد مزدوج، صورت کسر و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\lim_{x \to -۱} \frac{\sqrt{۲x + ۳} - \sqrt{۳x + ۴}}{۱ + \sqrt[۳]{x}} \times \frac{\sqrt{۲x + ۳} + \sqrt{۳x + ۴}}{\sqrt{۲x + ۳} + \sqrt{۳x + ۴}} \times \frac{۱ - \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲}}{۱ - \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲}}$$

$$= \lim_{x \to -۱} \frac{(۲x + ۳ - ۳x - ۴)\overbrace{(۱ - \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{x^۲})}^{۳}}{(۱ + x)\underbrace{(\sqrt{۲x + ۳} - \sqrt{۳x + ۴})}_{۲}} = \lim_{x \to -۱} \frac{-(x + ۱) \times ۳}{(۱ + x) \times ۲} = -\frac{۳}{۲}$$

۹ - گزینه ۱ زمانی که $x \to ۲^+$ مقدار تابع دقیقاً برابر -۲ است و زمانی که $x \to ۱$ میل می‌کند حد تابع f برابر مقدار ۳ است (چون عبارت lim داخل براکت آمده است، پس مهم نیست $f(x)$ از بالا به ۳ نزدیک می‌شود یا از پایین. بلکه مقدار حد برابر ۳ است و براکت آن یعنی $[۳]$ برابر ۳ می‌شود.) پس داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} [f(x)] + \left[\lim_{x\to ۱} f(x)\right] + \lim_{x\to ۱} [f(x)] = [-۲] + [۳] + \left[۳^-\right] = -۲ + ۳ + ۲ = ۳$$

۱۰ - گزینه ۳ در تابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Z} \\ h(x) & x \not\in \mathbb{Z} \end{cases}$

اگر $x \to a$ برای محاسبهٔ حد از ضابطهٔ $h(x)$ استفاده می‌کنیم.

$(a \not\in \mathbb{Z}$ یا $a \in \mathbb{Z})$ (a یک عدد حقیقی)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$
$$\lim_{x\to \sqrt{۲}} f(x) = \lim_{x\to \sqrt{۲}} x^۲ = (\sqrt{۲})^۲ = ۲$$
$$\lim_{x\to ۱} f(۲x-۴) = \lim_{x\to -۲} f(x) = \lim_{x\to -۲} x^۲ = (-۲)^۲ = ۴$$
$$x \to ۱ \Rightarrow (۲x-۴) \to ۲ \times (۱) - ۴ = -۲$$
$$\lim_{x\to \sqrt{۲}} f(x) + \lim_{x\to ۱} f(۲x-۴) = ۲ + ۴ = ۶$$

۱۱ - گزینه ۲ ماتریس $A^۲$ را یافته و در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

روش اول:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲\alpha+\beta & \alpha \\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \beta = ۱۳ \end{cases}$$

روش دوم: (نکته) هر ماتریس ۲×۲ مانند A در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - (a+d)A + |A| I = \overline{O}$$
$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ - ۲A - ۱۳I = \overline{O} \Rightarrow A^۲ = ۲A + ۱۳I \Rightarrow \alpha = ۲, \beta = ۱۳$$

۱۲ - گزینه ۲

$A^{-۱}$ را از سمت چپ در رابطهٔ ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX = A - ۲I \xrightarrow{A^{-۱}\times} \underbrace{A^{-۱}A}_{I} X = A^{-۱}(A - ۲I) \Rightarrow X = A^{-۱}A - ۲A^{-۱}I$$
$$\Rightarrow X = I - ۲A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲ \times \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱۳ - گزینه ۱

دو خط موازی هستند؛ پس مرکز دایره روی خط بین آنها یعنی $y = x + ۲$ قرار دارد و فاصله بین دو خط برابر قطر می‌باشد.

$$O \in y = x + ۲ \xrightarrow{x=-۱} y = ۱ \Rightarrow O|_{۱}^{-۱}$$
$$۲R = \frac{۴}{\sqrt{۲}} \Rightarrow R = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$
$$C : (x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$$

۱۴ - گزینه ۴

$$a = bq + r \Rightarrow a = b \times ۲۵ + ۱۷ \quad ۰ \le r < b \Rightarrow ۱۷ < b \quad (۱)$$

از طرفی a مضرب ۶ است، پس:

$$a \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۵b + ۱۷ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow b - ۱ \overset{۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow b \overset{۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow b = ۶k + ۱$$
$$(۱) : ۱۷ < b \xrightarrow{b=۶k+۱} \begin{cases} k_{min} = ۳ \\ b_{min} = ۱۹ \end{cases}$$
$$a = ۲۵b + ۱۷ \xrightarrow{b=۱۹} a_{min} = ۲۵ \times ۱۹ + ۱۷ = ۴۹۲$$

۱۵ - گزینه ۴

قضیه فرما: اگر p اول باشد و $(a,p) = ۱$ آنگاه $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$

فرما: $۷^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان ۱۱}} ۷^{۱۹۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲} ۷^{۲۰۰} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow ۷^{۲۰۰} + a \overset{۱۹}{\equiv} ۱۱ + a \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \min(a) = ۸$

۱۶ - گزینه ۴

$$۲x^۲ - x - ۶ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow (x-۲)(۲x+۳) \overset{۵۳}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۲ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۵۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow x = ۵۳k + ۲ \Rightarrow x = ۹۵۶, ۹۰۳, \cdots \\ ۲x + ۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲x \overset{۵۳}{\equiv} -۳ \overset{۵۳}{\equiv} ۵۰ \xrightarrow[(۲,۵۳)=۱]{\div ۲} x \overset{۵۳}{\equiv} ۲۵ \Rightarrow x = ۵۳k + ۲۵ \Rightarrow x = ۹۷۹, ۹۲۶, \cdots \end{cases}$$

واضح است بزرگ‌ترین عدد سه رقمی در بین مقادیر فوق ۹۷۹ بوده و یکان آن ۹ می‌باشد.

۱۷ - گزینه ۳

x : تعداد خرید از کالای ۲۲۰ تومانی

y : تعداد خرید از کالای ۱۴۰ تومانی

$$۲۲۰x + ۱۴۰y = ۱۹۰۰۰ \xrightarrow{\div ۲۰} ۱۱x + ۷y = ۹۵۰ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow ۱۱x = -۷y + ۹۵۰ \Rightarrow ۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۹۵۰ \xrightarrow{۹۵۰ \overset{۷}{\equiv} ۵} ۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۵ \overset{۷}{\equiv} ۵ + ۴ \times ۷ \overset{۷}{\equiv} ۳۳$$

$$\xrightarrow[(۱۱,۷)=۱]{\div ۱۱} x \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۷k + ۳$$

حال در معادلهٔ (۱) مقدار $x = ۷k + ۳$ را صدق می‌دهیم:

$$۱۱(۷k+۳) + ۷y = ۹۵۰ \Rightarrow ۷y = -۱۱ \times ۷k + ۹۱۷ \xrightarrow{\div ۷} y = -۱۱k + ۱۳۱$$

حال باید تعداد جواب‌های حسابی را یافته و اشتراک بگیریم:

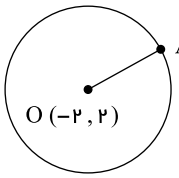
$$۰ \le x \Rightarrow ۰ \le ۷k + ۳ \Rightarrow -۳ \le ۷k \Rightarrow -\frac{۳}{۷} \le k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۰ \le k \quad (I)$$

$$۰ \le y \Rightarrow ۰ \le -۱۱k + ۱۳۱ \Rightarrow ۱۱k \le ۱۳۱ \Rightarrow k \le \frac{۱۳۱}{۱۱} = ۱۱/\cdots \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \le ۱۱ \quad (II)$$

$(I) \cap (II) : ۰ \le k \le ۱۱ \longrightarrow$ ۱۲ مقدار

چون برای k دوازده مقدار محاسبه شد پس مسئله ۱۲ جواب دارد.

۱۸ - گزینه ۱



$$(m-۲)x + (m+۱)y = ۶ \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{m=۲} ۳y = ۶ \rightarrow y = ۲ \\ \xrightarrow{m=-۱} -۳x = ۶ \rightarrow x = -۲ \end{cases} \xrightarrow[\text{مرکز دایره}]{\text{مختصات مرکز دایره}} O(-۲, ۲)$$

$$R = OA = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (-۱-(-۲))^۲} = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲\sqrt{۲\pi}$$

۱۹ - گزینه ۱ روش اول:

نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$، آنگاه $a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

$$\left.\begin{array}{l} a = ۶q + ۵ \Rightarrow a \overset{۶}{\equiv} ۵ \overset{۶}{\equiv} ۲۹ \\ a = ۱۱q' + ۷ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۲۹ \end{array}\right\} \longrightarrow a \overset{[۶,۱۱]=۶۶}{\equiv} ۲۹$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۶q + ۵ \xrightarrow{\times ۱۱} ۱۱a = ۶۶q + ۵۵ \\ a = ۱۱q' + ۷ \xrightarrow{\times ۶} ۶a = ۶۶q' + ۴۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{-} ۵a = ۶۶\underbrace{(q-q')}_{q''} + ۱۳ \Rightarrow ۵a = ۶۶q'' + ۱۳$$

داشتیم $۶a = ۶۶q' + ۴۲$ پس:

$$\begin{cases} ۵a = ۶۶q'' + ۱۳ \\ ۶a = ۶۶q' + ۴۲ \end{cases} \xrightarrow{-} a = ۶۶\underbrace{(q'-q'')}_{k} + ۲۹ \Rightarrow a = ۶۶k + ۲۹$$

روش سوم:

گزینه‌ای درست است که باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ عدد ۵ و باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۱ عدد ۷ باشد.

۲۰ - گزینه ۴ دترمینان موردنظر را توسط دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \\ \underbrace{-۲ \quad ۶}_{\text{دو ستون اول}} \end{matrix} = (۰ + ۱۰ + ۷۲) - (-۳ + ۶۰ + ۰) = ۲۵$$

۲۱ - گزینه ۴

در مرکز نوسان، سرعت بیشینه و در نقاط بازگشت، سرعت صفر است.

$$\begin{cases} x = ۰ \\ v = \pm v_{max} \end{cases} \Rightarrow v_{max}^۲ = ۰/۴ \rightarrow v_{max} = \sqrt{۰/۴}$$

$$\begin{cases} v = ۰ \\ x = \pm A \end{cases} \Rightarrow ۰ = ۰/۴ - ۴۰۰۰x^۲ \Rightarrow A = ۱۰^{-۲} m$$

$$v_{max} = A\omega \Rightarrow \sqrt{۰/۴} = ۱۰^{-۲}\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{۰/۴} \times ۱۰۰ \Rightarrow a_{max} = A\omega^۲ = ۱۰^{-۲} \times (۰/۴ \times ۱۰^۴) = ۴۰ \frac{m}{s^۲}$$

۲۲ - گزینه ۴

$$K = \frac{p^۲}{۲m} \rightarrow \frac{K_B}{K_A} = (\frac{p_B}{p_A})^۲ (\frac{m_A}{m_B}) \rightarrow ۵ = (۱)(\frac{m_A}{m_B}) \rightarrow \frac{m_A}{m_B} = ۵$$

۲۳ - گزینه ۱ می‌دانیم که نسبت نیروی مرکز گرای ماهواره به نیروی وزن آن در سطح زمین، همانند نسبت شتاب گرانش در محل حضور ماهواره به شتاب گرانش سطح زمین است. یعنی:

وزن ماهواره درسطح زمین $= \frac{۱}{۱۶}$ نیروی مرکزگرای ماهواره $=$ نیروی جاذبه‌ی گرانش نیوتون بین $Me\ ,m$

$$W' = \frac{۱}{۱۶} W \Rightarrow \frac{GmMe}{(\mathrm{Re}+h)^۲} = \frac{۱}{۱۶} \frac{GmM_e}{\mathrm{Re}^۲} \Rightarrow \frac{۱}{(\mathrm{Re}+h)^۲} = \frac{۱}{۱۶} \times \frac{۱}{(\mathrm{Re})^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\mathrm{Re}+h} = \frac{۱}{۴\,\mathrm{Re}} \Rightarrow h = ۳\,\mathrm{Re}$$

۲۴ - گزینه ۲

بررسی موارد:

شکل (آ) مشکلی ندارد و هر چرخهٔ آن در دورهای دیگر تکرار می‌شود. این شکل یک حرکت هماهنگ ساده را نشان می‌دهد که نمونهٔ مشهور نوسان دوره‌ای هستند.

شکل (ب) هم مشکلی ندارد. ممکن است در ذهن خود حرکت هماهنگ ساده را مد نظر داشته باشیم که مقادیر max در بالاترین و پایین‌ترین نقطه $+A$ و $-A$ باشد، اگر نوسان هماهنگ ساده نباشد، آیا خللی در مفهوم نوسان دوره‌ای پیش می‌آید؟ خیر.

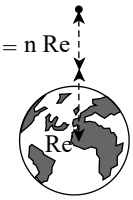
شکل (ت) هم مفهوم نوسان دوره‌ای را می‌رساند ... اما شکل پ) نوسان‌هایی را نمی‌بینیم که هر چرخهٔ آن در دورهای بعد تکرار شود ... شکل (پ) قابل قبول نیست.

۲۵ - گزینه ۱ شتاب گرانشی با مجذور فاصله از مرکز زمین رابطهٔ معکوس دارد $(g' \propto \frac{۱}{r^۲})$. در صورتی که شعاع کرهٔ زمین را برابر R_e فرض کنیم، فاصلهٔ نقطهٔ مورد نظر از مرکز زمین برابر است با:

$$r = R_e + h = R_e + nR_e = (n+۱)R_e$$

اگر شتاب گرانش در سطح زمین برابر g باشد. و برای محاسبه‌ی محلی که شتاب گرانش $\frac{۱}{۴}$ سطح زمین است داریم:

$$\frac{g'}{g} = \frac{\frac{GMe}{r^۲}}{\frac{GMe}{R_e^۲}} = (\frac{R_e}{r})^۲ = (\frac{R_e}{(n+۱)R_e})^۲ = \frac{۱}{۴}$$



جذر گرفتن از طرفین رابطه $\Rightarrow \frac{۱}{n+۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow n = ۱$

تذکر: به طور ذهنی نیز می‌توان گفت اگر فاصله از مرکز زمین از R_e به $۲R_e$ برسد، شتاب گرانش $\frac{۱}{۴}$ برابر می شود.

شتاب g، $r \Rightarrow$ دو برابر می شود $\Rightarrow$ برابر می شود $\frac{۱}{۴}$

$$g = \frac{GM_e}{r^۲} \Rightarrow \begin{cases} r = ۲R_e \\ r = h + R_e \end{cases} \Rightarrow h = R_e$$

۲۶ - گزینه ۲

بررسی موارد:

مورد (۱) نادرست است چون:

دورهٔ عقربهٔ ساعت‌شمار $T = ۱۲h = ۱۲ \times ۳۶۰۰s \rightarrow$ بسامد $f = \frac{۱}{۱۲ \times ۳۶۰۰s} \rightarrow f = ۰/۰۰۰۰۲۳۱۴۸Hz$

(۲) درست است: $T = ۲۴h$ دورهٔ گردش زمین (دوران زمین) دور محور خود

دورهٔ عقربهٔ دقیقه‌شمار $T = ۱h$ و عقربهٔ ساعت‌شمار $T' = ۱۲h$ پس $\frac{T}{T'} = \frac{۱}{۱۲}$؛ بنابراین گزارهٔ (۳) نادرست است.

گزارهٔ (۴) هم صحیح است، چون:

$$T=\frac{t}{n}\to f=\frac{n}{t}=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}\to f=۰/۲۵Hz$$

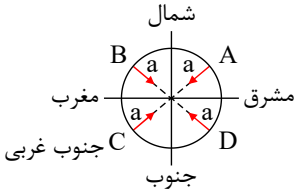
۲۷ - گزینه ۳

$$K=\frac{p^۲}{۲m}\xrightarrow{m\ \text{ثابت}}\frac{K'}{K}=(\frac{p'}{p})^۲=(\frac{۲۲}{۲۰})^۲\Rightarrow\frac{K'}{K}=\frac{۱۲۱}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{\Delta K}{K}=\frac{K'-K}{K}=\frac{۱۲۱-۱۰۰}{۱۰۰}=\%۲۱$$

یعنی انرژی جنبشی، ۲۱ درصد افزایش می‌یابد.

۲۸ - گزینه ۱

حرکت اتومبیل حرکت دایره‌ای یکنواخت است و در این حرکت در هر لحظه شتاب متحرک (شتاب مرکز گرا) در راستای شعاع دایره در همان لحظه و به سمت مرکز دایره است. و بردارهای شتاب اتومبیل در نقاط AوBوCوD در شکل نشان داده شده است.



۲۹ - گزینه ۲ نیروی کشش نخ نقش نیروی مرکزگرا را ایفا می‌کند، بنابراین داریم:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow T=\frac{۱}{۱}=۱(s)\Rightarrow T=\frac{۲\pi r}{v}=۱=\frac{۲\pi\times ۰/۲۵}{v}=v=۰/۵m/s$$

$$F_{net}=\frac{mv^۲}{r}\Rightarrow T_{\text{نخ}}=m\frac{v^۲}{r}=۰/۲\times\frac{(۰/۵)^۲}{۰/۲۵}=۲N$$

۳۰ - گزینه ۳ در اینجا شتاب مرکز گرا، با مربع تندی رابطهٔ مستقیم و با شعاع انحنای مسیر رابطهٔ عکس دارد.

$$a=\frac{v^۲}{r}\Rightarrow\frac{a_۲}{a_۱}=(\frac{v_۲}{v_۱})^۲\times(\frac{r_۱}{r_۲})=(\frac{۲v_۱}{v_۱})^۲\times(\frac{r_۱}{۲r_۱})\Rightarrow\frac{a_۲}{a_۱}=۲$$

۳۱ - گزینه ۱ تعداد اتم عنصرهای Au و N خودبه‌خود موازنه است. با اعمال ضریب ۲ برای $H_۲O$ اکسیژن موازنه می‌شود و برای موازنهٔ هیدروژن به H^+ ضریب ۴ می‌دهیم. سپس با بکارگیری ضریب ۴ برای Cl^- عنصر کلر نیز موازنه می‌شود. بار الکتریکی دو طرف معادله نیز خودبه‌خود برابر خواهد شد. معادلهٔ موازنه شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$Au+NO_۳^-+۴Cl^-+۴H^+\to AuCl_۴^-+NO+۲H_۲O$$

$$\frac{\text{ضریب }H_۲O}{\text{ضریب }Cl^-}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۳۲ - گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}\text{واکنش اول}\Rightarrow\text{قدرت کاهندگی (از دست دادن الکترون)}:Al>Cu\\ \text{واکنش دوم}\Rightarrow\text{قدرت کاهندگی (از دست دادن الکترون)}:Ba>Al\end{array}\right\}\Rightarrow\text{قدرت کاهندگی}:Ba>Al>Cu$$

۳۳ - گزینه ۴

$$E^\circ_{\text{سلول}}=E^\circ_{(\text{کاتد})}-E^\circ_{(\text{آند})}$$

$$Fe_{\text{آند}}\ ,\ Ni_{\text{کاتد}}\Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}}=-۰/۲۵+۰/۴۴=۰/۱۹V$$

$$Zn_{\text{آند}}\ ,\ Ni_{\text{کاتد}}\Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}}=-۰/۲۵+۰/۷۶=۰/۵۱V$$

$$۰/۵۱-۰/۱۹=۰/۳۲$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فلز روی با محلول نمک‌های آهن واکنش می‌دهد.

۲) قدرت کاهندگی : $Zn>Fe>Ni$

۳) قدرت اکسندگی : $Ni^{۲+}>Fe^{۲+}>Zn^{۲+}$

۳۴ - گزینه ۲ معادلهٔ واکنش گزینهٔ (۲) با انتقال الکترون از $Zn(s)$ به $Sn^{۲+}(aq)$ انجام می‌پذیرد.

$$\underset{\text{کاهنده}}{Zn(s)}+\underset{\text{اکسنده}}{Sn^{۲+}(aq)}\longrightarrow Zn^{۲+}(aq)+Sn(s)$$

$$E^\circ\text{(واکنش)}=E^\circ\text{(کاتد)}-E^\circ\text{(آند)}=(-۰/۱۵)-(-۰/۷۶)=+۰/۶۱V$$

۳۵ - گزینه ۲ اکسنده ماده‌ای است که با گرفتن الکترون از گونه‌های دیگر، آن‌ها را اکسید می‌کند و کاهنده ماده‌ای است که با از دست دادن الکترون به گونه‌های دیگر، آنها را کاهش می‌دهد.

۳۶ - گزینه ۱ در واکنش موردنظر، یون Cl^- تغییر عدد اکسایش ندارد و از ۲ یون Cu^+ در سمت چپ، یکی یک الکترون داده و دیگری یک الکترون گرفته است:

$$Cu^+\to Cu^{۲+}+e^-\quad(\text{اکسایش }Cu^+\text{ کاهنده است})Cu^+$$

$$Cu^++e^-\to Cu(s)\quad(\text{کاهش }Cu^+\text{ اکسنده است})Cu^+$$

۳۷ - گزینه ۱

$$\overset{-۱}{NaH}(s)+\overset{+۱}{H_۲}O(l)\to Na\overset{+۱}{O}H(aq)+\overset{۰}{H_۲}(g)$$

در این واکنش، عنصر هیدروژن هم اکسایش و هم کاهش یافته است.

۳۸ - گزینه ۳ شدت خوردگی فلزها در محیط‌های اسیدی $(pH < ۷)$ بیشتر است. از طرف دیگر، به‌دلیل ترتیب پتانسیل کاهشی $Fe > Zn$، می‌توان نتیجه گرفت که ترتیب مقدار خوردگی فلزها در سه ظرف به‌صورت $C > B > A$ می‌باشد.

۳۹ - گزینه ۲ معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش موازنه:

$$۲Al(s) + ۶H^+(aq) \rightarrow ۲Al^{۳+}(aq) + ۳H_۲(g)$$

بیشترین ضریب میان مواد شرکت‌کننده در واکنش، مربوط به یون H^+ است که در این واکنش کاهش می‌یابد.

۴۰ - گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: جملات داده شده ترتیب قدرت کاهندگی سه فلز را مشخص می‌کنیم، که به‌صورت $B < A < D$ است.

گزینهٔ «۲»: فلز D با یون $A^{۲+}$ واکنش می‌دهد و به یون D^{n+} تبدیل می‌شود. پس قدرت اکسندگی $A^{۲+}$ بیشتر از D^{n+} است. از طرفی فلز A را نمی‌توان در محلول حاوی $B^{۳+}$ نگهداری کرد. پس قدرت اکسندگی $A^{۲+}$ کمتر از $B^{۳+}$ است.

گزینهٔ «۳»: نادرست $۳A + ۲B^{۳+} \rightarrow ۳A^{۲+} + ۲B$

از واکنش ۳ مول فلز A با محلول حاوی یون $B^{۳+}$، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود.

گزینهٔ «۴»: هرچه تمایل به از دست دادن الکترون بین دو فلز بیشتر باشد (در جدول سری الکتروشیمیایی فاصلهٔ بیشتری داشته باشند) تغییر دمای محلول بیشتر است.