علـوی

حسابان (جلد ۲)

سیروس نصیری– محمدرضا سیاح

مجموعه کتاب‌های همراه علـوی

سخن ناشر

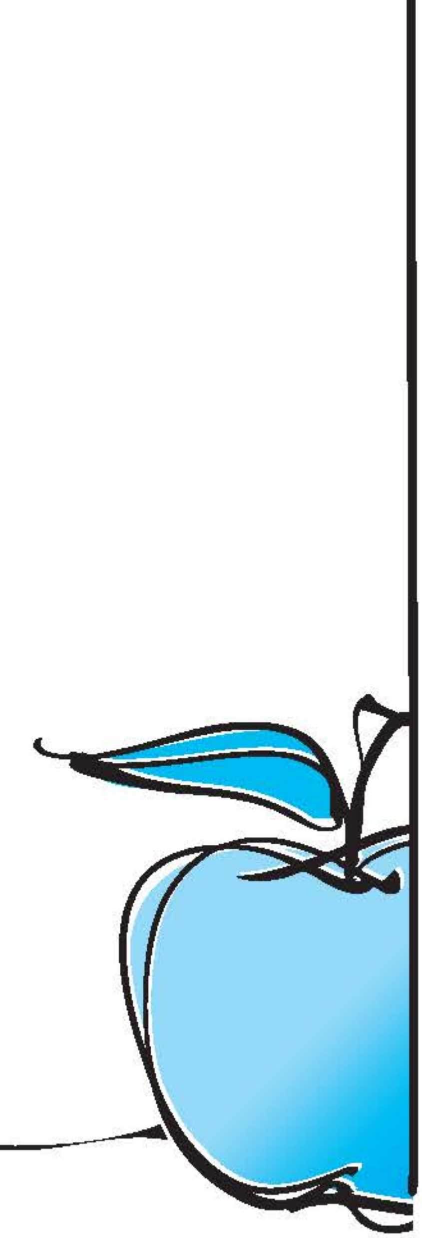
سـرآغاز هـر نامـه نـام خداسـت   که بی نام او نامه یکسـر خطاسـت

سپاس خدای را سزاست که اندیشهٔ انسانی را از طریق الهام با علم الهی پیوند زد و غبار تفکر بشری را با ظهور وحی ناب شست‌وشو داد و راهی رسا و نمایان در مقابل انسان گشود.

مؤسسـهٔ علـوی طی سـالیان متمادی، با ارائه خدمات فرهنگی و آموزشی، مفتخر است که توانسته تا حد توان در راه اعتلای کیفی فرهنگ و آموزش گام بردارد و با توجه به این رسالت خطیر و جامعیت بخشیدن به برنامه‌های آموزشی خویش اقدام به تهیه مجموعهٔ حاضر نماید.

کتاب پیش رو برای دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم منطبق با آخرین نسـخهٔ کتاب درسـی تألیف شده است، همچنین این کتاب برای آمادگی و تسـلط کامل بر دروس پایه دهم و یازدهم می‌تواند بسـیار آموزنده و مفید باشد.

مؤلف کتاب در مقدمه به شـیوایی رئوس مطالب را شـرح داده اسـت، پس سـخن را کوتاه و شـما را به مطالعه کتاب دعوت می‌نماییم. امیدواریم آموزش این کتاب، به رشد و شکوفایی علم و دانش و پرورش شایسـتگی‌ها در نسل جوان یاری رسـاند. در خاتمه از همهٔ دست‌اندرکاران محترم که در مسیر پر فراز و نشـیب تدوین و نشر کتاب زحمات فراوانی کشـیده‌اند سپاسگزاری می‌نماییم و از تمامی شما عزیزان خواهشـمندیم جهت بهبود و ارتقای سـطح کیفیت کتاب پیشـنهادات و انتقادات خود را از طریق سـایت alavi.ir و شماره های تماس ذکر شده در صفحه شناسنامه با ما در میان بگذارید.



مقدمه مؤلف

«به نام او که به ما اندیشیدن آموخت»

بعد از چاپ کتاب حسابان (جلد اوّل) حالا رفتیم سراغ جلد دوم کتاب. یعنی تابع، لگاریتم، حد و مشتق.

کارمون تو این جلد ساده‌تر بود. چون تغییرات کمتری نسبت به نظام قبل داشتیم.

این کتاب از این نظر از اهمیت بیشتری برخوردار است که مباحث حد و مشتق پیش‌نیاز بسیار مهمی برای دروس دانشگاهی شماست و همچنین سهم زیادی در کنکور دارد.

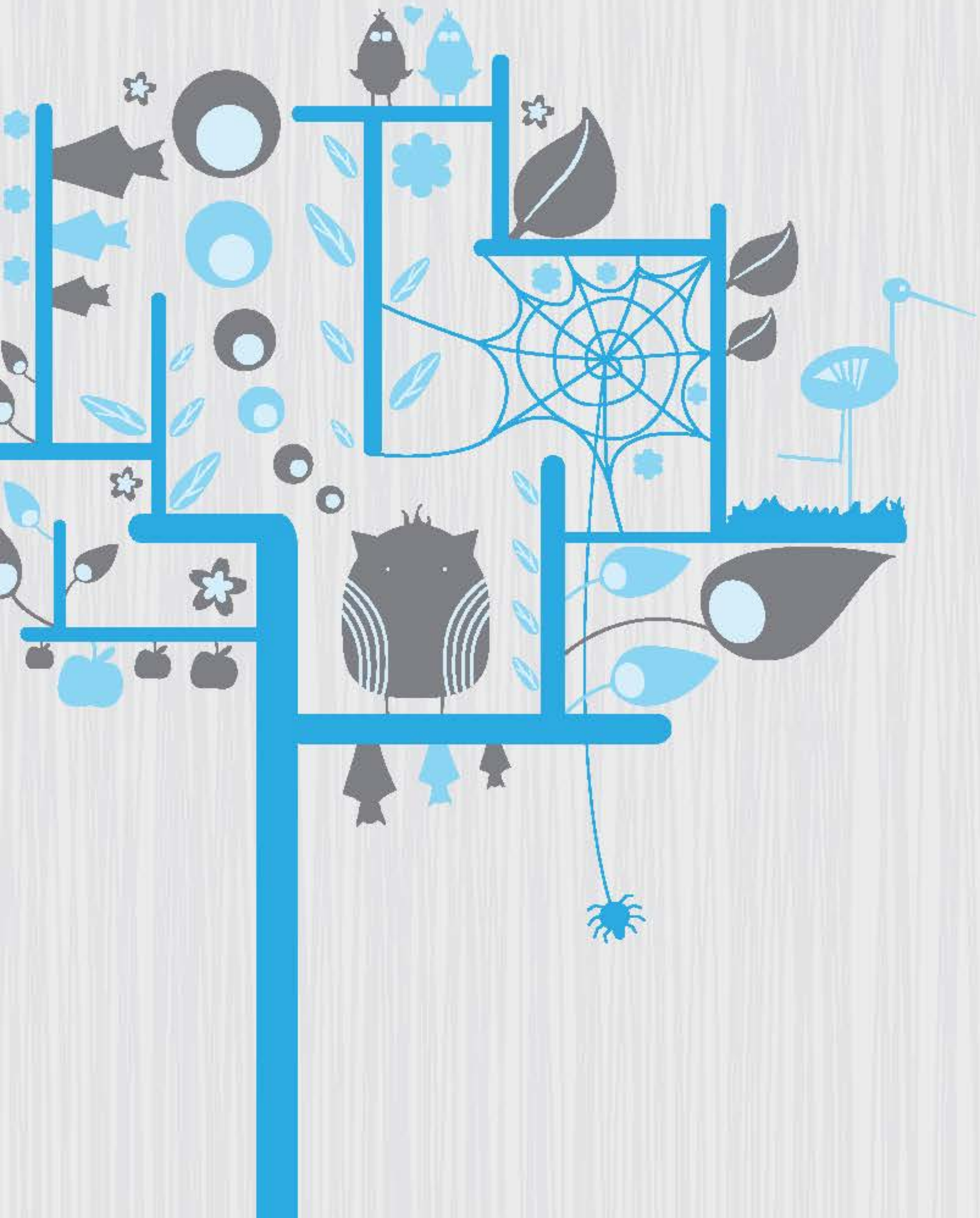
امیدواریم که تونسته باشیم با این مجموعه تست، شما را برای رسیدن به هدفتون برای ورود به دانشگاه یاری کنیم.

در پایان از همهٔ عزیزانی که کتاب را مطالعه می‌کنند خواهشمندیم که نواقص کتاب را ما اطلاع دهند تا در چاپ‌های بعد رفع کنیم.

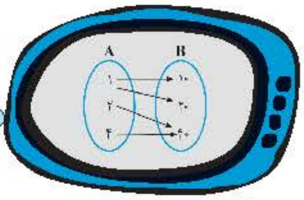
نصیری، سیاح

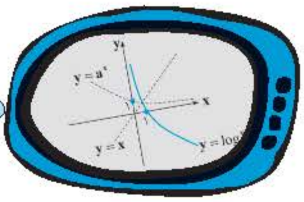
تقدیم به:

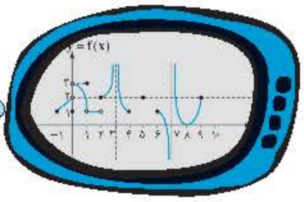
- همهٔ آن‌ها که تا امروز در مسیر آموزش تلاش کرده‌اند.
- و شما که قرار است در آیندهٔ نزدیک، نقش علمی مهمی ایفا کنید.

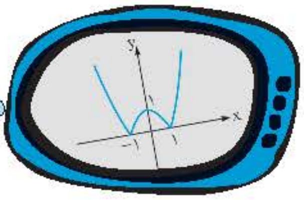


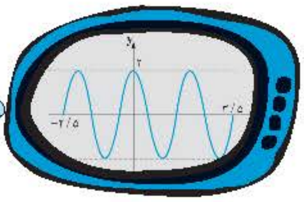
فهرست

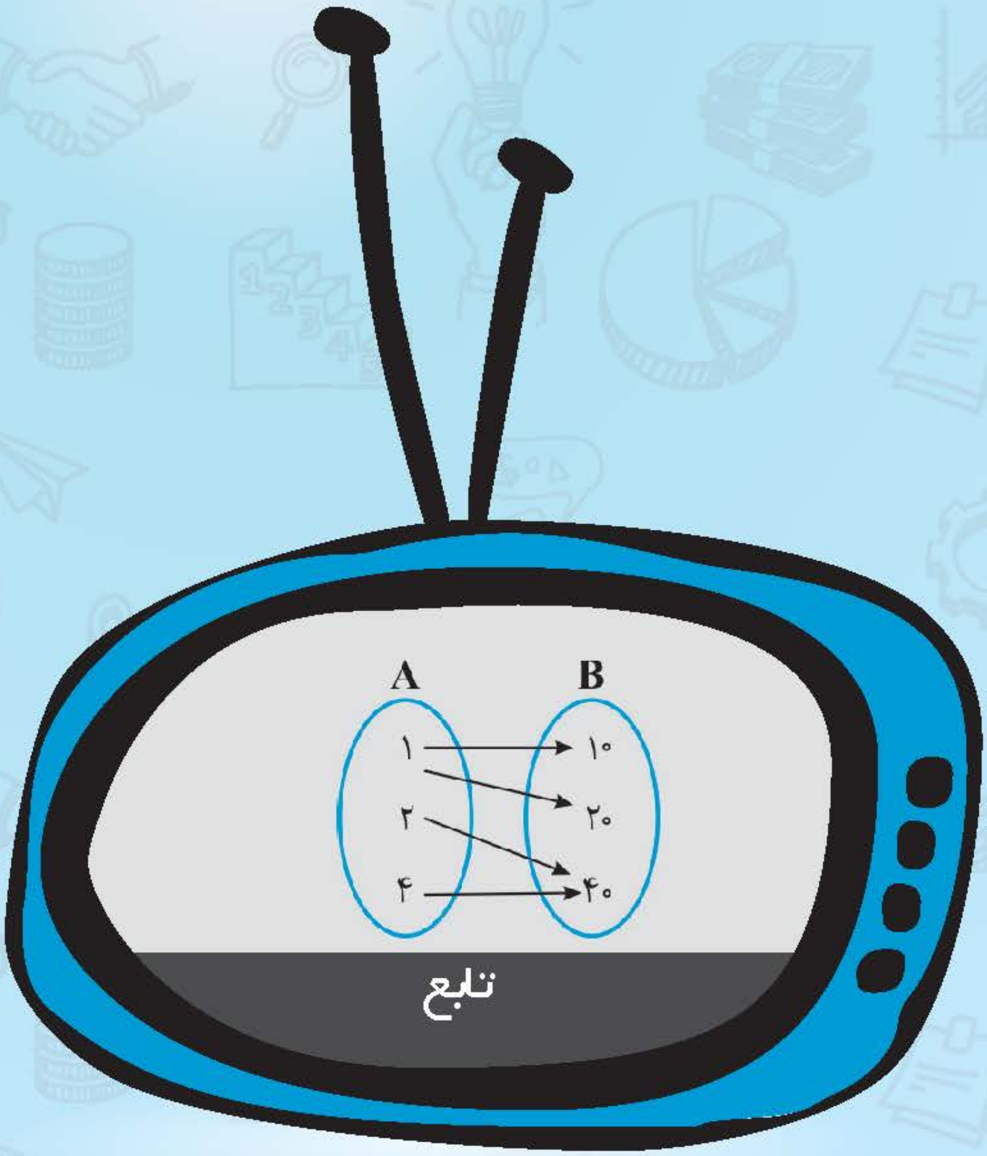










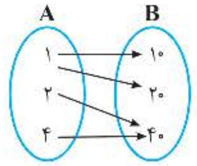

A
B
۱
۲
۴
۱۰
۲۰
۴۰
تابع


۶

تابع: هر رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B ، یک تابع است به شرطی که در آن به‌هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شود. نمودار (الف) تابع است زیرا برای هر عضو A یکی از عضوهای B نسبت داده شده است. نمودار (ب) تابع نیست، زیرا برای عدد ۳ از مجموعه A دو عضو از مجموعه B نسبت داده شده است.

نکته: اگر تابعی از A به B تعریف شود باید از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

مثال ۱: چند تا از نمودارها و جدول‌های زیر تابع هستند؟



(C)

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	زیست
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸

(B)

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸

(A)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است A و B تابع است، اما C تابع نیست.

مثال ۲: چند تا از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) رابطه‌ای که به افراد، سن آن‌ها نسبت داده می‌شود.

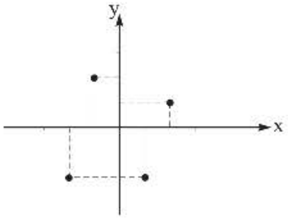
ب) رابطه‌ای که به افراد، وزن آن‌ها نسبت داده می‌شود.

ج) رابطه‌ای که به افراد، غذاهای مورد علاقه‌شان نسبت داده می‌شود.

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است الف و ب تابع است و ج تابع نیست.

نمایش نقطه و محورهای مختصات: در نمودار مقابل محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر می‌گیریم. مختصات هریک از نقاط داده شده را می‌توان با یک زوج از اعداد نمایش داد.



$(۲,۱)\ ,\ (-۱,۲)\ ,\ (۱,-۲)\ ,\ (-۲,-۲)$

نکته: ترتیب نوشتن اعداد اهمیت دارد مثلاً زوج $(۳,۴)$ و $(۴,۳)$ با هم فرق دارند. به‌همین دلیل به زوج‌های گفته شده، زوج مرتب می‌گوییم. در هر زوج، عضو اول را مؤلفه اول و عضو دوم را مؤلفه دوم می‌نامیم.

برابری زوج‌ها: اگر دو زوج (a,b) و (c,d) با هم برابر باشند، باید $b=d$ و $a=c$ باشد.

مثال ۳: اگر دو زوج مرتب $(x-۱\ ,\ ۳y)$ و $(۴\ ,\ y+x)$ با هم برابر باشند، مقدار y چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $-\frac{۵}{۲}$　　۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه «۴» صحیح است

$$x-۱=۴ \Rightarrow x=۵ \quad , \quad y+x=۳y \xrightarrow{x=۵} y+۵=۳y \Rightarrow ۵=۲y \Rightarrow y=\frac{۵}{۲}$$

رابطه به‌صورت زوج مرتب: مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را رابطه می‌نامیم و نام آن‌ها را عموماً f و g می‌نامیم مانند:

$f=\{(۱,-۱),(۳,۲),(۳,۱)\}$ و $g=\{(۰,۲),(۱,۱)\}$

تعریف تابع به‌صورت زوج مرتب: رابطه‌ای که زوج‌های مرتب آن مؤلفه اوّل تکراری نداشته باشند، تابع است.
دقت کنید که اگر مؤلفه اوّل تکرار شود باید مؤلفه دوم نیز تکرار شود تا تابع باشد.

مثال ۴: اگر رابطه $g=\{(۱,-۱),(m^۲+۳,۴),(۱,۴m^۲-۵),(۴m,۱)\}$ تابع باشد، مقدار قابل قبول m چقدر است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

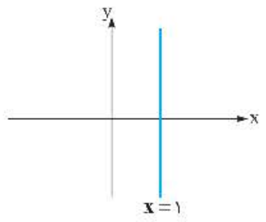
پاسخ: گزینه «۱» صحیح است چون $(۱,-۱)$ و $(۱,۴m^۲-۵)$ دارای مولفه اول تکراری هستند پس باید مولفه‌های دوم آن‌ها برابر باشد در نتیجه:

$$۴m^۲-۵=-۱ \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} m=۱ \Rightarrow g=\{(۱,-۱),(۴,۴),(۴,۱)\} \\ m=-۱ \Rightarrow g=\{(۱,-۱),(۴,۴),(-۴,۱)\} \end{cases}$$

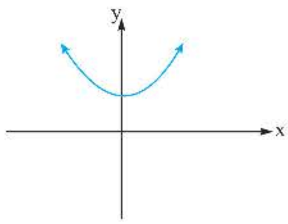
پس به ازای $m=-۱$ رابطه‌ی g یک تابع است.

تشخیص تابع از روی نمودار: اگر هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن نمودار، تابع است.

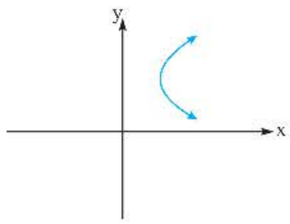
مثال ۵: چند تا از نمودارهای زیر تابع است؟



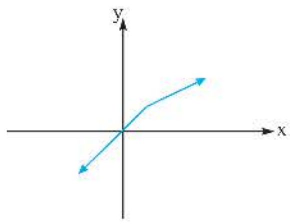
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

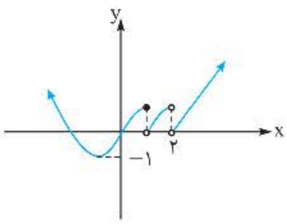
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۴» صحیح است. الف و پ تابع نیستند و ب و ت تابع هستند.

تابع به عنوان ماشین: دستگاه (ماشین) مقابل را ببینید. تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند که ورودی و خروجی دارد. به عبارت دیگر به ازای هر ورودی فقط یک خروجی تولید می‌کند. ورودی‌ها دامنه و خروجی‌های آن برد تابع محسوب می‌شود.

دامنه و برد: مجموعه مؤلفه‌های اوّل زوج‌های مرتب یک تابع را دامنه (D) و مجموعه مؤلفه‌های دوم را بُرد (R) تابع می‌نامیم.
مثلاً تابع $f=\{(۱,-۱),(۲,۴),(۴,۴)\}$ دارای دامنه $D=\{۱,۲,۴\}$ و برد $R=\{-۱,۴\}$ است. اگر تابع به‌صورت نمودار باشد دامنهٔ آن تصویر تابع بر محور x ها و برد آن تصویر تابع بر محور y هاست.

مثال ۶: برد تابع مقابل کدام است؟



۱) $(-۱,+\infty)$
۲) $[-۱,+\infty)$
۳) $[-۲,+\infty)$
۴) $(-۲,+\infty)$

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است. اگر نمودار را بر محور y ها تصویر کنیم برد تابع $R=[-۱,+\infty)$ خواهد بود.

مثال ۷: تابع f را به‌صورت «به هر عدد طبیعی کمتر از ۵ مربع آن را نسبت می‌دهیم» تعریف می‌کنیم، برد این تابع چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

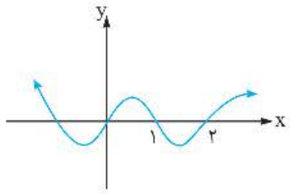
پاسخ: گزینه «۲» صحیح است.

$f=\{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۹),(۴,۱۶)\}$

$D=\{۱,۲,۳,۴\} \quad , \quad R=\{۱,۴,۹,۱۶\}$

مقدار تابع: اگر زوج مرتب (a,b) از تابع f انتخاب شود یا به عبارتی $(a,b)\in f$ باشد، آن‌گاه $a\in D_f$ و $b\in R_f$ خواهد بود و می‌توان نوشت $f(a)=b$ (b را مقدار تابع f در a گویند). مثلاً در تابع $f=\{(۱,۲),(۳,-۱)\}$ داریم $f(۱)=۲$ و $f(۳)=-۱$. در نمودار هم اگر نقطهٔ A به مختصات (a,b) واقع بر آن باشد آن‌گاه مقدار تابع در a برابر b است و آن‌را با نماد $f(a)=b$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۸: با توجه به نمودار مقابل حاصل $A=f\big(f(۱)\big)+f(۲)$ چقدر است؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است. با توجه به نمودار $f(۱)=۰$ و $f(۰)=۰$ است پس $f\big(f(۱)\big)=f(۰)=۰$ و $f(۲)=۰$ پس: $A=۰$

مثال ۹: اگر $f=\{(۱,۵),(۵,-۳)\}$ باشد، مقدار $f(۱)+f(f(۱))$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است.

$f(۱)=۵ \quad , \quad f(f(۱))=f(۵)=-۳ \Rightarrow f(۱)+f(f(۱))=۵-۳=۲$

مثال ۱۰: تابعی که دامنه‌ی آن $D=\{۱,۲\}$ و برد آن $\{۳,۴\}$ باشد و $f(۱)<f(۲)$ باشد کدام است؟

۱) $\{(۱,۲),(۳,۴)\}$ ۲) $\{(۱,۳),(۲,۴)\}$ ۳) $\{(۱,۵),(۲,۲)\}$ ۴) $\{(۱,۰),(۲,-۱)\}$

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است. چون $f(۱)<f(۲)$ است پس باید $f(۱)=۳$ و $f(۲)=۴$ باشد پس $f=\{(۱,۳),(۲,۴)\}$

نمایش جبری تابع: اگر بتوانیم رابطه‌ی بین دامنه و برد تابع را به‌صورت یک عبارت ریاضی بنویسیم آن را ضابطه تابع یا رابطه جبری تابع می‌نامیم. مثلاً $y=x^۲$ یک تابع است که هر عدد حقیقی را به مربع آن نسبت می‌دهد.

مثال ۱۱: اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}-x^۲-x$ باشد حاصل $f(-۱)+f(۲)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است.

$f(-۱)=\sqrt{-۱+۲}-(-۱)^۲-(-۱)=۱ \ ، \ f(۲)=\sqrt{۲+۲}-۴-۲=-۴$

$\Rightarrow f(-۱)+f(۲)=۱-۴=-۳$

انواع تابع و دامنه و برد آن‌ها:

تابع ثابت: تابعی مانند f، که برد آن فقط یک عضو داشته باشد را تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را c بنامیم، تابع ثابت را با ضابطهٔ $f(x)=c$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۲: اگر $f(x)=\{(۳,k),(۲,m-۱)\}$ تابع ثابت باشد در این‌صورت $m-k$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است. چون تابع ثابت است پس:

$$m-۱=k \Rightarrow m-k=۱$$

تابع خطی

هر تابع به‌صورت $y=ax+b$ یک تابع خطی نامیده می‌شود و نمودار آن یک خط راست است.

مثال ۱۳: اگر تابع خطی $f(x)=ax+b$ از نقطه $(-\frac{۱}{۲},۰)$ عبور کند و عرض از مبدأ آن برابر $۲-b$ باشد؛ حاصل $f(۰)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است

$$\text{عرض از مبدأ} = b = ۲-b \Rightarrow ۲b=۲ \Rightarrow b=۱$$

$$(-\frac{۱}{۲},۰)\in f \Rightarrow ۰=a\times\frac{-۱}{۲}+۱ \Rightarrow \frac{a}{۲}=۱ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(x)=۲x+۱ \Rightarrow f(۰)=۱$$

مثال ۱۴: اگر دامنه تابع $y=۲n-۱$ اعداد طبیعی کمتر از ۵ باشد، مجموع اعضای برد آن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است.

$$n=۱ \Rightarrow y=۱ \quad , \quad n=۲ \Rightarrow y=۳ \quad , \quad n=۳ \Rightarrow y=۵ \; , \quad n=۴ \Rightarrow y=۷$$

مجموع اعضای برد، ۱۶ است.

$$R=\{۱,۳,۵,۷\}$$

مثال ۱۵: اگر دامنه‌ی تابع خطی $y=-x+۲$ برابر $D=[-۱,۴]$ باشد، برد آن کدام است؟

۱) $[-۲,۳]$ ۲) $[-۳,۲]$ ۳) $[-۳,۳]$ ۴) $[-۲,۵]$

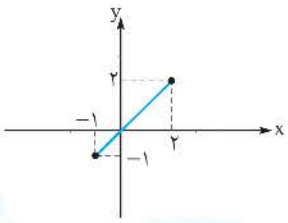
پاسخ: گزینه «۱» صحیح است.

$$\begin{cases} x=-۱ \Rightarrow y=۳ \\ x=۴ \Rightarrow y=-۲ \end{cases} \Rightarrow \quad R=[-۲,۳]$$

تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه دقیقاً به‌همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند. در صورتی‌که دامنه تابع همانی $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن همان خط $y=x$ است که به‌صورت $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود

مثال ۱۶: نمودار تابع همانی با دامنه $[-۱,۲]$ را رسم کنید.

پاسخ: چون دامنه $[-۱,۲]$ است پس برد آن نیز $[-۱,۲]$ خواهد بود.



مثال ۱۷: اگر $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2+x+m}$ تابع همانی با دامنه و برد $\mathbb{R}$ باشد مقدار m چقدر است؟

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۴» صحیح است.

$$f(x)=\frac{x(x^2+x+1)}{x^2+x+m}\equiv x\Rightarrow m=1$$

تابع چندجمله‌ای: توابعی را که نمایش جبری آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چندجمله‌ای می‌نامیم. مثلاً توابع زیر چندجمله‌ای هستند.

$$f(x)=x^3+3x-1 \quad , \quad g(x)=\frac{1}{2}x^3-x \quad , \quad h(t)=t^4-t^2$$

بــه بیان دقیق‌تر هر تابع چند جمله‌ای را به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ نمایش می‌دهیم. تابع چند جمله‌ای از درجه اول همان تابع خطی $y=a_1x+a_0$، تابع چند جمله‌ای از درجه دوم همان سهمی است و تابع چند جمله‌ای از درجه صفر همان تابع ثابت است. دقت کنید که دامنهٔ تابع چندجمله‌ای، $\mathbb{R}$ است.

مثال ۱۸: اگر تابع $f(x)=x^2+bx+c$ محور x ها را در ۲- و محور y ها را در ۲ قطع کند، $b+c$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است. نقطه‌ی روی محور x ها به مختصات $(-2,0)$ و روی محور y ها به مختصات $(0,2)$ می‌باشد پس:

$$f(-2)=0\Rightarrow 4-2b+c=0 \quad , \quad f(0)=2\Rightarrow c=2$$
$$4-2b+c=0\xrightarrow{c=2}6-2b=0\Rightarrow b=3 \qquad \Rightarrow b+c=5$$

مثال ۱۹: مقـدار تابـع درجه دومی که از نقاط $(3,2)$ و $(-1,2)$ عبور کند و محـور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴- قطع کند به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶- ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است. تابع را به‌صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم.

$$(3,2)\in f\Rightarrow f(3)=2\Rightarrow 9a+3b+c=2 \qquad (1)$$
$$(-1,2)\in f\Rightarrow f(-1)=2\Rightarrow a-b+c=2 \qquad (2)$$
$$(0,-4)\in f\Rightarrow f(0)=-4\Rightarrow 0+0+c=-4\Rightarrow c=-4$$

با توجه به اینکه $c=-4$ است، روابط (۱) و (۲) را در یک دستگاه حل می‌کنیم.

$$\begin{matrix} \\ 3\times\end{matrix}\begin{cases}9a+3b=6\\ a-b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9a+3b=6\\ 3a-3b=18\end{cases}\xrightarrow{+}12a=24\Rightarrow a=2$$
$$a-b=6\xrightarrow{a=2}2-b=6\Rightarrow b=-4$$

پس تابع $f(x)=2x^2-4x-4$ می‌باشد. در نتیجه:

$$f(1)=2(1)^2-4(1)-4=2-8=-6$$

مثال ۲۰: تابع درجه ســوم $f(x)=ax^3+bx^2$ محور x ها را در نقطه $x=2$ قطع می‌کند. اگر $f(1)=3$ باشـد مقدار $f(-1)$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲- ۴) ۹

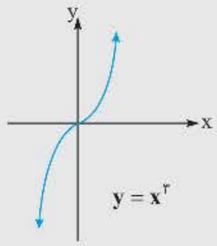
پاسخ: گزینه «۴» صحیح است.

$$f(۲)=۸a+۴b=۰\Rightarrow b=-۲a$$

$$f(۱)=a+b=۳\xrightarrow{b=-۲a}a-۲a=۳\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=۶$$

$$f(x)=-۳x^۳+۶x^۲\Rightarrow f(-۱)=۳+۶=۹$$

نکته توجه کنید که برای $n=۳$ تابع چند جمله‌ای به یک تابع درجه سوم تبدیل می‌شود و فرم کلی آن $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$ می‌باشد. در این کتاب با تابع $y=x^۳$ آشنا می‌شویم و در قسمت‌های بعد، انتقال این تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



چند اتحاد مهم:

$$۱)x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲+...+a^{n-۱})\quad n\in\mathbb{N}$$

$$۲)x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-x^{n-۲}a+x^{n-۳}a^۲-...+a^{n-۱})\quad n\in O$$

نتایج اتحادهای مهم:

۱) عبارت جبری x^n-a^n به ازای هر n طبیعی بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۲) عبارت جبری x^n+a^n به ازای هر n طبیعی فرد بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

در حالت خاص اگر $a=۱$ باشد، آن‌گاه:

$$۱)x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+x^{n-۳}+...+۱)\quad n\in\mathbb{N}$$

$$۲)x^n+۱=(x+۱)(x^{n-۱}-x^{n-۲}+x^{n-۳}-...-x+۱)\,n\in O$$

مثال ۲۱: اگر $f(x)=(x-۱)(x^۷+x^۶+...+x+۱)$ حاصل $f(\sqrt[۸]{۲})$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۰   ۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است.

$$f(x)=(x-۱)(x^۷+x^۶+...+x+۱)=x^۸-۱\Rightarrow f(\sqrt[۸]{۲})=(\sqrt[۸]{۲})^۸-۱=۲-۱=۱$$

تابع گویا: اگر $P(x)$ و $q(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند در این صورت $y=\dfrac{P(x)}{q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم و دامنه آن همه اعداد حقیقی به غیر از اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند، می‌باشد.

$$D_y=\mathbb{R}-\{x\,|\,q(x)=۰\}$$

مثال ۲۲: دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۴-۲x}{۲x^۲-۵x+۲}$ برابر $\mathbb{R}-\{a,b\}$ است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است. ابتدا ریشه‌های مخرج را حساب می‌کنیم:

$$۲x^۲-۵x+۲=۰\Rightarrow(x-۲)(۲x-۱)=۰\Rightarrow x=۲,\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲,\frac{۱}{۲}\}$$

$$a+b=۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

مثال ۲۳: اگر تابع گویای $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{ax^2+x+7}$ محور x ها را در ۲ قطع کند، دامنهٔ f کدام است؟

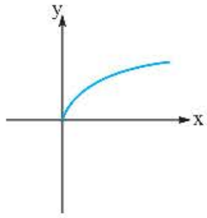
۱) $\mathbb{R}-\{1,\frac{1}{6}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-1,\frac{7}{6}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{0,-1\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2},1\}$

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است.

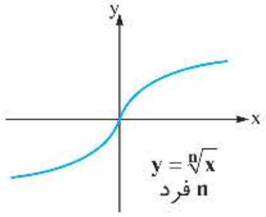
$$f(2)=0\Rightarrow 4+2+a=0\Rightarrow a=-6$$

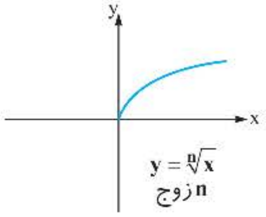
$$ax^2+x+7=0\xrightarrow{a=-6}-6x^2+x+7=0\Rightarrow x=-1,\frac{7}{6}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-1,\frac{7}{6}\}$$

تابع رادیکالی و دامنه آن: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را تابع رادیکالی می‌نامیم که نمودار آن به‌صورت زیر است.



در حالت کلی‌تر نمودار $\sqrt[n]{x}$ برای n های زوج و فرد طبیعی به‌صورت زیر است.

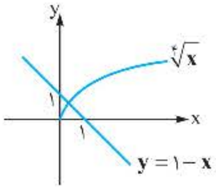




مثال ۲۴: نمودارهای دو تابع $y=\sqrt[4]{x}$ و $y=1-x$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است‌با توجه به شکل زیر در می‌یابیم که فقط در ۱ نقطه متقاطع‌اند.



دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج: کافی است زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم، اگر f و g چند جمله‌ای باشند و یا توابعی با دامنه $\mathbb{R}$ باشند:

$$A)\ f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}\Rightarrow D_f=\{x\,|\,g(x)\ge 0\}\qquad B)\ h(x)=\frac{g(x)}{\sqrt[2n]{f(x)}}\Rightarrow D_h=\{x\,|\,f(x)>0\}$$

مثال ۲۵: اجتماع دامنه‌های توابع $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$ و $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x^3}}$ کدام است؟

۱) $(0,\infty)$ ۲) $(-1,\infty)$ ۳) $[-1,\infty)$ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

$$-x^2+x+2\ge 0\Rightarrow x^2-x-2\le 0\Rightarrow (x+1)(x-2)\le 0$$

$$\Rightarrow -1\le x\le 2\Rightarrow D_f=[-1,2]$$

$$x^2+x^3>0\Rightarrow x^2(1+x)>0\xrightarrow{x\neq 0}1+x>0\Rightarrow x>-1 \text{ و } x\neq 0$$

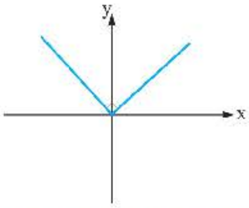
$$\Rightarrow D_g=(-1,0)\cup(0,+\infty)\Rightarrow D_f\cup D_g=[-1,+\infty)$$

نکته رادیکال‌ها با فرجه فرد در دامنه تأثیری ندارند.

مثال ۲۶: دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{\sqrt[۳]{x-۲}}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-\{۲\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{-۲\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است. دامنه این تابع با دامنهٔ تابع $y=\dfrac{x+۲}{x-۲}$ برابر است پس: $D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$



تابع قدرمطلق: تابعی که هر مقدار از دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با نماد $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهیم، اگر دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ باشد، نمودار آن به‌صورت زیر است.

نکته توجه کنید که دامنه تابع $|f(x)|$ با دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر است.

مثال ۲۷: اگر در تابع قدرمطلق دامنه به‌صورت $\{\frac{۱}{۲}, \frac{-۳}{۲}, -۴\}$ باشد، مجموع عضوهای برد چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{array}{c|ccc} x & \frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} & -۴ \\ \hline |x| & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} & ۴ \end{array} \Rightarrow \frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}+۴=۶$$

مثال ۲۸: دامنه تابع $y=\left|\dfrac{۱}{۳-\sqrt[۳]{x-۱}}\right|$ چند عضو حقیقی را شامل نمی‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است. قدر مطلق و رادیکال با فرجه سوم در دامنه بی‌تأثیرند، فقط کافی است ریشهٔ مخرج را پیدا کنیم.

$$۳-\sqrt[۳]{x-۱}=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x-۱}=۳\Rightarrow x-۱=۲۷\Rightarrow x=۲۸\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۲۸\}$$

دامنهٔ این تابع فقط شامل عدد ۲۸ نمی‌باشد.

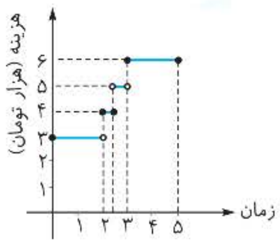
تابع پله‌ای و براکت: هر تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases} c_۱ & x\in D_۱ \\ c_۲ & x\in D_۲ \\ \vdots & \\ c_n & x\in D_n \end{cases}$ که هر ضابطهٔ آن تابعی ثابت است را تابع پلّه‌ای می‌نامیم.

مثال ۲۹: دریک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به‌صورت جدول زیر محاسبه می‌شود. ضابطهٔ تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

زمان		هزینه (هزار تومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

پاسخ: ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر خواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases}3 & 0\leq x<2\\ 4 & 2\leq x\leq 2/5\\ 5 & 2/5<x<3\\ 6 & 3\leq x\leq 5\end{cases}$$



مثال ۳۰: در تابع پله‌ای $f(x)=\begin{cases}a & x<-1\\ 3-a & x>-1\end{cases}$ رابطه $f(0)=2f(-2)$ برقرار است. مقدار $f(0)+f(-2)$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» صحیح است.

$$f(0)=2f(-2)\Rightarrow 3-a=2a\Rightarrow 3a=3\Rightarrow a=1$$

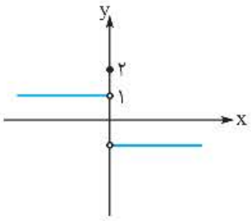
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}1 & x<-1\\ 2 & x>-1\end{cases}\Rightarrow f(0)+f(-2)=2+1=3$$

تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای): اگر تعداد ضابطه‌های یک تابع دو یا بیشتر باشد؛ آن تابع را تابع قطعه‌ای یا چند ضابطه‌ای می‌نامیم. دامنهٔ هر ضابطه جلوی آن نوشته می‌شود و دامنهٔ کل تابع اجتماع دامنهٔ تمام ضابطه‌ها می‌باشد همچنین اشتراک دامنهٔ ضابطه‌ها باید تهی باشد.

مثلاً تابع قدرمطلق را می‌توان به‌صورت تابع دو ضابطه‌ای به فرم روبه‌رو نمایش داد.

$$|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

همچنین تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x>0\\ 3x-1 & x<-1\end{cases}$ یک تابع دو ضابطه‌ای است. به عنوان مثال نمودار تابع سه ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases}-1 & x>0\\ 1 & x<0\\ 2 & x=0\end{cases}$ به‌صورت زیر است:



تابع جزء صحیح (براکت): تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود آن عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع به‌صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود

به بیان دیگر $[x]$ برابر است با بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x و به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$[x]=\text{Max}\{n\in\mathbb{Z}:n\leq x\}$$

تعاریف دیگری از $[x]$:

۱) اگر برای هر عدد حقیقی x رابطه $x=n+p$ برقرار باشد که $(p\in[0,1), n\in\mathbb{Z}, x\in\mathbb{R})$ آن‌گاه $[x]=n$ است:

$$[x]=[n+p]=n\ ,\ n\in\mathbb{Z},\ p\in[0,1)$$

۲) اگر $x\in\mathbb{Z}$ باشد آن‌گاه $[x]=x$ است مثلاً $[2]=2$ است و اگر $n<x<n+1$ باشد یعنی x بین دو عدد صحیح متوالی باشد آن‌گاه $[x]=n$ است. به محاسبات زیر توجه کنید.

$$[-2/5]=-3, [-0/6]=-1\ ,\ [1]=1\ ,\ [2/5]=2\ ,\ [\sqrt{10}]=3$$