بسم الله الرحمن الرحیم

علـوی

ریاضی تجربی (جلد ۲)

سیروس نصیری

مجموعه کتاب‌های همراه علـوی

سخن ناشر

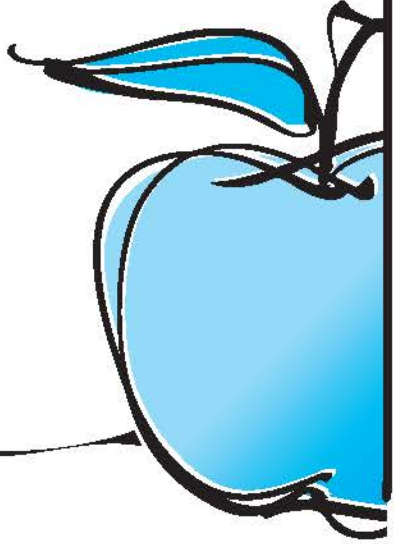
سرآغاز هر نامه نام خداست — که بی نام او نامه یکسر خطاست

سپاس خدای را سزاست که اندیشهٔ انسانی را از طریق الهام با علم الهی پیوند زد و غبار تفکر بشری را با ظهور وحی ناب شست‌وشو داد و راهی رسا و نمایان در مقابل انسان گشود.

مؤسسهٔ علوی طی سالیان متمادی، با ارائه خدمات فرهنگی و آموزشی، مفتخر است که توانسته تا حد توان در راه اعتلای کیفی فرهنگ و آموزش گام بردارد و با توجه به این رسالت خطیر و جامعیت بخشیدن به برنامه‌های آموزشی خویش اقدام به تهیه مجموعهٔ حاضر نماید.

کتاب پیش رو برای دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم منطبق با آخرین نسخهٔ کتاب درسی تألیف شده است، همچنین این کتاب برای آمادگی و تسلط کامل بر دروس پایه دهم و یازدهم می‌تواند بسیار آموزنده و مفید باشد.

مؤلف کتاب در مقدمه به شیوایی رئوس مطالب را شرح داده است، پس سخن را کوتاه و شما را به مطالعه کتاب دعوت می‌نماییم. امیدواریم آموزش این کتاب، به رشد و شکوفایی علم و دانش و پرورش شایستگی‌ها در نسل جوان یاری رساند. در خاتمه از همهٔ دست اندرکاران محترم که در مسیر پر فراز و نشیب تدوین و نشر کتاب زحمات فراوانی کشیده‌اند سپاسگزاری می‌نماییم و از تمامی شما عزیزان خواهشمندیم جهت بهبود و ارتقای سطح کیفیت کتاب پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت alavi.ir و شماره های تماس ذکر شده در صفحه شناسنامه با ما در میان بگذارید.



مقدمه مؤلف

«تقدیم به روح بزرگ پروفسور مریم میرزاخانی»

به نام او که به من قدرت داد تا مجموعه‌ای دیگر را به رشته تحریر درآورم. در این مجموعه به عنوان جلد دوم ریاضی تجربی مباحث حد و پیوستگی، مشتق، کاربرد مشتق، آمار، شمارش بدون شمردن، احتمال و هندسه را گنجانده‌ایم. پرسش‌های چهارگزینه‌ای این کتاب بر اساس تمرینات کتاب درسی و تست‌های کنکور سال‌های گذشته و مرتبط با کتاب درسی تنظیم شده است.

ویژگی‌های کتاب:

۱– پوشش تمام تمرینات و مثال‌های کتاب درسی

۲ – پرهیز از مطالب خارج کتاب

۳– درسنامه قوی

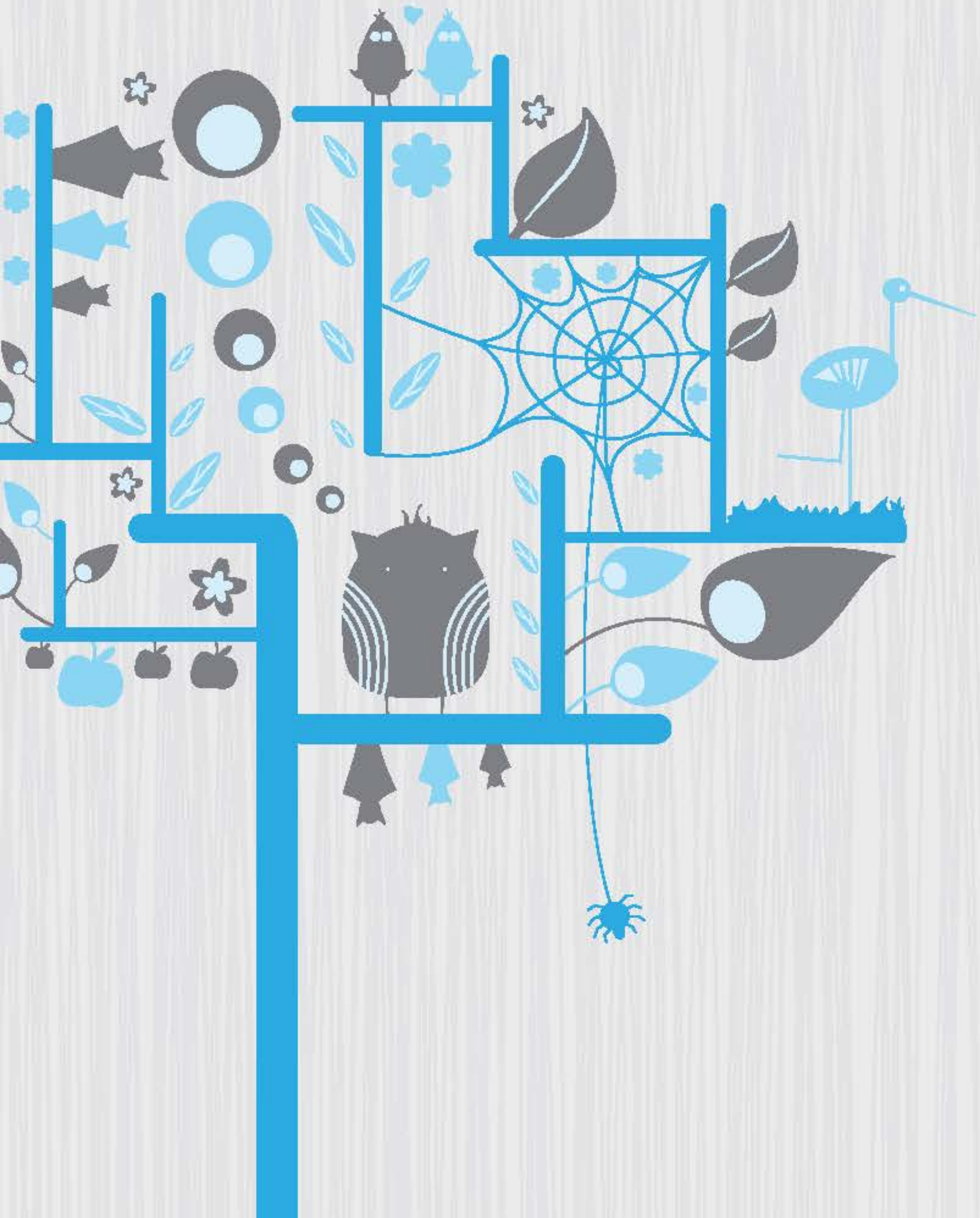
۴– پرسش‌های چهارگزینه‌ای فراوان با پاسخ‌های تشریحی

امیدوارم این کتاب در راه موفقیت شما عزیزان ثمربخش باشد.

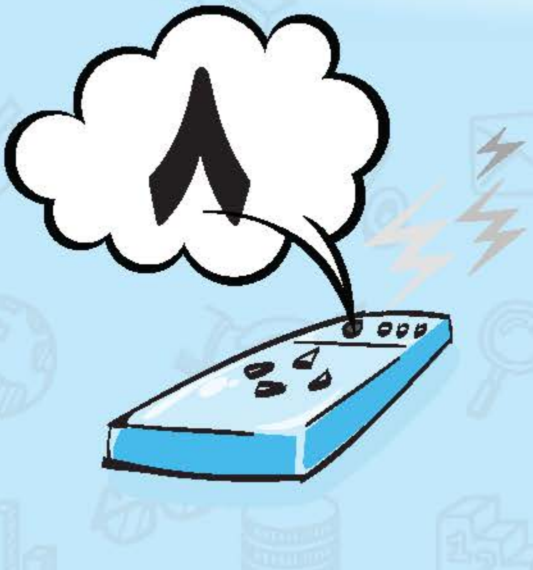
سیروس نصیری

تقدیم به:

- همهٔ آن‌ها که تا امروز در مسیر آموزش تلاش کرده‌اند.
- و شما که قرار است در آیندهٔ نزدیک، نقش علمی مهمی ایفا کنید.



فهرست



۸

حد و پیوستگی

۱ همسایگی و فرایندی حدی

۲ محاسبات و قضایای حد

۳ پیوستگی

۴ حد بی‌نهایت

۵ حد در بی‌نهایت

درس ۱ همسایگی و فرآیند حدی

مفهوم میل کردن

اگر x به a نزدیک شود اما به آن نرسد، گوییم x به عدد a میل می‌کند و به این معنی است که x بسیار بسیار به a نزدیک می‌شود ولی به a نمی‌رسد. میل کردن x به a را با نماد $(x \to a)$ نمایش می‌دهیم.

اگر x از سمت راست به a نزدیک شود آن را به‌صورت $(x \to a^{+})$ و اگر x از سمت چپ به a نزدیک شود آن را به‌صورت $(x \to a^{-})$ نمایش می‌دهیم.

همسایگی: هر بازه باز شامل $x_۰$ را یک همسایگی برای $x_۰$ می‌نامیم یعنی اگر $x_۰ \in (a, b)$ باشد آن‌گاه گوییم بازه (a, b) یک همسایگی برای $x_۰$ است.

مثلاً $(۲ , ۵)$ یک همسایگی برای ۳ است.

مثال ۱: اگر بازهٔ $(۳, x-۱)$ یک همسایگی برای ۵ باشد حدود x کدام است؟

۱) $x > ۵$ ۲) $x > ۶$ ۳) $x > ۴$ ۴) $x < ۶$

پاسخ: گزینه «۲»:

چون بازه $(۳, x-۱)$ همسایگی ۵ است پس:

$$۳ < ۵ < x - ۱ \Rightarrow x > ۶$$

همسایگی محذوف: اگر (a, b) یک همسایگی از عدد حقیقی $x_۰$ باشد آن‌گاه مجموعه $(a, b) - \{x_۰\}$ یک همسایگی محذوف از $x_۰$ است. مثلاً $(-۱, ۲) - \left\{\frac{۳}{۲}\right\}$ یک همسایگی محذوف از $\frac{۳}{۲}$ است.

مثال ۲: کدام مجموعهٔ زیر همسایگی محذوف عدد ۱ است؟

۱) $(-۱, ۱)$ ۲) $\left(۲, \frac{۵}{۲}\right)$ ۳) $\left(۰, \frac{۸}{۷}\right) - \{۱\}$ ۴) $\left(-۱, \frac{۴}{۵}\right) - \{۱\}$

پاسخ: گزینه «۳»:

چون $\left(۰, \frac{۸}{۷}\right)$ یک همسایگی برای عدد حقیقی ۱ است پس $\left(۰, \frac{۸}{۷}\right) - \{۱\}$ یک همسایگی محذوف برای عدد حقیقی ۱ است.

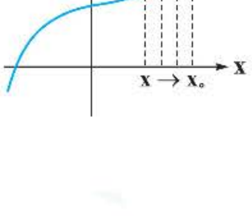
همسایگی راست: اگر r عدد حقیقی مثبت باشد آن‌گاه بازهٔ $(x_۰, x_۰ + r)$ همسایگی راست $x_۰$ است. مثلاً بازهٔ $(۱, ۴)$ همسایگی راست $x = ۱$ است.

همسایگی چپ: اگر r عدد حقیقی مثبت باشد آن‌گاه بازهٔ $(x_۰ - r, x_۰)$ همسایگی چپ $x_۰$ است. مثلاً $(-۴, ۲)$ همسایگی چپ ۲ است.

فرایند حدی

۱) اگر تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $(a, x_۰)$ تعریف شده باشد، گوییم این تابع در نقطه‌ی $x = x_۰$ دارای حد چپ (L) است، اگر x از سمت چپ به $x_۰$ میل کند و مقدار تابع به L نزدیک شود. اگر حد چپ تابع $f(x)$ در $x = x_۰$ برابر L باشد آن را به‌صورت $\lim\limits_{x \to x_۰^{-}} f(x) = L$ نمایش می‌دهیم.

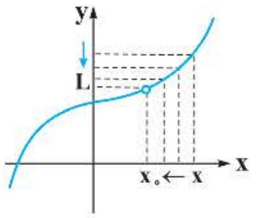
در نمودار مقابل حد چپ نمایش داده شده است.



توجه: هر چه x از سمت چپ به $x_۰$ روی محور xها نزدیک شود، آن‌گاه مقدار تابع از پایین یا از بالا به L نزدیک می‌شود.

۲) اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $(x_۰,b)$ تعریف شده باشد، گوییم این تابع در نقطه‌ی $x=x_۰$ دارای حد راست (L) است، اگر x از سمت راست به $x_۰$ میل کند، مقدار تابع نیز به L نزدیک شود و به‌صورت $\lim\limits_{x\to x_۰^+} f(x)=L$ می‌نویسیم.

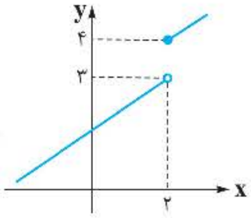
در نمودار مقابل حد راست نمایش داده شده است.



توجه: هر چه x از سمت راست به $x_۰$ روی محور xها نزدیک شود، آن‌گاه مقدار تابع نیز از بالا یا پایین، به L نزدیک می‌شود.

۳) اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی (a,b)، $(x_۰\in(a,b))$ به جز احتمالاً در خود $x_۰$، تعریف شده باشد، گوییم این تابع در $x_۰$ دارای حد (L) است، هرگاه حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی $x_۰$ موجود باشد و با هم برابر باشند و به‌صورت $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=L$ می‌نویسیم.

مثال ۳: با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ که در زیر آمده است، حاصل عبارات خواسته شده را بیابید.



۱) $f(۲)$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

پاسخ:

۱) $f(۲)=۴$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳$

۳) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۴$

۴) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ موجود نیست (حد راست و چپ برابر نیستند)

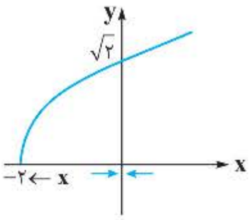
مثال ۴: با توجه به نمودار $f(x)=\sqrt{x+۲}$، حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)+f(-۲)$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)$

پاسخ: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ به‌صورت زیر است.



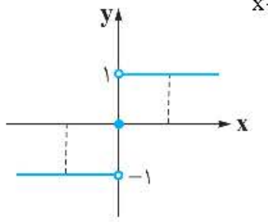
با توجه به نمودار داریم:

۱) $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)+f(-۲)=۰+۰=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=$ وجود ندارد (چون نمودار تابع در همسایگی چپ ۲- تعریف نمی‌شود)

۳) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\sqrt{۲}$

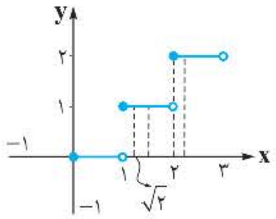
مثال ۵: با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)-2f(0)$ را بیابید.



پاسخ:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)+\lim_{x\to 0^-} f(x)-2f(0)=1-1+0=0$$

مثال ۶: حاصل حد تابع $f(x)=[x]$ را در نقاط $x=2$ و $x=\sqrt{2}$ را به کمک رسم نمودار بیابید.



پاسخ: ابتدا نمودار تابع $f(x)=[x]$ را رسم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2 \quad , \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} f(x)=1 \quad , \quad \lim_{x\to \sqrt{2}^-} f(x)=1$$

پس نتیجه می‌گیریم تابع $f(x)=[x]$ در نقطه $x_0=2$ حد ندارد و در نقطه‌ی $x_0=\sqrt{2}$ حدی برابر ۱ دارد

درس ۲ محاسبات و قضایای حد

قضایا و قوانین حد

۱) حد تابع ثابت: مقدار حد تابع ثابت در هر نقطه مانند $x_۰$ همواره برابر همان مقدار ثابت است.

$$f(x)=c \Rightarrow \lim_{x\to x_۰} f(x)=\lim_{x\to x_۰} c=c$$

۲) حد توابع خطی:

$$f(x)=ax+b \Rightarrow \lim_{x\to x_۰} f(x)=\lim_{x\to x_۰}(ax+b)=ax_۰+b$$

۳) حدمجموع (تفاضل) توابع: برای به‌دست آوردن حاصل حد مجموع (تفاضل) چندتابع ابتدا حد هر کدام را به‌دست می‌آوریم، سپس با هم جمع یا تفریق می‌کنیم.

$$\lim_{x\to x_۰}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_۰} f(x)\pm \lim_{x\to x_۰} g(x)$$

۴) قانون حد ضرب توابع: اگر دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در نقطه‌ی $x=x_۰$ دارای حد باشند، آن‌گاه برای به‌دست آوردن مقدار حد تابع حاصل‌ضرب، باید حد هر کدام را در $x=x_۰$ به‌دست بیاوریم، سپس در هم ضرب کنیم.

$$\lim_{x\to x_۰}(f\times g)(x)=\lim_{x\to x_۰} f(x)\times \lim_{x\to x_۰} g(x)$$

نتیجه: اگر $\lim_{x\to x_۰} f(x)=L$ باشد آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_۰} f^n(x)=L^n$$

۵) مقدار توابع چندجمله‌ای در نقطه‌ی $x=x_۰$: همواره با مقدار حد آن تابع چندجمله‌ای در $x=x_۰$ برابر است.

$$\lim_{x\to x_۰}(a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰)=a_n x_۰^{\,n}+a_{n-۱}x_۰^{\,n-۱}+\dots+a_۰$$

مثال ۷: حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim_{x\to -۱}\sqrt{۲}$ ۲) $\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}(-۲)^۳$ ۳) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}(۲x-۱)$ ۴) $\lim_{x\to -۲}(۵x^۲-x+۱)$

پاسخ:

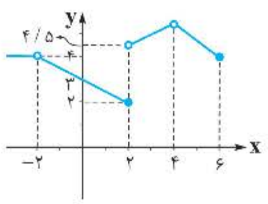
۱) $\lim_{x\to -۱}\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$ (تابع ثابت است)

۲) $\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}(-۲)^۳=-۸$ (تابع ثابت است)

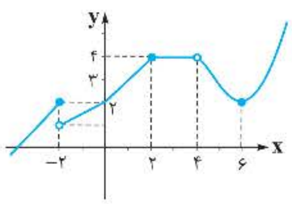
۳) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}(۲x-۱)=۲(\frac{۱}{۲})-۱=۰$ (تابع خطی)

۴) $\lim_{x\to -۲}(۵x^۲-x+۱)=۵(-۲)^۲-(-۲)+۱=۲۳$ (چندجمله‌ای)

مثال ۸: اگر نمودار توابع f و g به‌صورت زیر باشند، حاصل حدود خواسته شده را با توجه به نمودارها بیابید.



$y=f(x)$



$y=g(x)$

۱) $\lim_{x\to ۲^+}(f\times g)(x)$

۲) $\lim_{x\to -۲}(f^۴(x)-g^۲(x))$

۳) $\lim_{x\to ۰}(f(x)+g(x))$

پاسخ:

۱) $\lim_{x\to ۲^+}(f\times g)(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)\times\lim_{x\to ۲^+}g(x)=۴/۵\times ۴=۱۸$

۲) $\lim_{x\to -۲}((f(x))^۴-(g(x))^۲)=\lim_{x\to -۲}(f(x))^۴-\lim_{x\to -۲}(g(x))^۲=$ موجود نیست

۳) $\lim_{x\to ۰}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to ۰}f(x)+\lim_{x\to ۰}g(x)=۳+۲=۵$

نکته ممکن است $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ حد نداشته باشند ولی یکی از اعمال تابع حد داشته باشد.

مثال ۹: اگر $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۱\\ -۲ & x<۱\end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ x+۱ & x<۱\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۱}(f+g)(x)$ و $\lim_{x\to ۱}(f\times g)(x)$ و $\lim_{x\to ۱}(f-g)(x)$ را حساب کنید.

پاسخ: دو تابع f و g در $x=۱$ حد ندارند ولی:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+}(f+g)(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)+\lim_{x\to ۱^+}g(x)=۲-۲=۰\\ \lim_{x\to ۱^-}(f+g)(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)+\lim_{x\to ۱^-}g(x)=-۲+۲=۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(f+g)(x)=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+}(f\times g)(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)\times\lim_{x\to ۱^+}g(x)=۲\times(-۲)=-۴\\ \lim_{x\to ۱^-}(f\times g)(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)\times\lim_{x\to ۱^-}g(x)=-۲\times ۲=-۴\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(f\times g)(x)=-۴$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+}(f-g)(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)-\lim_{x\to ۱^+}g(x)=۲-(-۲)=۴\\ \lim_{x\to ۱^-}(f-g)(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)-\lim_{x\to ۱^-}g(x)=-۲-۲=-۴\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}(f-g)(x)=\text{موجود نیست}$$

نکته اگر تابع f در a حد داشته باشد و g در a حد نداشته باشد آن‌گاه $f+g$ و $f-g$ و $\frac{g}{f}$ در a حد ندارند و دو تابع $g\times f$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند.

مثال ۱۰: اگر $f(x)=x^۳+۴x$ و $g(x)=\begin{cases}x+۳ & x<۲\\ x^۲ & x\geq ۲\end{cases}$ باشد، حدود توابع $f\pm g, f\times g, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$ را در $x=۲$ بررسی کنید.

پاسخ:

$\lim_{x\to ۲}f(x)=\lim_{x\to ۲}(x^۳+۴x)=۸+۸=۱۶$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۲^+}g(x)=\lim_{x\to ۲}(x^۲)=۴\\ \lim_{x\to ۲^-}g(x)=\lim_{x\to ۲}(x+۳)=۵\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}g(x)=\text{وجود ندارد}$$

چون f در $x=۲$ حد دارد و g در $x=۲$ حد ندارد پس $f+g$ و $f-g$ و $\frac{g}{f}$ در $x=۲$ حد ندارد و همچنین:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}(f\times g)(x)=۱۶\times ۴=۶۴\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(f\times g)(x)=۱۶\times ۵=۸۰\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}(f\times g)(x)=\text{وجود ندارد}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}(\frac{f}{g})(x)=\frac{۱۶}{۴}\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(\frac{f}{g})(x)=\frac{۱۶}{۵}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲}(\frac{f}{g})(x)=\text{وجود ندارد}$$

۶) قانون تقسیم: اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=m$ به شرط اینکه $m\neq ۰$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)}=\frac{l}{m}$$

مثال ۱۱: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{۴x^۲-x+۱}{x^۲+۱}\qquad ۲)\ \lim_{x\to -۳}\frac{\frac{۲}{۳}x+۱}{۳}$$

$$۳)\ \frac{\lim\limits_{x\to -۱}(۴x^۲-x+۱)}{\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲+۱)}=\frac{۶}{۲}=۳\qquad ۴)\ \frac{\lim\limits_{x\to -۳}(\frac{۲}{۳}x+۱)}{\lim\limits_{x\to -۳}(۳)}=\frac{-۱}{۳}$$

اگـر تابـع $f(x)=\frac{P(x)}{q(x)}$ یـک تابع گویا باشـد، به‌طوری‌که صورت و مخـرج آن چند جمله‌ای باشـند و حاصل حد آنها در نقطه‌ی $x_\circ$ برابر صفر باشـد ($\lim\limits_{x\to x_\circ} P(x)=\lim\limits_{x\to x_\circ} Q(x)=۰$)، ابتدا باید صورت و مخرج را با استفاده از اتحاد، فاکتورگیری و یا تقسیم بر $(x-x_\circ)$ طوری ساده کنیم که عاملی که صورت و مخرج را صفر می‌کند، حذف شود و در آخر حد بگیریم.

مثال ۱۲: حاصل حدود زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}\qquad ۲)\ \lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+۸}{x+۲}\qquad ۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{۲x^۲+x-۳}{۲x^۳-۲}$$

پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

$$۲)\ \lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+۸}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}(x^۲-۲x+۴)=۱۲$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{۲x^۲+x-۳}{۲x^۳-۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۲x+۳)}{۲(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+۳}{۲(x^۲+x+۱)}=\frac{۵}{۶}$$

ابتدا خارج‌قسمت تقسیم $۲x^۲+x-۳$ بر $x-۱$ را به‌دست می‌آوریم و مخرج را با فاکتور و تجزیه ساده می‌کنیم، عامل صفر شونده را حذف و سپس حد می‌گیریم.

نکته اگر در حدهای $\lim\limits_{x\to x_۰}\dfrac{P(x)}{q(x)}=\dfrac{۰}{۰}$ قدرمطلق وجود داشت، ابتدا عبارت قدرمطلق‌دار را تعیین علامت می‌کنیم سپس حد می‌گیریم در صورت نیاز هم حد چپ و راست حساب می‌کنیم.

مثال ۱۳: حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}$　　۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{|x-x^۲|}{x^۳-۱}$　　۳) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{|۴-x|}{x^۲-۱۶}$

پاسخ:

۱. تابع $۳x-۱$ در همسایگی $x=۰$ منفی است و تابع $۳x+۱$ در همسایگی $x=۰$ مثبت است پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-۳x-۳x-۱}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۶x}{x}=-۶$$

۲. عبارت $x-x^۲$ را تعیین علامت می‌کنیم:

		۰		۱	
$x-x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

در همسایگی راست $x=۱$ عبارت $x-x^۲$ منفی است، پس:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-x^۲|}{x^۳-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{x^۳-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x}{x^۲+x+۱}=\frac{۱}{۳}$$

۳. برای $|۴-x|$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to ۴^+}\frac{|۴-x|}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{(x-۴)(x+۴)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{x+۴}=\frac{۱}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{|۴-x|}{x^۲-۱۶}=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)}{(x-۴)(x+۴)}=\lim_{x\to ۴}\frac{-۱}{x+۴}=-\frac{۱}{۸}$$

پس $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{|۴-x|}{x^۲-۱۶}$ وجود ندارد.

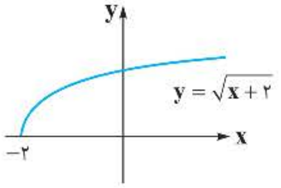
۷) حد ریشه: اگر $\lim\limits_{x\to x_۰}(ax+b)=L>۰$ باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to x_۰}\sqrt{ax+b}=\sqrt{L}$$

مثال ۱۴: ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x+۲}\ (x\neq ۱)$ را رسم کنید و سپس حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x+۲}$　　۲) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+}\sqrt{x+۲}$　　۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۲}$　　۴) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-}\sqrt{x+۲}$

پاسخ: ابتدا نمودار $y=\sqrt{x+۲}\ (x\neq ۱)$ را رسم می‌کنیم.



۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x+۲}=\sqrt{۳}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۲}=\sqrt{۵}$

۳) $\lim\limits_{x\to (-۲)^+}\sqrt{x+۲}=۰$

۴) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-}\sqrt{x+۲}=$ وجود ندارد　　(در همسایگی چپ نقطه $x=-۲$ نمودار وجود ندارد.)

مثال ۱۵: اگر $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=۳$ باشد، حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۵}(\sqrt{f(x)}-\sqrt{۲g(x)+۳})$

۲) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{۱+\sqrt{f(x)}}{۳-\sqrt{g(x)+۱}}$

پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to ۵}(\sqrt{f(x)}-\sqrt{۲g(x)+۳})=\sqrt{۴}-\sqrt{۲\times ۳+۳}=۲-۳=-۱$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۵}\frac{۱+\sqrt{f(x)}}{۳-\sqrt{g(x)+۱}}=\frac{۱+۲}{۳-۲}=۳$$

نکته اگر در حدهای $\frac{۰}{۰}$ عبارتی رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ داشتیم، می‌توانیم به کمک اتحاد مزدوج رفع ابهام کنیم.

مثال ۱۶: حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۴x}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳x+۱}-۱}{x}$

۱)

$$\lim_{x\to ۴}\frac{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}{x(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{x(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{x(\sqrt{x}+۲)}=\frac{۱}{۴(۲+۲)}=\frac{۱}{۱۶}$$

۲)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(\sqrt{۳x+۱}-۱)(\sqrt{۳x+۱}+۱)}{x(\sqrt{۳x+۱}+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+۱-۱}{x(\sqrt{۳x+۱}+۱)}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x}{x(\sqrt{۳x+۱}+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳}{\sqrt{۳x+۱}+۱}=\frac{۳}{۲}$$

۸) حد تابع: $f(x)=[ax+b]$ به ازای $x_۰$ ای که مقدار داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند، وجود ندارد ولی به ازای $x_۰$ ای که مقدار داخل جزء صحیح را ناصحیح کند، حد دارد.

مثال ۱۷: حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲/۵^+}[x]$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\left[۲x+\frac{۱}{۳}\right]$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\left[۲x+\frac{۱}{۳}\right]$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱}\left[۲x+\frac{۱}{۳}\right]$

۶) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]$

پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲/۵^+}[x]=۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\left[۲x+\frac{۱}{۳}\right]=۲$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\left[۲x+\frac{۱}{۳}\right]=۲$

۵) $\lim\limits_{x\to ۱}\left[۲x+\frac{۱}{۳}\right]=۲$

۶) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]=$ موجود نیست

مثال ۱۸: به ازای کدام مقدار k تابع $f(x)=[x+۱]-۲k[۲x]+۳$ در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است؟

پاسخ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+}([x+۱]-۲k[۲x]+۳)=۴-۱۲k+۳=۷-۱۲k\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}([x+۱]-۲k[۲x]+۳)=۳-۲k(۵)+۳=-۱۰k+۶\end{cases}\Rightarrow -۱۲k+۷=-۱۰k+۶\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}$$

۹) در توابع چند ضابطه‌ای بدون استفاده از نمودار اگر بخواهیم حد راست تابع را در نقطهٔ $x=x_۰$ به‌دست آوریم، باید از ضابطه‌ای که $x>x_۰$ است استفاده کنیم و اگر بخواهیم، حد چپ را در نقطه‌ی $x=x_۰$ به‌دست آوریم، باید از ضابطه‌ای که $x<x_۰$ است استفاده کنیم.

مثال ۱۹: اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۱} & x\geq ۲\\ -۱ & x<۲\end{cases}$ باشد حاصل عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)$ را بیابید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)-\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(\sqrt{x+۱})-\lim_{x\to ۲^-}(-۱)=\sqrt{۳}+۱$$

حدهای مثلثاتی

برای محاسبه‌ی حدود مثلثاتی ساده هم‌چون $\sin x$ و $\cos x$ از مقدار تابع در آن نقطه استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha \qquad , \qquad \lim_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$$

مثال ۲۰: با استفاده از نمودار حاصل حدود زیر را نشان دهید.

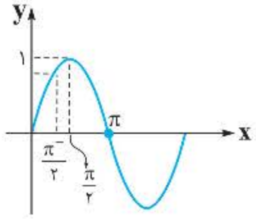
۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\sin x$

۲) $\lim\limits_{x\to \pi^-}\cos x$

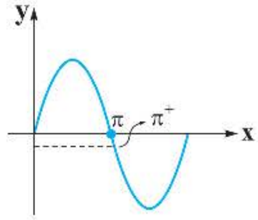
۳) $\lim\limits_{x\to \pi^+}(۲-\sin x)$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\sqrt{۱-\sin x}$

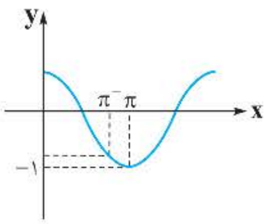
پاسخ:



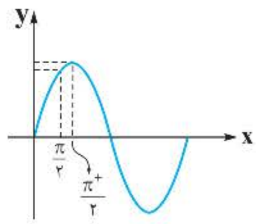
۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\sin x=۱$



۲) $\lim\limits_{x\to \pi^+}(۲-\sin x)=۲-۰=۲$



۳) $\lim\limits_{x\to \pi^-}\cos x=-۱$



۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\sqrt{۱-\sin x}=\sqrt{۱-۱}=۰$