

به نام خدای خوبی‌ها



مجموعه کتاب‌های کار علوی



مؤلفان: هاله ایمانی - حمید جیریانی شراهی



اینکه ما می‌توانیم به فرزندان این مرزوبوم خدمت کنیم نعمتی است که خداوند به ما هدیه کرده

... و

از دست و زبان که برآید      کزعهده شکرش به درآید

مدارس برتر و مراکز استعداد های درخشان در ارائه خدمات آموزشی و علمی، روندی فکر شده و هدفمند دارند و از همین رو مسیر موفقیت از کلاس های درسی این مدارس می‌گذرد. از آن جا که دانش آموزان نخبه و قوی تر علمی، نیازمند توجه خاص و تأمین خوراک آموزشی در سطوح بالاتر هستند، عقل سلیم حکم می‌کند این گروه از دانش آموزان در این مراکز برتر آموزشی تحصیل کنند. گروهی دیگر از دانش آموزان نیز هستند که از نظر سطح علمی و آموزشی در حد متوسط قرار دارند و الگوی برنامه ریزی برای ایشان با گروه تیزهوش متفاوت است.

و اما شما در هر گروهی هستید از محتوای علمی مکمل بی‌نیاز نیستید. و کتب کمک آموزشی معمولی‌ترین محتوای تکمیلی هستند. در کتاب حاضر نیز سعی شده همه آنچه شما برای بهتر فهمیدن دروس کتاب درسی نیاز دارید در اختیار شما قرار گیرد. به همین منظور مفاهیم کتاب درسی با روش عمیق تر همراه با نکات آموزشی مؤثر و سؤالات متعدد همراه با پاسخ ارائه شده تا ادراک، تثبیت و تسلط به خوبی و با ماندگاری طولانی تر انجام پذیرد.

در پایان از زحمات مجموعه مدیریت موسسه فرهنگی آموزشی علوی و نیز واحد انتشارات صمیمانه سیاست‌گذاریم.

# فهرست

فصل ۳  
استدلال و اثبات  
در هندسه  
۶۸

فصل ۲  
عددهای حقیقی  
۴۰

فصل ۱  
مجموعه‌ها  
۵

فصل ۶  
خط و معادله‌های  
خطی  
۱۵۳

فصل ۵  
عبارت‌های جبری  
۱۲۲

فصل ۴  
توان و ریشه  
۹۳

فصل ۸  
حجم و مساحت  
۲۰۸

فصل ۷  
عبارت‌های گویا  
۱۷۹

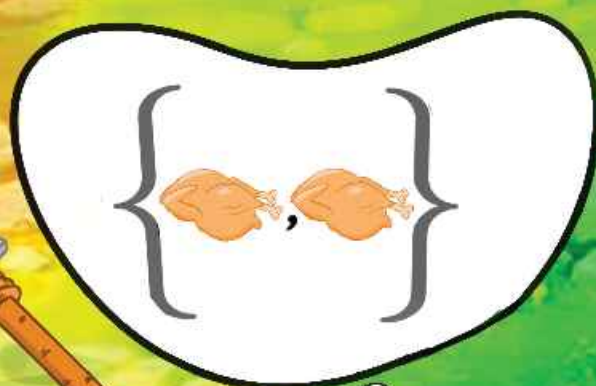
آزمون جامع  
۲۳۸



## فصل اول

### مجموعه‌ها

- ★ معرفی مجموعه
- ★ مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها
- ★ اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها
- ★ مجموعه‌ها و احتمال





### تشکیل مجموعه

در ریاضی برای نشان دادن دسته‌ای از اشیاء مشخص و متمایز از «مجموعه» استفاده می‌کنیم. اشیاء مدنظر را در بین یک جفت آکولاد ({} ) قرار داده و از یک حرف بزرگ انگلیسی برای نام‌گذاری آن استفاده می‌کنیم.

### مثال

- مجموعه‌های زیر را تشکیل دهید.
- A - ماه‌های زمستان ۱
  - B - شماره‌های عدد ۲۱ ۲
  - C - اعداد اول بین ۳ و ۵۰ ۳

### پاسخ

- ۱ A = {اسفند و بهمن و دی}
- ۲ B = {۱, ۳, ۷, ۲۱}
- ۳ C = {۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷}

### عضو بودن و اعضا

مجموعه مضارب یک‌رقمی و طبیعی عدد ۲ را به صورت  $A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$  نشان می‌دهیم. هر یک از اعداد ۲، ۴، ۶ و ۸ عضوهای مجموعه A هستند، بنابراین می‌توان گفت این مجموعه ۴ عضو دارد.

### نکته

نوجه داشته باشید که جابجایی اعضا تأثیری روی مجموعه ندارد. به عبارتی با جابجایی درعضوها مجموعه جدیدی ایجاد نمی‌شود. مثلاً:

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸\} = \{۴, ۶, ۲, ۸\}$$

تکرار اعضا نیز در مجموعه تغییری ایجاد نمی‌کند. مثلاً:

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸\} = \{۲, ۲, ۴, ۴, ۴, ۶, ۸\}$$

برای شمارش تعداد اعضا باید از عدم وجود عضو تکراری اطمینان حاصل کرد.

در صورتی که تعداد اعضای مجموعه زیاد باشد، می‌توان از سه نقطه برای اختصار استفاده کرد. مثلاً اگر بخواهیم مجموعه اعداد فرد بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را بنویسیم، به این صورت مجموعه را تشکیل می‌دهیم:

$$B = \{۱-۱, ۱۰۳, ۱۰۵, \dots, ۹۹۷, ۹۹۹\}$$

### مثال

هر یک از مجموعه‌های زیر را تشکیل داده و تعداد اعضای آن‌ها را بنویسید.

- ۱ مجموعه اعداد صحیح بین -۷ و +۳ ۱
- ۲ مجموعه شماره‌های اول عدد ۲۱۰ ۲
- ۳ مجموعه اعداد دورقمی که حاصل جمع ارقامش ۱۲ باشد. ۳
- ۴ مضارب دورقمی عدد ۵ ۴
- ۵ مربع اعداد صحیح بین -۴ و +۵ ۵

پاسخ

- ۱
- ۲
- ۳
- ۴
- ۵

۹. تعداد اعضا  $\Rightarrow A = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

۴. تعداد اعضا  $\Rightarrow B = \{2, 3, 5, 7\}$

۷. تعداد اعضا  $\Rightarrow C = \{39, 48, 57, 66, 75, 84, 93\}$

تعداد اعضا  $\Rightarrow D = \{0, 15, 30, 45, \dots, 90, 95\} \Rightarrow \frac{95-10}{5} + 1 = 18$

$E = \{(-3)^2, (-2)^2, (-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2\} = \{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16\}$

۵. تعداد اعضا  $\Rightarrow E = \{0, 1, 4, 9, 16\}$

تشخیص مجموعه



عبارت‌هایی مشخص‌کننده یک مجموعه هستند که تنها یک پاسخ داشته باشند و آن پاسخ مشخص و معین باشد. مثلاً عبارتی مانند «سه شهر ایران» مشخص‌کننده یک مجموعه نیست، چرا که جواب‌های مختلفی می‌توان برای آن ارائه کرد.

مثال

در هر جفت از عبارت‌های زیر مشخص کنید کدام عبارت بیانگر یک مجموعه است و مجموعه مربوط به آن‌ها را تشکیل دهید.

- ۴ بهترین گلزن بازی‌های ملی در جهان
- ۵ سه عدد متوالی
- ۶ تنها عدد اول زوج

- ۱ شمارنده‌های عدد ۴۰
- ۲ دو عدد سه‌رقمی که جمع ارقام آن ۳ باشد.
- ۳ سه فوتبالیست مطرح جهان

پاسخ

$A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

$B = \{\text{علی دایی}\}$

$C = \{2\}$

- ۱ شمارنده‌های عدد ۴۰ ←
- ۲ بهترین گلزن بازی‌های ملی در جهان ←
- ۳ تنها عدد اول زوج ←

★ **معرفی مجموعه:** در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) از مجموعه استفاده می‌کنیم.

علامت عضویت

مجموعه مضارب کوچک‌تر از ۵۰ عدد ۷ را به صورت  $A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$  نمایش می‌دهیم. برای بیان آن که عدد ۲۵ عضو این مجموعه است، از نماد  $\in$  استفاده می‌کنیم، یعنی می‌نویسیم « $25 \in A$ » و می‌خوانیم «عدد ۲۵ عضو مجموعه A است». همچنین برای بیان آن که عدد ۲۰ در این مجموعه نیست، می‌نویسیم « $20 \notin A$ » و می‌خوانیم «عدد ۲۰ عضو مجموعه A نیست».

مثال

در هر بخش در علامت  $\in$  یا  $\notin$  قرار دهید.

$$A = \{3^2, 6, (-2)^2, \sqrt{36}, 0, 3^3, 1\}$$

۱  $6 \in A$

۲  $\sqrt{81} - \sqrt{9} \in A$

۳  $2^3 \in A$

پاسخ

$$A = \{9, 6, 9, 6, 0, 1, 1\} = \{0, 1, 6, 9\}$$

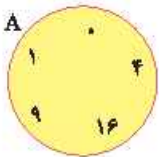
۱  $6 \in A$

۲  $9 - 3 = 6 \in A$

۳  $8 \notin A$



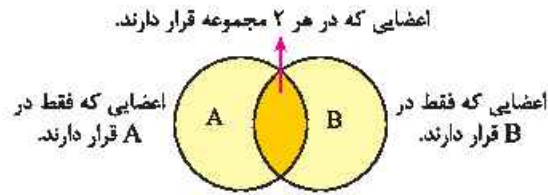
نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون، مجموعه‌ها را می‌توان به نحوه دیگری هم نمایش داد، که در آن صورت اعضای مجموعه را در داخل منحنی بسته‌ای می‌نویسیم. مثلاً:



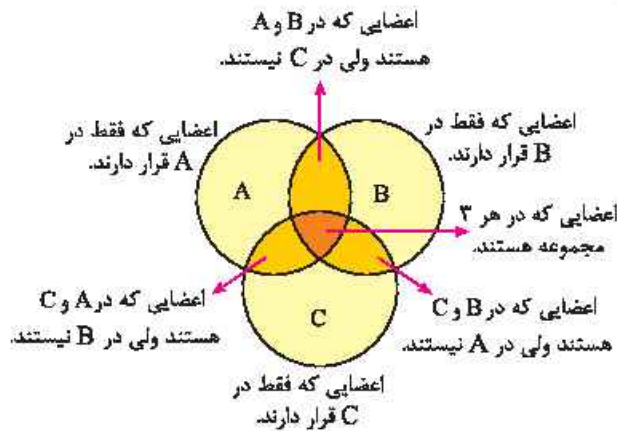
$$A = \{1, 4, 9, 16\}$$

می‌توان دو یا سه مجموعه را با هم روی نمودار ون نمایش داد:

(۱) نمودار ون مربوط به دو مجموعه



(۲) نمودار ون مربوط به سه مجموعه



**مثال**

در هر قسمت نمودار ون مربوط به مجموعه‌ها را رسم کنید.

مجموعه مکعب اعداد طبیعی کوچکتر از ۵ و مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی

۱

مجموعه اعداد صحیح بین -۳ و ۵، مجموعه اعداد زوج کوچکتر از ۸ و مجموعه اعداد اول کوچکتر از ۱۵

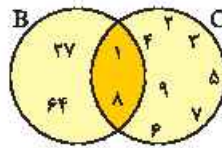
۲

**پاسخ**

۱

$$B = \{1^3, 2^3, 3^3, 4^3\} = \{1, 8, 27, 64\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

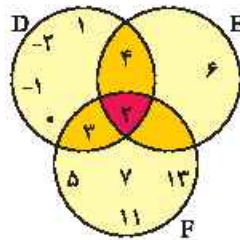


۲

$$D = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{2, 4, 6\}$$

$$F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$



★ **مجموعه تهی**: به مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه تهی می‌گویند و آن را با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش می‌دهند.

**مثلاً**: مجموعه اعداد اول دورقمی زوج را با نماد  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نشان می‌دهند، چرا که هیچ عددی با این شرایط وجود ندارد.

**تذکر**:  $\{\emptyset\}$  مجموعه تهی نیست. بلکه مجموعه‌ای با یک عضو است که  $\emptyset$  همان عضو آن است.

**مثال**

مجموعه جواب معادله زیر را بنویسید.

$$\frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{4}x - 5$$

**پاسخ**

$$\frac{1}{4}x + 2 = \frac{1}{4}x - 5 \Rightarrow 2 = -5 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \Rightarrow B = \{\}$$





# پرسش‌های طبقه‌بندی



## درس ۱

۱ درست‌ی عبارت‌های زیر را با علامت  و نادرستی آن‌ها را با علامت  مشخص کنید.

الف مجموعه  $A = \{0, 1, \emptyset, \{\}\}$  دارای چهار عضو است.

ب عبارت «پرجمعیت‌ترین شهر ایران» مشخص‌کننده یک مجموعه است.

پ مجموعه‌های  $\{1, 2, -1\}$  و  $\{1, -1, 2\}$  با هم تفاوتی ندارند.

ت حاصل عبارت « $11 - 3^2$ » عضو مجموعه اعداد اول است.

۲ جاهای خالی را با کلمات یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

الف عبارت مربوط به مجموعه {شهریور و مرداد و تیر}،  $A = \{ \dots \}$  مجموعه ..... است.

ب مجموعه مضرب‌های اول عدد  $20$ ، مجموعه ..... است.

پ مجموعه اعداد طبیعی به صورت ..... با اعضا مشخص می‌شود.

ت اگر  $A = \{0\}$  باشد، می‌توان گفت  $0 \in A$  ..... است.

۳ موارد مرتبط را به هم وصل کنید.

۱۰۰  مجموعه اعداد صحیحی که مجذورشان برابر با  $-4$  باشد.

{ }  تعداد عضوهای مجموعه  $\{0, 9, 18, 27, \dots, 90\}$

۳۰۰  تعداد عضوهای مجموعه مضارب سه رقمی عدد  $3$

۴ هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف مجموعه اعداد حسابی کوچک‌تر از  $7$

A = \_\_\_\_\_

ب مجموعه اعداد طبیعی دورقمی

B = \_\_\_\_\_

پ مجموعه حروف الفبا که دارای سه نقطه هستند.

C = \_\_\_\_\_



## مجموعه‌ها ▶ فصل اول

ت مجموعه معکوس مضارب دو رقمی عدد ۲۰

D = \_\_\_\_\_

ث مجموعه اعداد سه رقمی که حاصل جمع ارقامشان ۴ است.

E = \_\_\_\_\_

ج مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۸-

F = \_\_\_\_\_

۵ برای هر یک از مجموعه‌های داده شده، یک عبارت بنویسید.

الف  $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

ب  $B = \{12, 15, 18, 21, 24\}$

ب  $C = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}\}$

ت  $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

ث  $E = \{a, e, i, u, o\}$

۶ مجموعه‌های زیر را نوشته و تعداد اعضای آن‌ها را مشخص کنید.

الف مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۰۰

ب مجموعه مربع اعداد صحیح بین ۶- و ۴+

\_\_\_\_\_

ب مجموعه اعداد ۲ رقمی زوج بخش‌پذیر بر ۵

\_\_\_\_\_

۷ تعداد اعضای هر مجموعه را مشخص کنید.

الف  $A = \{1^{100}, 5^0, \sqrt{5}, \sqrt{25}, \frac{15}{3}\}$

\_\_\_\_\_

ب  $C = \{(-1)^{100}, (-1)^{99}, (-1)^{98}, \dots, (-1)^1, (-1)^0\}$

\_\_\_\_\_

ب  $D = \{20, 24, 28, 32, \dots, 44\}$

\_\_\_\_\_