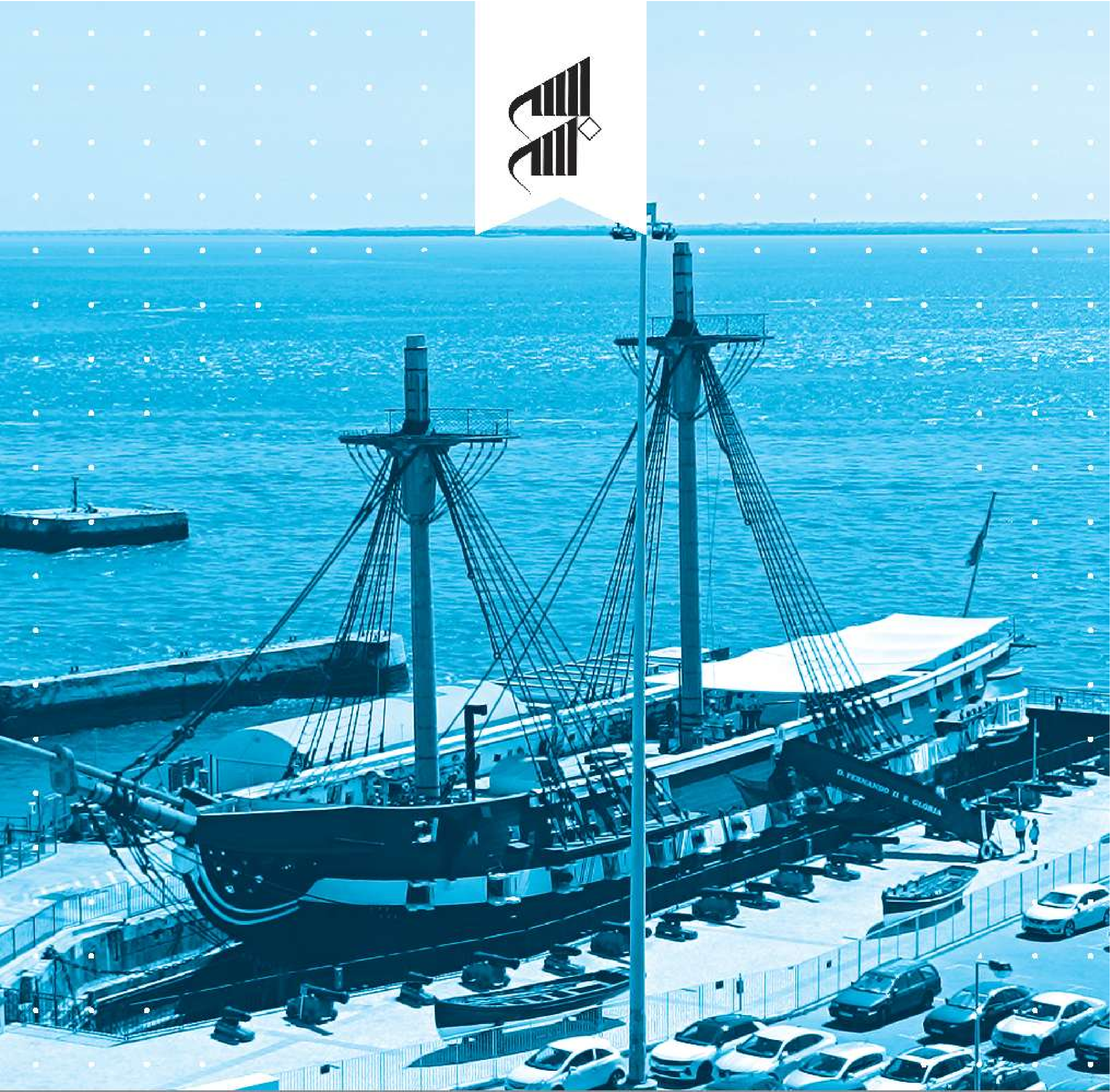


ریاضیات تجربی جامع

(دوازدهم)

مؤلف: سیروس نصیری

نام کتاب: ریاضیات تجربی جامع دوازدهم

مؤلف: سیروس نصیری

ویراستاران: رضا ماجدی - محدثه کارگرفرد - علی بهرمندپور

مدیریت پروژه و تولید: علی مجتهدین

مسئول پروژه: طناز ملک‌لی

صفحه‌آرایی: ساجده زائری - جواد محمودی

طراح جلد: هانیه فراست

ناشر: علوی فرهیخته

لیتوگرافی: آریوفام

چاپخانه و صحافی: کانون چاپ

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

شابک: ۸-۲۴-۸۵۳۶-۶۲۲-۹۷۸

علوی

سرشناسه: نصیری، سیروس، ۱۳۵۵

عنوان و نام پدیدآور: ریاضیات تجربی جامع (دوازدهم) /مؤلف: سیروس نصیری

مشخصات نشر: تهران: علوی فرهیخته

مشخصات ظاهری: ۲۹۲ ص ؛ ۲۲ ×۲۹ س م.

شابک: ۸-۲۴-۸۵۳۶-۶۲۲-۹۷۸

وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا مختصر

شماره کتابشناسه ملی: ۱۰۱۵۳۹۱۱

دفتر و فروشگاه مرکزی انتشارات علـوی فرهیخته:

ضلع شمال‌غربی پل سیدخندان ـ بین خیابان پیشداد و شقاقی ـ پلاک ۱۹

تلفن: ۵۰ ۲۵ ۸۹ ۲۲

مقدمه مؤلف

به نام خدا

خداوند متعال را شاکرم که به بنده توفیق مجدد داد تا کتاب شصت‌ونهم خودم را تألیف کنم، این کتاب مجموعه‌ای از ســؤالات کنکور رشــته‌های ریاضی، تجربی و همچنین سؤالات آزمون و کنکورهای آزمایشی مؤسسه علوی است. طبقه‌بندی سؤالات با ظرافت و دقت انجام شده است. پاسخنامه کاملاً تشریحی از ویژگی‌های بارز این کتاب است. این کتاب به‌صورت مبحثی و در پانزده فصل تنظیم شده است.

ســؤالات موجود در این کتاب اغلب متوســط و دشوار است و سؤالات ساده کمتر دیده می‌شود دلیل این امر این است که مجموعه ســؤالات مربوط به آزمون‌ها هست بنابراین با این کتاب می‌توانید به جمع‌بندی حرفه‌ای ریاضیات تجربی هم فکر کنید.

در پایان لازم می‌دانم از مســئولین محترم مؤسســه علوی تشکر ویژه داشته باشم که به بنده حقیر اعتماد کرده‌اند. همچنین از همه عزیزانی که در تألیف این کتاب بنده را یاری کردند، تشــکر کنم. لطفا اگر اشــکالی در کتاب مشاهده می‌کنید ما را مطلع کنید تا در چاپ‌های بعدی اصلاح کنیم.

سیروس نصیری

راهنمای استفاده از کتاب

مخاطب این کتاب

دانش‌آموزان پایه دوازدهم که در مسیر آمادگی برای کنکور هستند و نیاز به مروری جامع بر مفاهیم پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم دارند.

اهداف این کتاب

این کتاب با رویکردی جامع، به‌منظور تحقق اهداف زیر تألیف شده است:

- ایجاد فرصت برای تمرین و تکرار مستمر
- آشنایی کامل با الگوها و ساختار سؤالات کنکور
- تسلط بر مفاهیم کلیدی دروس اختصاصی
- تقویت مهارت تست‌زنی و مدیریت زمان در آزمون

محتوای کتاب

محتوای کتاب شامل دو بخش اصلی است:

۱) سؤالات منتخب کنکورهای سال‌های گذشته

- جهت آشنایی با تیپ و سطح دشواری سؤالات واقعی کنکور
- کمک به تحلیل دقیق نقاط قوت و ضعف دانش‌آموز

۲) سؤالات آزمون‌های مؤسسه علوی

- طراحی‌شده مطابق با استانداردهای کنکور
- هدفمند جهت افزایش تسلط و تمرکز بر مباحث مهم

پیشنهاد

نحوه استفاده پیشنهادی از کتاب:

- پس از تدریس هر فصل توســط دبیر مربوطه، مطالب را مرور کرده و سؤالات ارائه‌شده را به‌صورت مرحله‌به‌مرحله حل نمایید.
- پاســخ‌های خود را با پاسخ‌نامه مقایســه کرده و دلایل انتخاب گزینه صحیح یا اشتباه را بررسی نمایید.
- ســؤالات دشوارتر یا نکته‌دار را علامت‌گذاری کنید تا در زمان مرورهای بعدی دسترسی سریع‌تری داشته باشید.
- نکات مهم، اشتباهات رایج یا روش‌های حل جایگزین را یادداشت نمایید.
- در پایان هر فصل، مروری کلی بر ســؤالات علامت‌دار داشــته باشید و روند پیشرفت خود را ارزیابی نمایید.

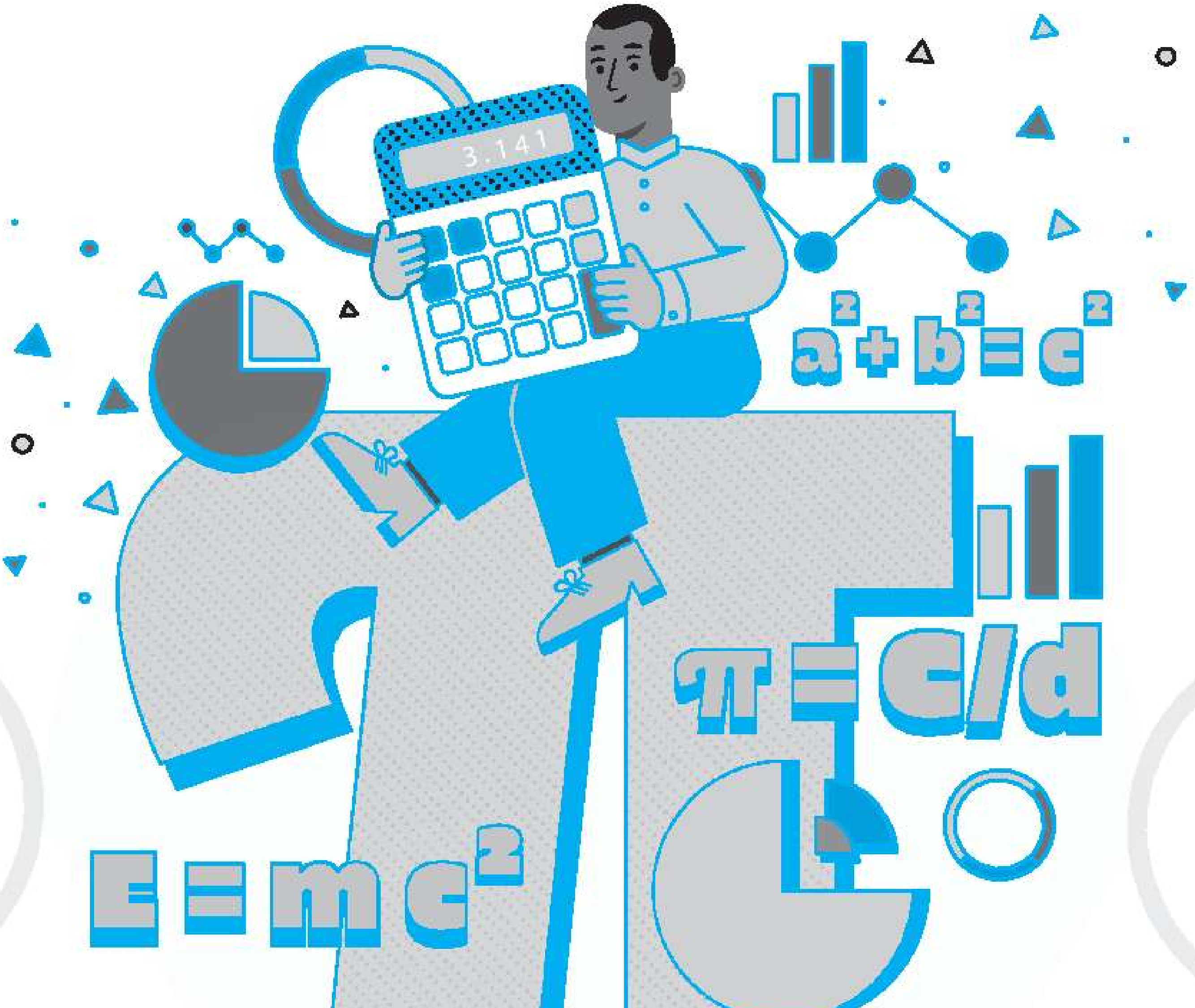
ارتباط با ما

در صورت مشاهده هرگونه اشکال، پیشنهاد یا ایراد محتوایی، می‌توانید از طریق کد QR درج‌شده با ما در ارتباط باشید.

بازخورد شما، نقش مؤثری در بهبود نسخه‌های بعدی کتاب خواهد داشت.

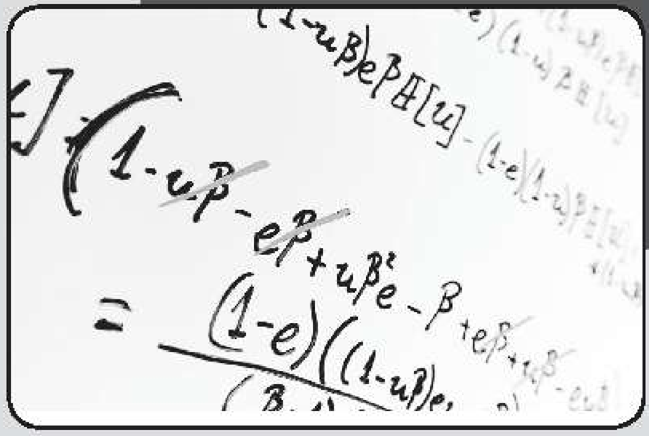
فهرست

ریاضیات تجربی



فصل اول

معادلات، نامعادلات و سهمی



حل معادله درجه دوم

۱ اگر $m>1$ باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله $x^2-m(m+1)x=-m^3$ کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) m ۲) m^2 ۳) $2m$ ۴) $2m^2$

۲ اگر $4x^2-12x+9=0$ و $(2x-2)y^2+6y+(2x+6)=0$ باشد، مقدار y کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) ۳ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۶

۳ ریشه مضاعف معادله $\frac{x^2}{m}-\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$ کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) ۱ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۴

۴ اگر دو ریشه معادله $ax^2-3x-1=0$ با هم برابر باشند، ریشه معادله کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۵ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آنگاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌مانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟ (کنکور تجربی - ۰۰)

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۸۵ ۴) ۹۱

۶ اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4-7x^2-5=0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2-3SP+2S$، کدام است؟ (کنکور ریاضی - ۰۰)

۱) $59-7\sqrt{69}$ ۲) $7+\sqrt{69}$ ۳) 50 ۴) $59+7\sqrt{69}$

روابط بین ریشه‌ها

۷ اگر α و β ریشه‌های معادله $(x-a)(x-b)+c=0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $(\alpha\beta-c)x^2+(\alpha+\beta)x+1=0$ کدام است؟ $(abc\neq 0)$ (آزمون علوی)

۱) $\frac{1}{b},\frac{1}{a}$ ۲) $-\frac{1}{a},\frac{-1}{b}$ ۳) $\frac{1}{a},-\frac{1}{b}$ ۴) $-\frac{1}{a},\frac{1}{b}$

۸ اگر $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله $m^2x^2-3mx-1=0$ باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹ اگر مجموع معکوسات ریشه‌های معادله $x^2+mx-8=0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، حاصل‌جمع دو ریشه چقدر است؟ (آزمون علوی)

۱) ۲ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۴

۱۰ درصورتی‌که $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ ریشه‌های معادله $x^2 - x = 3$ باشند، مجموع مکعبات ریشه‌های این معادله چقدر است؟ (آزمون علوی)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^4 + 12\beta$ کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) ۲۷ ۲) ۳۰ ۳) ۲۹ ۴) ۲۸

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند و $\alpha > 0 > \beta$ حاصل $\alpha^3 + \beta^3 + \beta$ کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) $33 + \frac{1}{2}\sqrt{11}$ ۲) $33 - \frac{1}{2}\sqrt{11}$ ۳) $22 + \frac{1}{2}\sqrt{13}$ ۴) $22 - \frac{1}{2}\sqrt{13}$

۱۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + m = 0$ و $2\alpha + 3\beta = 6 - m$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار منفی m کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) -4 ۲) -6 ۳) -3 ۴) -8

۱۴ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار **m** کدام است؟ (کنکور تجربی - ۹۹)

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) $-\frac{5}{2}$

۱۵ به‌ازای دو مقدار **a**، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار **a**، کدام است؟ (کنکور تجربی - ۰۱)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۶ اگر **a** و **b** اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟ (کنکور تجربی - ۰۱)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۷ ریشه‌های معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + b = 0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟ (کنکور تجربی - ۰۱)

۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

۱۸ α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار **a** چقدر است؟ (کنکور ریاضی - ۰۱)

۱) ۱ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) ۲

۱۹ معادله‌های $x^2 + 6x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟ (کنکور ریاضی - ۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۲۰ اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $[\frac{k^2}{2}]$ کدام است؟ (کنکور ریاضی - ۰۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱ برای چند مقدار صحیح **m**، هر دو ریشه حقیقی معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگ‌تر از ۳- است؟ (کنکور ریاضی - ۰۳)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۲ برای چند مقدار صحیح **m**، هر دو ریشه حقیقی معادله $-x^2 + 5x + m = 0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{2}$ است؟ (کنکور ریاضی - ۰۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $mx^2+x-n=0$ و $\alpha+3\beta=0$ ، $2\alpha+5\beta=1$ باشند، حاصل $m+n$ کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) ۲
۲) $-\frac{1}{2}$
۳) $-\frac{3}{2}$
۴) ۲

ساختن معادله

۲۴ اگر $a^2=5a+8$ و $b^2=5b+8$ باشد، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌های آن $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ باشد، کدام است؟ (آزمون علوی)

۱) $6x^2-5x+6=0$
۲) $8x^2-41x+8=0$
۳) $9x^2-8x+9=0$
۴) $8x^2+41x+8=0$

۲۵ ریشه‌های معادله $x^2+x-1=0$ برابر $2\alpha+\beta$ و $\alpha+2\beta$ است. ریشه‌های کدام معادله α^2 و β^2 خواهد بود؟ (آزمون علوی)

۱) $81x^2-207x+121=0$
۲) $81x^2+207x+121=0$
۳) $81x^2-121x-207=0$
۴) $81x^2+121x-207=0$

۲۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $ax^2-bx(x-1)+c(x-1)^2=0$ کدام است؟

(آزمون علوی)

۱) $\frac{\beta}{1-\beta},\frac{\alpha}{1-\alpha}$
۲) $\frac{1-\beta}{\beta},\frac{1-\alpha}{\alpha}$
۳) $\frac{\beta}{1+\beta},\frac{\alpha}{1+\alpha}$
۴) $\frac{1+\beta}{\beta},\frac{1+\alpha}{\alpha}$

۲۷ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x=x^2-4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^3+\frac{1}{x_2}$ و $x_2^3+\frac{1}{x_1}$ ، است؟ (کنکور تجربی - ۰۰)

۱) $4x^2=51x+221$
۲) $4x^2+51x=221$
۳) $4x^2=51x+197$
۴) $4x^2+51x=197$

۲۸ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^3},\frac{1}{(x_1+1)^3}$ ، ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (کنکور تجربی - ۰۰)

۱) $125x^2+16x=1$
۲) $125x^2=16x+1$
۳) $125x^2=12x+1$
۴) $125x^2+12x=1$

۲۹ اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^3+kx^2-9x-2=0$ ، $\alpha+\beta=1$ و $\alpha\beta=-2$ باشد، مقدار k چقدر است؟ (کنکور ریاضی - ۰۱)

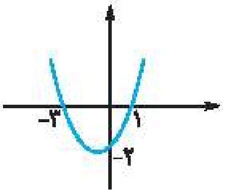
۱) $-\frac{27}{5}$
۲) $\frac{27}{5}$
۳) -3
۴) ۳

سهمی

۳۰ اگر مجموع مربعات صفرهای تابع $f(x)=mx^2-2x-1$ برابر ۶ باشد، مختصات رأس سهمی کدام است؟ $(m>0)$ (آزمون علوی)

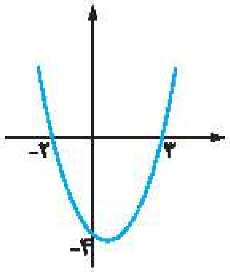
۱) $(1,-2)$
۲) $(2,1)$
۳) $(-2,1)$
۴) $(2,2)$

۳۱ با توجه به نمودار سهمی زیر، مقدار $f(-5)$ کدام است؟ (آزمون علوی)



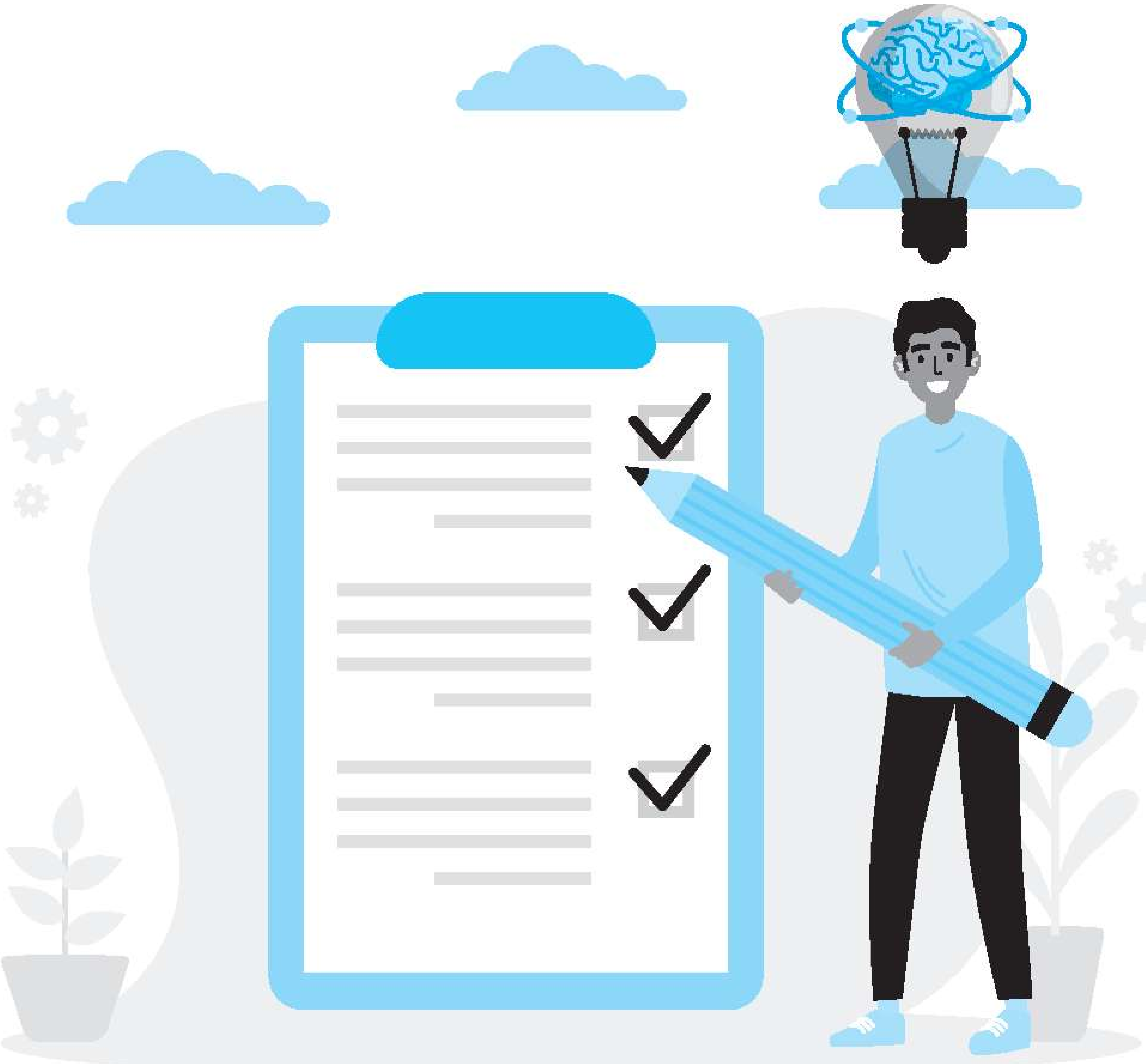
۱) ۴
۲) ۳
۳) ۶
۴) ۸

۳۲ با توجه به نمودار سهمی زیر، $f(4)$ کدام است؟ (آزمون علوی)



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

پاسخنامه تشریحی



پاسخنامه تشریحی ریاضیات تجربی

۱. گزینهٔ (۲)

برای حل معادلات درجه دوم روش‌های متعددی وجود دارد، یکی از این روش‌ها تجزیه است.

$$x^2 - m(m+1)x + m^3 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - (m^2+m)x + m^2\cdot m = 0$$

این معادله را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2+(a+b)x+ab=0$$

در این سؤال:

$$(x-m^2)(x-m)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=m^2 \\ x=m\end{cases}$$

چون $m>1$ است، ریشه بزرگ‌تر m^2 خواهد بود.

۲. گزینهٔ (۲)

$$4x^2-12x+9=0 \Rightarrow (2x-3)^2=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

مقدار x را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$(2x-3)y^2+6y+(2x+6)=0 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} y^2+6y+9=0$$
$$\Rightarrow (y+3)^2=0\Rightarrow y=-3$$

توجه: **در این سؤال از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کردیم.**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

۳. گزینهٔ (۲)

شرط اینکه معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ریشه مضاعف بدهد این است که $\Delta=0$ باشد، در این صورت $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$ خواهد بود.

$$\frac{1}{m}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-\frac{1}{2})^2-4(\frac{1}{m})(-\frac{1}{4})=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{m}=0\Rightarrow \frac{1}{m}=-\frac{1}{4}\Rightarrow m=-4$$

معادله: $-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0\xrightarrow{\times(-4)} x^2+2x+1=0$

$$\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-1$$

۴. گزینهٔ (۳)

دو ریشه معادله با هم برابرند، بنابراین ریشه مضاعف خواهیم داشت.

$$ax^2-3x-1=0$$
$$\Delta=9+4a=0\Rightarrow 4a=-9\Rightarrow a=-\frac{9}{4}$$
$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2a}=\frac{3}{2(\frac{-9}{4})}=\frac{-3\times 4}{2\times 9}=-\frac{2}{3}$$

۵. گزینهٔ (۳)

پول اکرم را x و پول علی را y در نظر می‌گیریم:

$$x+y=100\Rightarrow y=100-x$$

اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، پول علی $y-10$ و پول اکرم $x+10$ خواهد بود. اکنون حاصل‌ضرب پول‌هایشان را برابر ۴۷۵ قرار می‌دهیم:

$$(x+10)(y-10)=475\xrightarrow{y=100-x}$$
$$(x+10)(100-x-10)=475\Rightarrow (x+10)(90-x)=475$$

حال پیشنهاد می‌کنیم که گزینه‌ها را امتحان کنیم. با امتحان کردن گزینه‌ها $x=85$ در معادله صدق می‌کند.

$$x=85\Rightarrow (85+10)(90-85)=475\Rightarrow 95\times 5=475$$

۶. گزینهٔ (۴)

برای حل معادله درجه چهارم دو مجذوری به فرم $ax^4+bx^2+c=0$ کافی است از تغییر متغیر $x^2=t>0$ استفاده کنیم، در این صورت معادله به فرم $at^2+bt+c=0$ تبدیل می‌شود که مجموع ریشه‌های آن همواره برابر صفر است.

$$x^4-7x^2-5=0\xrightarrow{x^2=t} t^2-7t-5=0\Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2}$$
$$\xrightarrow{t>0} t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}\Rightarrow x^2=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\\ x_2=-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\end{cases}$$
$$P=x_1x_2=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\Rightarrow P^2=\frac{7^2+69+14\sqrt{69}}{4}=\frac{118+14\sqrt{69}}{4}$$
$$P^2=\frac{2(59+7\sqrt{69})}{4}\Rightarrow 2P^2=59+7\sqrt{69}$$
$$S=x_1+x_2=0$$
$$2P^2-3PS+2S=2P^2=59+7\sqrt{69}$$

۷. گزینهٔ (۲)

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر α و β ریشه‌های آن باشند در این صورت بدون حل معادله:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$
$$(x-a)(x-b)+c=0\Rightarrow x^2-(a+b)x+ab+c=0$$
$$\alpha+\beta=\frac{a+b}{1}=a+b\ ,\ \alpha\beta=ab+c$$

حال معادله $(\alpha\beta-c)x^2+(\alpha+\beta)x+1=0$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$abx^2+(a+b)x+1=0$$

طرفین را بر ab تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})x+\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=0\Rightarrow (x+\frac{1}{a})(x+\frac{1}{b})=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{a}\\ x_2=-\frac{1}{b}\end{cases}$$

۸. گزینهٔ (۲)

ریشه هر معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$x=2\Rightarrow 4m^2-6m-1=0 \quad (1)$$

معادله (۱) دو ریشه حقیقی دارد زیرا $\frac{c}{a}<0$ است، بنابراین: $m_1m_2=-\frac{1}{4}$

۹. گزینهٔ (۴)

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{-b}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=-2b\Rightarrow -8=-2m\Rightarrow m=4$$

مجموع دو ریشه برابر است با: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m=-4$

۱۰. گزینهٔ (۴)

ریشه‌های این معادله $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است، بنابراین:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1\ ,\ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=-3$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1\ ,\ \frac{1}{\alpha\beta}=-3\Rightarrow\alpha+\beta=\alpha\beta=-\frac{1}{3}$$

مجموع مکعبات ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha\beta)^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$=\frac{(-\frac{1}{3})^3-3(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})}{(-\frac{1}{3})^3}=\frac{-\frac{1}{27}-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{27}}=\frac{-1-9}{-1}=10$$

۱۱. گزینهٔ (۳)

چون α ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$x^2-2x-1=0\xrightarrow{x=\alpha}\alpha^2-2\alpha-1=0\Rightarrow\alpha^2=2\alpha+1$$

$$\Rightarrow\alpha^4=4\alpha^2+4\alpha+1=4(2\alpha+1)+4\alpha+1=12\alpha+5$$

$$\alpha^4+12\beta=12\alpha+12\beta+5=12S+5$$
$$=12\times2+5=24+5=29$$

۱۲. گزینهٔ (۲)

ریشه‌های معادله داده شده را حساب می‌کنیم:

$$2x^2-6x-1=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+2}}{2}$$

$$\xrightarrow{P<0<\alpha}\begin{cases}\alpha=\frac{3+\sqrt{11}}{2}\\ \beta=\frac{3-\sqrt{11}}{2}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=3\ ,\ P=\alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

$$\alpha^3+\beta^3+\beta=S^3-3PS+\beta=27+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}$$

$$=33-\frac{1}{2}\sqrt{11}$$

۱۳. گزینهٔ (۱)

بین دو ریشه رابطه‌ای داده شده است، ما هم از دو رابطه S و P استفاده می‌کنیم:

$$2\alpha+3\beta=6-m\Rightarrow2(\alpha+\beta)+\beta=6-m$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=3}6+\beta=6-m\Rightarrow\beta=-m$$

β ریشه معادله است، بنابراین در آن صدق می‌کند.

$$(-m)^2-3(-m)+m=0\Rightarrow m^2+4m=0$$

$$\Rightarrow m(m+4)=0\xrightarrow{m<0}m=-4$$

۱۴. گزینهٔ (۱)

اطلاعات مسئله را اعمال می‌کنیم:

$$\alpha+\beta=\frac{1}{\alpha\beta}\Rightarrow\frac{1-2m}{3}=\frac{3}{2-m}$$

$$\Rightarrow(1-2m)(2-m)=9\Rightarrow2-m-4m+2m^2=9$$

$$\Rightarrow2m^2-5m-7=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1\\ m=\frac{7}{2}\end{cases}$$

قرار است ریشه‌ها حقیقی باشند. $m=-1$ را امتحان می‌کنیم:

$$m=-1\Rightarrow3x^2-3x+3=0\Rightarrow\Delta<0$$

بنابراین $m=\frac{7}{2}$ درست است.

۱۵. گزینهٔ (۳)

$$\alpha=3\beta\xrightarrow{\times\beta}\alpha\beta=3\beta^2\xrightarrow{\alpha\beta=\frac{4}{3}}3\beta^2=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\beta^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\begin{cases}\beta=\frac{2}{3}\\ \beta=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

β یکی از ریشه‌های معادله است و در معادله صدق می‌کند.

$$\beta=\frac{2}{3}\Rightarrow3\times\frac{4}{9}-\frac{2}{3}a+4=0$$

$$\xrightarrow{\times3}4-2a+12=0\Rightarrow a=8$$

$$\beta=-\frac{2}{3}\Rightarrow3\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}a+4=0$$

$$\xrightarrow{\times3}4+2a+12=0\Rightarrow a=-8$$

اختلاف مقادیر مختلف a برابر ۱۶ است.

۱۶. گزینهٔ (۲)

a و b ریشه‌های معادله است، پس:

$$\begin{cases}S=a+b=a^2+b^2-12\\ P=ab=a+b-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S=S^2-2P-12\\ P=S-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=S^2-2(S-1)-12\Rightarrow S^2-3S-10=0$$

$$\Rightarrow(S-5)(S+2)=0\xrightarrow{S>0}S=5$$

۱۷. گزینهٔ (۲)

ریشه‌های معادله $x^2-(a+1)x+a=0$ دو عدد فرد طبیعی است، بنابراین تفاضل ریشه‌ها برابر ۲ است.

$$|\alpha-\beta|=2\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{1}=2\Rightarrow\Delta=4\Rightarrow a^2+2a+1-4a=4$$

$$\Rightarrow a^2-2a-3=0\Rightarrow(a+1)(a-3)=0\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\a=3\end{cases}$$

$a=-1$ قابل قبول نیست، زیرا در این صورت ریشه‌ها طبیعی نخواهد بود.

$a=3$ قابل قبول است.

$$a=3\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=1,3$$

اکنون معادله بعد:

$$x^2-(3a+1)x+b=0\xrightarrow{a=3}x^2-10x+b=0$$

این معادله دو ریشه زوج متوالی دارد.

$$|x_1-x_2|=2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=2\Rightarrow\Delta=4$$

$$\Rightarrow100-4b=4\Rightarrow25-b=1$$

$$\Rightarrow b=24\Rightarrow x^2-10x+24=0\Rightarrow x=4,6$$

اختلاف حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1x_2-\alpha\beta=24-3=21$$

۱۸. گزینهٔ (۱)

در معادله داده شده ریشه کوچک‌تر و S و P را لازم داریم.

$$\alpha=\frac{-3-\sqrt{9-a}}{1}=-3-\sqrt{9-a}$$

$$S=\alpha+\beta=-6\ ,\ P=\alpha\beta=a$$

$$3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85\Rightarrow\alpha^2+2(\alpha^2+\beta^2)=12\sqrt{2}+85$$

$$(-3-\sqrt{9-a})^2+2(36-2a)=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow9+6\sqrt{9-a}+9-a+72-4a=12\sqrt{2}+85$$

$$\Rightarrow6\sqrt{9-a}+90-5a=12\sqrt{2}+85\Rightarrow a=1$$

۱۹. گزینهٔ (۳)

ریشه‌های معادله $x^2+6x+m=0$ را α و β در نظر می‌گیریم و ریشه‌های معادله $x^2+2x-3m=0$ را α و θ فرض می‌کنیم، بنابراین:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-6\\\alpha+\theta=-2\end{cases}\xrightarrow{-}\theta-\beta=4$$

۲۰. گزینهٔ (۴)

$$|\alpha-\beta|=\frac{4}{3}k\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{4}{3}k\Rightarrow\frac{\sqrt{4k^2-20}}{1}=\frac{4k}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}}4k^2-20=\frac{16}{9}k^2\Rightarrow(4-\frac{16}{9})k^2=20$$

$$\Rightarrow\frac{20}{9}k^2=20\Rightarrow k^2=9\Rightarrow\frac{k^2}{2}=4.5\Rightarrow[\frac{k^2}{2}]=4$$

۲۱. گزینهٔ (۲)

اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases}\alpha>-3\\\beta>-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+3>0\\\beta+3>0\end{cases}\Rightarrow(\alpha+3)(\beta+3)>0$$

$$\Rightarrow\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9>0\Rightarrow\frac{m}{2}+3(-\frac{7}{2})+9>0$$

$$\Rightarrow\frac{m}{2}>\frac{21}{2}-\frac{18}{2}\Rightarrow\frac{m}{2}>\frac{3}{2}\Rightarrow m>3\quad(1)$$

اما باید ریشه‌ها حقیقی باشند، پس:

$$\Delta>0\Rightarrow49-8m>0\Rightarrow m<\frac{49}{8}\quad(2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با $(3,\frac{49}{8})$ که اعداد صحیح این بازه $\{4,5,6\}$ خواهد بود.

۲۲. گزینهٔ (۳)

ریشه‌های معادله $-x^2+5x+m=0$ را α و β فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases}\alpha<\frac{9}{2}\\\beta<\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\frac{9}{2}<0\\\beta-\frac{9}{2}<0\end{cases}\Rightarrow(\alpha-\frac{9}{2})(\beta-\frac{9}{2})>0$$

$$\Rightarrow\alpha\beta-\frac{9}{2}(\alpha+\beta)+\frac{81}{4}>0$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=5]{\alpha\beta=-m}-m-\frac{9}{2}\times5+\frac{81}{4}>0$$

$$\Rightarrow m<\frac{81}{4}-\frac{45}{2}\Rightarrow m<\frac{-9}{4}\Rightarrow m<-2.25\quad(1)$$

ریشه‌ها باید حقیقی باشد:

$$\Delta>0\Rightarrow25+4m>0\Rightarrow m>\frac{-25}{4}\Rightarrow m>-6.25\quad(2)$$

اشتراک رابطه‌های (۱) و (۲) برابر است با:

$$-6.25<m<-2.25\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-6,-5,-4,-3\}$$

بنابراین برای m چهار مقدار صحیح یافت می‌شود.

۲۳. گزینهٔ (۴)

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=0\Rightarrow\alpha=-3\beta\\2\alpha+5\beta=1\end{cases}\Rightarrow2(-3\beta)+5\beta=1$$

$$\Rightarrow\beta=-1,\alpha=+3$$

اکنون S و P معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$S=3-1=\frac{-1}{m}\Rightarrow\frac{-1}{m}=2\Rightarrow m=-\frac{1}{2}$$

$$P=3\times(-1)=\frac{-n}{m}\Rightarrow\frac{-n}{-\frac{1}{2}}=-3\Rightarrow2n=-3\Rightarrow n=-\frac{3}{2}$$

$$m+n=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$$

۲۴. گزینهٔ (۴)

از دو رابطه $\begin{cases} a^۲=۵a+۸\\ b^۲=۵b+۸\end{cases}$ متوجه می‌شویم که اعداد a و b ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲=۵x+۸$ هستند، پس:

$$x^۲-۵x-۸=۰\Rightarrow \begin{cases}a+b=۵=S\\ ab=-۸=P\end{cases}$$

اکنون برای ساختن معادله جدید S و P آن را حساب می‌کنیم:

$$S_{New}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^۲+b^۲}{ab}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{۲۵+۱۶}{-۸}=-\frac{۴۱}{۸}$$

$$P_{New}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=۱$$

معادله جدید را می‌نویسیم:

$$x^۲+\frac{۴۱}{۸}x+۱=۰\xrightarrow{\times ۸}۸x^۲+۴۱x+۸=۰$$

۲۵. گزینهٔ (۱)

ریشه‌های معادله $x^۲+x-۱=۰$ برابر $۲\alpha+\beta$ و $۲\beta+\alpha$ است، بنابراین:

$$۲\alpha+\beta+۲\beta+\alpha=-۱\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{۱}{۳}$$

$$(۲\alpha+\beta)(۲\beta+\alpha)=-۱\Rightarrow ۴\alpha\beta+۲\alpha^۲+۲\beta^۲+\alpha\beta=-۱$$

$$\Rightarrow ۵\alpha\beta+۲((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)=-۱\Rightarrow \alpha\beta+۲(\alpha+\beta)^۲=-۱$$

$$\Rightarrow \alpha\beta+۲(-\frac{۱}{۳})^۲=-۱\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{۱۱}{۹}$$

اکنون معادله‌ای می‌سازیم که ریشه‌های آن $\alpha^۲$ و $\beta^۲$ باشد.

$$S_{New}=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=\frac{۱}{۹}+\frac{۲۲}{۹}=\frac{۲۳}{۹}$$

$$P_{New}=\alpha^۲\beta^۲=\frac{۱۲۱}{۸۱}$$

معادله جدید: $x^۲-\frac{۲۳}{۹}x+\frac{۱۲۱}{۸۱}=۰$

$$\xrightarrow{\times ۸۱}۸۱x^۲-۲۰۷x+۱۲۱=۰$$

۲۶. گزینهٔ (۳)

چون α و β ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ هستند، پس:

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

معادله داده شده را مرتب می‌کنیم:

$$ax^۲-bx^۲+bx+c(x^۲-۲x+۱)=۰$$

$$(a-b+c)x^۲+(b-۲c)x+c=۰$$

S و P این معادله را به S و P معادله اصلی تبدیل می‌کنیم:

$$S_{New}=\frac{۲c-b}{a-b+c}=\frac{۲\frac{c}{a}-\frac{b}{a}}{۱-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}$$

$$=\frac{۲\alpha\beta+\alpha+\beta}{۱+\alpha+\beta+\alpha\beta}=\frac{\alpha}{\alpha+۱}+\frac{\beta}{\beta+۱}$$

$$P_{New}=\frac{c}{a-b+c}=\frac{\frac{c}{a}}{۱-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{\alpha\beta}{۱+\alpha+\beta+\alpha\beta}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+۱}\times\frac{\beta}{\beta+۱}$$

بنابراین ریشه‌های این معادله $\frac{\alpha}{\alpha+۱}$ و $\frac{\beta}{\beta+۱}$ است.

۲۷. گزینهٔ (۱)

در این معادله $S=۱$ و $P=-۴$ است. S و P معادله جدید را می‌سازیم:

$$S_{New}=x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲}+x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}=S^۳-۳PS+\frac{S}{P}$$

$$=۱+۱۲-\frac{۱}{۴}=\frac{۵۱}{۴}$$

$$P_{New}=(x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲})(x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱})$$

$$=(x_۱x_۲)^۳+(x_۱^۲+x_۲^۲)+\frac{۱}{x_۱x_۲}$$

$$P_{New}=P^۳+S^۲-۲P+\frac{۱}{P}=-۶۴+۱+۸-\frac{۱}{۴}=-\frac{۲۲۱}{۴}$$

معادله جدید: $x^۲-\frac{۵۱}{۴}x-\frac{۲۲۱}{۴}=۰\xrightarrow{\times ۴}۴x^۲-۵۱x-۲۲۱=۰$

۲۸. گزینهٔ (۱)

چون $x_۱$ ریشه معادله است، پس:

$$x_۱=۵-x_۱^۲\Rightarrow x_۱(۱+x_۱)=۵\Rightarrow\frac{۱}{x_۱+۱}=\frac{x_۱}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{(x_۱+۱)^۳}=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}$$

به همین ترتیب $\frac{۱}{(x_۲+۱)^۳}=\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}$ خواهد بود.

اکنون S و P جدید را می‌سازیم:

$$S_{New}=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}+\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=\frac{۱}{۱۲۵}(S^۳-۳PS)=-\frac{۱۶}{۱۲۵}$$

$$P_{New}=\frac{x_۱^۳}{۱۲۵}\times\frac{x_۲^۳}{۱۲۵}=-\frac{۱}{۱۲۵}$$

معادله جدید: $x^۲+\frac{۱۶}{۱۲۵}x-\frac{۱}{۱۲۵}=۰$

$$\xrightarrow{\times ۱۲۵}۱۲۵x^۲+۱۶x-۱=۰$$

۲۹. گزینهٔ (۳)

معادله‌ای که ریشه‌های آن α، β و رابطه‌های $\begin{cases}\alpha\beta=-۲\\ \alpha+\beta=۱\end{cases}$ برقرار باشند $x^۲-x-۲=۰$ است که ریشه‌های آن $\alpha=۲$ و $\beta=-۱$ است. یکی از این ریشه‌ها را در معادله درجه سوم صدق می‌دهیم:

$$۴x^۳+kx^۲-۹x-۲=۰\xrightarrow{x=\alpha=-۱}-۴+k+۹-۲=۰$$

$$\Rightarrow k=-۳$$