



گسسته + آمار و احتمال جامع

(دوازدهم)



مؤلفان: سیروس نصیری - مجید فرهمندپور

۹۹

نام کتاب: گسسته + آمار و احتمال جامع (دوازدهم)

مؤلفان: سیروس نصیری - مجید فرهمندپور

ویراستاران: علی غلامی - امیر محمدپور

مدیریت پروژه و تولید: علی مجتهدین

مسئول پروژه: طناز ملک‌لی

صفحه‌آرایی: مرجان بختیاری - ساجده زائری

طراح جلد: هانیه فراست

ناشر: علوی فرهیخته

لیتوگرافی: آریوفام

چاپخانه و صحافی: کانون چاپ

شمارگان: ۱۰۰۰ جلد

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۸۵۳۶-۲۰-۰

۶۶

علوی

برای مشاهده قیمت
رمزینه را اسکن کنید
یا به سایت علوی
مراجعه کنید.



سرشناسه: نصیری، سیروس، ۱۳۵۵

عنوان و نام پدیدآور: گسسته + آمار و احتمال جامع (دوازدهم)/مؤلفان: سیروس نصیری،

مجید فرهمندپور

مشخصات نشر: تهران: علوی فرهیخته

مشخصات ظاهری: ۱۲۴ص؛ ۲۲×۲۹ س.م.

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۸۵۳۶-۲۰-۰

وضعیت فهرست‌نویسی: فیفا مختصر

شناسه افزوده: فرهمندپور، مجید، ۱۳۵۷

شماره کتابشناسه ملی: ۱۰۰۹۳۲۵۴

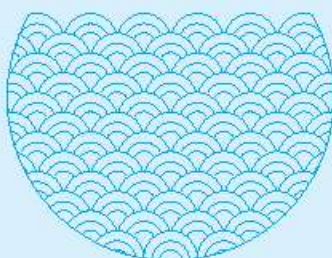
دفتر و فروشگاه مرکزی انتشارات علوی فرهیخته:

تلفن: ۲۲ ۸۹ ۲۵ ۵۰

ضلع شمال غربی پل سیدخندان - بین خیابان پیشداد و شقایق - پلاک ۱۹

کلیه حقوق این اثر متعلق به انتشارات علوی (فرهیخته) است و هرگونه نسخه‌برداری و برداشت به هر صورت و شیوه به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از ناشران قابل پیگرد است.

مقدمه مؤلف



به نام خدا

با افتخار و اشتیاق این اثر را به دست خوانندگان گرامی می‌سپاریم. کتاب حاضر مجموعه‌ای از سؤالات آزمون‌های انتشارات علوی، کنکورهای داخل و خارج کشور، شامل دروس گسسته، آمار و احتمال و همچنین فصل‌های ششم و هفتم ریاضی دهم است. تمامی سوالات با دقت فراوان گزینش شده‌اند و پاسخ‌های آن‌ها با جزئیات کامل و جامع ارائه شده‌اند تا شما را در مسیر یادگیری و موفقیت یاری دهند.

این کتاب حاصل سال‌ها تجربه و تلاش بی‌وقفه است و در نگارش آن نهایت دقت به جزئیات به کار گرفته شده تا دانش‌آموزان و داوطلبان گرامی بتوانند از بهترین منابع برای آمادگی آزمون‌های خود بهره ببرند.

در این مسیر از تمامی عزیزانی که با تلاش، همفکری و حمایت خود نقش مهمی در گردآوری، تدوین و انتشار این اثر داشته‌اند صمیمانه سپاس‌گزاری می‌کنم. امیدوارم این کتاب بتواند سهمی در موفقیت شما داشته باشد و راهگشای رسیدن به اهداف علمی و آموزشی‌تان باشد.

با آرزوی موفقیت برای همه دانش‌آموزان و داوطلبان عزیز

سیروس نصیری - مجید فرهنگدور



راهنمای استفاده از کتاب



دانش‌آموزان پایه دوازدهم که در مسیر آمادگی برای کنکور هستند و نیاز به مروری جامع بر مفاهیم پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم دارند.

مخاطب این کتاب



این کتاب با رویکردی جامع، به منظور تحقق اهداف زیر تألیف شده است:

- ایجاد فرصت برای تمرین و تکرار مستمر
- آشنایی کامل با الگوها و ساختار سؤالات کنکور
- تسلط بر مفاهیم کلیدی دروس اختصاصی
- تقویت مهارت تست‌زنی و مدیریت زمان در آزمون

اهداف این کتاب



محتوای کتاب شامل دو بخش اصلی است:

(۱) سؤالات منتخب کنکورهای سال‌های گذشته

• جهت آشنایی با تیپ و سطح دشواری سؤالات واقعی کنکور

• کمک به تحلیل دقیق نقاط قوت و ضعف دانش‌آموز

(۲) سؤالات آزمون‌های مؤسسه علوی

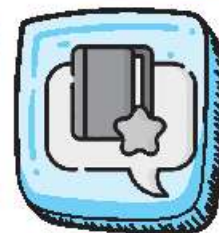
• طراحی‌شده مطابق با استانداردهای کنکور

• هدفمند جهت افزایش تسلط و تمرکز بر مباحث مهم

محتوای کتاب



پیشنهاد



نحوه استفاده پیشنهادی از کتاب:

- پس از تدریس هر فصل توسط دبیر مربوطه، مطالب را مرور کرده و سؤالات ارائه شده را به صورت مرحله به مرحله حل نمایید.
- پاسخ‌های خود را با پاسخ‌نامه مقایسه کرده و دلایل انتخاب گزینه صحیح یا اشتباه را بررسی نمایید.
- سؤالات دشوارتر یا نکته‌دار را علامت‌گذاری کنید تا در زمان مرورهای بعدی دسترسی سریع‌تری داشته باشید.
- نکات مهم، اشتباهات رایج یا روش‌های حل جایگزین را یادداشت نمایید.
- در پایان هر فصل، مروری کلی بر سؤالات علامت‌دار داشته باشید و روند پیشرفت خود را ارزیابی نمایید.

ارتباط با ما



در صورت مشاهده هرگونه اشکال، پیشنهاد یا ایراد محتوایی، می‌توانید از طریق کد QR درج شده با ما در ارتباط باشید.



بازخورد شما، نقش مؤثری در بهبود نسخه‌های بعدی کتاب خواهد داشت.

فهرست

		گسسته
۸	نظریه اعداد	فصل اول
۱۹	گراف	فصل دوم
۲۷	ترکیبات	فصل سوم
		آمار و احتمال
۳۷	آشنایی با منطق ریاضی	فصل چهارم
۴۱	احتمال	فصل پنجم
۵۱	آمار	فصل ششم
۵۶	پاسخنامه تشریحی	

ریاضیات گسسته



فصل اول

نظریه اعداد



استدلال ریاضی



۱ کدام عدد کلیت حکم «به ازای هر عدد طبیعی n ، $n + 1$ یک عدد اول است.» را نقض می‌کند؟ (آزمون علوی)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۲ برای گزاره «اگر برای هر سه مجموعه A و B و C داشته باشیم $A \cup C = A \cup B$ ، آنگاه $B = C$ » از استفاده می‌کنیم. (آزمون علوی)

۱ اثبات، به روش اثبات به کمک همه حالات
۲ اثبات، استدلال استنتاجی
۳ رد، مثال نقض
۴ رد، برهان خلف

۳ جاهای خالی با قرار دادن کدام گزینه به درستی تکمیل می‌شود؟ (آزمون علوی)

«برای گزاره «مجموع ۴ عدد طبیعی متوالی بر ۴ بخش پذیر است.» از استفاده می‌کنیم.»

۱ اثبات درستی، اثبات مستقیم
۲ اثبات درستی، اثبات بازگشتی
۳ اثبات نادرستی، برهان خلف
۴ اثبات نادرستی، مثال نقض

۴ کدام عدد کلیت حکم «هر عدد اول به صورت $4k + 3$ است.» را نقض می‌کند؟ (آزمون علوی)

۱ (۱) ۱۱ (۲) ۹۱ (۳) ۴۳ (۴) ۵۳

۵ چند مورد از اعداد $\{۷۱, ۹۷, ۱۰۱\}$ کلیت حکم «برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 + n + ۹۷$ عددی اول است.» را نقض می‌کند؟ (آزمون علوی)

۱ صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶ کدام گزینه، کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مربعات سه عدد فرد نوشت.» را نقض می‌کند؟ (آزمون علوی)

۱ (۱) ۴۵۱ (۲) ۸۰۳ (۳) ۶۴۳ (۴) ۲۷۷

۷ اگر عدد n حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی باشد، کدام یک از اعداد زیر حتماً مربع کامل است؟ (آزمون علوی)

۱ (۱) $4n + 1$ (۲) $n + 1$ (۳) $4n + 2$ (۴) $n + 2$

۸ چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (آزمون علوی)

الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.
ب) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل نیست.
پ) برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱، عدد $3^n - 1$ اول هست.
ت) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

۱ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

الف) اعداد فرد $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + n + 11 \in \mathbb{N}$

ب) اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی زوج متوالی باشد، آنگاه $k+1$ مربع کامل است.

پ) میانگین حسابی دو عدد نلفنی از میانگین هندسی‌شان کمتر است.

ت) اگر n عدد صحیح باشد، آنگاه $(n^2 - 4)(n^2 - n) \mid 120$.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰) اگر x و y دو عدد صحیح باشند به طوری که $xy = 293^{8921}$ باشد، آنگاه $x^{5301} + y^{8321}$ چگونه است؟

۱) اول ۲) گاهی فرد و گاهی زوج ۳) زوج ۴) فرد

۱۱) اگر a و b دو عدد حقیقی داشته باشیم $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ، چه تعداد از عبارات‌های « Δab »، « $3a - 7b$ » و « $a^2b + 3ab^2$ » همواره

صفر است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۲) چه تعداد از سه تایی مرتبه‌هایی مانند (x, y, z) از اعداد صحیح با شرط $0 \leq x, y, z \leq 10$ وجود دارد، به طوری که تساوی

$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$ برقرار باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۶۰ ۴) ۶۱

چند مورد از گزاره‌های زیر با برهان خلف اثبات می‌شود؟

الف) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) حاصل جمع هر سه عدد طبیعی زوج متوالی، مضرب ۶ است.

پ) اگر مربع یک عدد طبیعی مضرب ۵ باشد، آن عدد مضرب ۵ می‌باشد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴) اگر α و β گنگ باشند و $3\alpha + \beta$ گویا باشد، مقادیر $2\alpha - \beta$ و $6\alpha + 12\beta$ به ترتیب چگونه هستند؟

۱) گویا، گنگ ۲) گنگ، گویا ۳) گنگ، گنگ ۴) گویا، گویا

۱۵) اگر α و β دو عدد گنگ ولی $9\beta - 6\alpha$ گویا باشد، عدد $4\alpha - 6\beta$ و عدد $2\alpha + 12\beta$ است.

۱) گنگ، گنگ ۲) گنگ، گویا ۳) گویا، گویا ۴) گویا، گنگ

چند مورد از گزاره‌های زیر به روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالات حل می‌شود؟

الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۶ است.

ب) اگر K حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4K+1$ مربع کامل است.

پ) برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷) a_1, a_2, a_3 عددهای صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. چند مورد از اعداد زیر حتماً زوج

هستند؟

الف) $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ ب) $(a_1 - b_2)(a_2 - b_1)(a_3 - b_2)$ پ) $a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸) هم‌ارزی $P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (P_n \Rightarrow r)$ کدام یک از روش‌های استدلال را توجیه می‌کند؟

۱) مثال نقض ۲) برهان خلف ۳) اثبات مستقیم ۴) اثبات با در نظر گرفتن همه حالات

۱۹ اگر $A = \frac{x^2(x+1)^2}{16}$ باشد، به ازای چند مقدار x از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ ، عدد A یک عدد زوج است؟ (آزمون علوی)

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴)

۲۰ چند عدد طبیعی مانند n در بازه $[1, 100]$ وجود دارد که $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج شود؟ (آزمون علوی)

- ۴۸ (۱) ۴۹ (۲) ۵۰ (۳) ۵۱ (۴)

۲۱ گزاره $(a+b)$ زوج است، با کدام گزاره هم ارز است؟ (آزمون علوی)

- (۱) $a \cdot b$ زوج است. (۲) $2a - b$ زوج است. (۳) $fa + b$ زوج است. (۴) $5a + 3b$ زوج است.

۲۲ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر همواره درست است؟ (آزمون علوی)

- (۱) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ (۲) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ (۳) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ (۴) $a = b \Leftrightarrow a^2 - ab = 0$

۲۳ در اثبات $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ، $a, b > 0$ ، به روش بازگشتی، گزاره همیشه درست کدام است؟ (آزمون علوی)

- (۱) $(a+b)^2 \geq 0$ (۲) $(2a-b)^2 \geq 0$ (۳) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (۴) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 0$

۲۴ در اثبات کلیت حکم (اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه $x^2 + y^2 \geq 2x + 2y - 2$ است) به روش بازگشتی، به کدام نعلسای پدیهی می‌رسیم؟

- (۱) $(x-y)^2 \geq 0$ (۲) $x^2 + y^2 \geq 0$ (۳) $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 \geq 0$ (۴) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$

۲۵ در اثبات $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ به روش بازگشتی گزاره همیشه درست کدام نمی‌تواند باشد؟ (آزمون علوی)

- (۱) $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{2y^2}{4} \geq 0$ (۲) $(x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$ (۳) $(\frac{x}{2} + y)^2 + \frac{2x^2}{4} \geq 0$ (۴) $(x+y)^2 + 2x^2 + 2y^2 \geq 0$

۲۶ در اثبات $(x^2 + 2y^2 + 8 \geq 2xy - 4x)$ به روش گزاره‌های هم ارز به گزاره همیشه درست $A + (x - 2y)^2 \geq 0$ رسیده‌ایم. حاصل A به ازای $x = 5$ کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۱۰۰ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۴۴

۲۷ کدام یک از نعلسای‌های زیر همواره برقرار نیست؟ (متغیرها همگی عضو اعداد حقیقی هستند.) (آزمون علوی)

- (۱) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ (۲) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ (۳) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (۴) $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{ab}{2}$ (علامت a و b هم علامت)

۲۸ اگر a و b دو عدد مثبت باشند، بیش‌ترین مقدار عبارت $\frac{7ab}{a^2 + b^2}$ کدام است؟ (آزمون علوی)

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) ۵

عاد کردن و بخش پذیری



۲۹ چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد که به‌طوری‌که $a \mid 24$ ، $a \nmid 22$ باشد؟ (آزمون علوی)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۰ چند عدد طبیعی a وجود دارد به‌طوری‌که $a \mid 400 + a$ و $a \nmid 20 + a$ باشد؟ (آزمون علوی)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

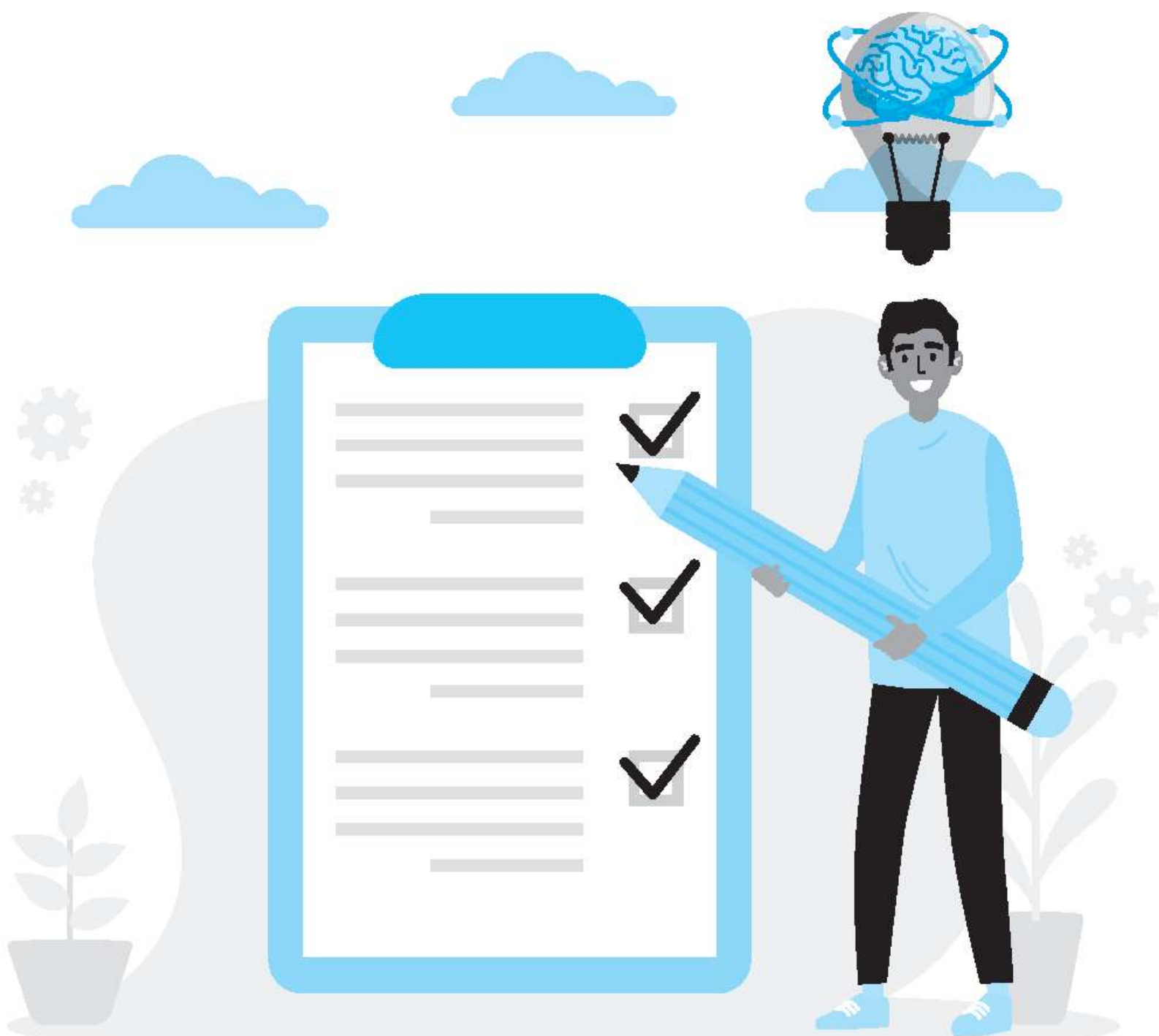
۳۱ کدام گزینه همواره درست است؟ (a, b, c, d) اعداد صحیح و n عددی طبیعی است. (آزمون علوی)

- (۱) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$ (۲) $a \mid bc \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$ (۳) $a \mid b^n \Rightarrow a \mid b$ (۴) $ab \mid d \Rightarrow a \mid d \wedge b \mid d$

۳۲ کدام گزینه درست است؟ $(a$ و b اعداد صحیح هستند و $a \neq 0$ است.) (آزمون علوی)

- (۱) $a \mid b^2 \Rightarrow a \mid b$ (۲) $a^2 \mid b^2 \Rightarrow a^2 \mid b$ (۳) $a^2 \mid b^2 \Rightarrow a \mid b$ (۴) $a \mid b \Rightarrow a^2 \mid b$

پاسخنامه تشریحی



در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳۷۷ در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ۳ ندارد. $(۳۷۷ = ۸(۴۷) + ۱)$

به‌طور کلی مجموع مربعات هر ۳ عدد طبیعی در تقسیم بر ۸ نمی‌تواند باقی‌مانده ۷ داشته باشد.

۷. گزینه (۲)

دو عدد زوج متوالی $۲k$ و $۲k+۲$ هستند، بنابراین:

$$n = ۲k(۲k+۲) = ۴k^۲ + ۴k$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه (۱): $۴n+۱ = ۴(۴k^۲ + ۴k) + ۱ = ۱۶k^۲ + ۱۶k + ۱$

گزینه (۲): $n+۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = (۲k+۱)^۲$ مربع کامل است.

گزینه (۳): $۴n+۲ = ۴(۴k^۲ + ۴k) + ۲ = ۱۶k^۲ + ۱۶k + ۲$

گزینه (۴): $n+۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۲$

۸. گزینه (۴)

گزاره (الف): درست -

فرض: $\begin{cases} a = x-۲ \\ b = x-۱ \\ c = x \end{cases}$ حکم: $abc = ۶k$

$$\begin{aligned} abc &= x(x-۱)(x-۲) \\ &= \frac{x(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)\dots \times ۱ \times ۳!}{(x-۳)(x-۴)\dots \times ۱ \times ۳!} \\ &= \frac{x! \times ۶}{(x-۳)!} = ۶ \binom{x}{۳} = ۶k \end{aligned}$$

گزاره (ب): نادرست - به‌عنوان مثال نقض اگر $k = ۲ \times ۲ = ۴$ باشد $۴k+۱ = ۱۷$ عدد اول نیست، مربع کامل است.

گزاره (پ): نادرست - به‌عنوان مثال اگر $n = ۴$ باشد $۲^۴ - ۱ = ۱۵$ عدد اول نیست.

گزاره (ت): نادرست - به‌عنوان مثال اگر $x = ۹$ و $y = ۱۶$ باشد $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷$ و $\sqrt{x+y} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$ و $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$ بنابراین فقط یک گزاره درست است.

۹. گزینه (۲)

اثبات با در نظر گرفتن همه حالات: گاهی برای اثبات درستی یک گزاره

باید همه حالاتی که امکان رخ دادن دارند را بررسی کرد.

گزاره (الف): درست - اثبات به روش در نظر گرفتن همه حالات:

حالت اول: $n = ۲k \Rightarrow n^۲ + n + ۱۱ = (۲k)^۲ + ۲k + ۱۱$

فرد $= ۴k^۲ + ۲k + ۱۱ = ۲(۲k^۲ + k + ۵) + ۱ = ۲k' + ۱$

حالت دوم: $n = ۲k+۱$

$\Rightarrow n^۲ + n + ۱۱ = (۲k+۱)^۲ + (۲k+۱) + ۱۱$

فرد $= ۴k^۲ + ۴k + ۱۲ + ۱ = ۲(۲k^۲ + ۲k + ۶) + ۱ = ۲k' + ۱$

گزاره (ب): درست - اگر $k = ۲x(۲x+۲) = ۴x^۲ + ۴x$ باشد

$k+۱ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ = (۲x+۱)^۲$ که یعنی $(k+۱)$ مربع کامل است.

گزاره (پ): نادرست - به‌عنوان مثال نقض $a = ۲$ و $b = ۸$ نگاه میانگین حسابی $\frac{a+b}{۲} = \frac{۲+۸}{۲} = ۵$ و میانگین هندسی $\sqrt{ab} = \sqrt{۲ \times ۸} = ۴$ است که

پاسخنامه تشریحی ریاضیات گسسته

۱. گزینه (۴)

مثال نقض: هرگاه بخواهیم نشان دهیم ارزش یک گزاره نادرست است، از مثال نقض استفاده می‌کنیم.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

عدد اول $n=۱ \Rightarrow ۴^n + ۱ = ۴^۱ + ۱ = ۵$ گزینه (۱)

عدد اول $n=۲ \Rightarrow ۴^۲ + ۱ = ۱۶ + ۱ = ۱۷$ گزینه (۲)

عدد اول $n=۴ \Rightarrow ۴^۴ + ۱ = ۲۵۶ + ۱ = ۲۵۷$ گزینه (۳)

گزینه (۴): $n=۵ \Rightarrow ۴^۵ + ۱ = ۱۰۲۴ + ۱ = ۱۰۲۵ = ۵ \times ۲۰۵$ غیراول

۲. گزینه (۳)

می‌دانیم اگر $B \subseteq A$ باشد آنگاه $A \cup B = A$ و چنانچه $C \subseteq A$ باشد $A \cup C = A$ است که $A \cup B = A \cup C = A$ می‌باشد. حال اگر $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۱\}$ و $C = \{۲\}$ باشد آنگاه $A \cup B = A \cup C = A$ ولی $B \neq C$

۳. گزینه (۴)

مجموع n عدد متوالی به شرطی که n عددی فرد باشد مضرب n است.

برای اثبات نادرستی گزاره مثال نقض می‌زنیم: مثلاً اگر عدد متوالی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را با هم جمع کنیم حاصل برابر ۱۰ می‌شود که مضرب ۴ نیست.

۴. گزینه (۴)

تک‌به‌تک گزینه‌ها را به عدد ۸ تقسیم می‌کنیم:

گزینه (۱): $۱۱ = ۸(۱) + ۳ = ۸k + ۳$

گزینه (۲): عدد $۹۱ = ۷ \times ۱۳$ است و این عدد اول نیست پس نمی‌توان این عدد را به‌عنوان مثال نقض منظور کرد.

گزینه (۳): $۴۳ = ۸(۵) + ۳ = ۸k + ۳$

گزینه (۴): $۵۳ = ۸(۶) + ۵ = ۸k + ۵$

بنابراین جواب گزینه (۴) است.

۵. گزینه (۲)

اگر $n = ۷۱$ باشد:

عدد اول $n^۲ + n + ۹۷ = (۷۱)^۲ + ۷۱ + ۹۷ = ۵۰۴۹$

اگر $n = ۹۷$ باشد:

غیراول $n^۲ + n + ۹۷ = (۹۷)^۲ + ۹۷ + ۹۷ = ۹۷(۹۷+۱+۱) = ۹۷ \times ۹۹$

اگر $n = ۱۰۱$ باشد:

عدد اول $n^۲ + n + ۹۷ = (۱۰۱)^۲ + ۱۰۱ + ۹۷ = ۱۰۳۹۹$

۶. گزینه (۴)

مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ۱ می‌دهد، و مربع هر عدد زوج در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ۴ یا صفر می‌دهد. بنابراین مجموع مربعات هر ۳ عدد طبیعی فرد در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده ۳ دارد.

میلنگین حسابی از میانگین هندسی بیشتر است.

گزاره (ت) درست -

$$(n^2 - n)(n^2 - 4) = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \\ = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

می‌دانیم حاصل ضرب ۵ عدد متوالی مضرب ۵! است، یعنی:

$$120 \mid (n^2 - n)(n^2 - 4)$$

۱۵. گزینه (۳)

عدد 293^{8921} یک عدد فرد است، پس هم x و هم y اعداد فرد می‌باشند و $x^{53^{10}}$ و y^{8321} نیز فرد هستند، بنابراین $x^{53^{10}} + y^{8321}$ زوج است.

۱۱. گزینه (۲)

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2ab = 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

$$a^2b + 2ab^2 = ab(a^2 + 2b) = 0 \times (a^2 + 2b) = 0, 5ab = 0$$
 پس

است ولی اگر فرض کنیم $(b=1, a=0)$ در این صورت $ab=0$ ولی

$$2a - 7b = 0 - 7 = -7 \neq 0$$

۱۲. گزینه (۲)

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0$$

سه عدد $(x-y)^2$ و $(x-z)^2$ و $(y-z)^2$ نامنفی هستند و زمانی جمع سه

عدد نامنفی صفر می‌شود که تکبه‌تک آن‌ها صفر باشد، یعنی $x=y=z$ که:

$$(x, y, z) \in \{(-1, -1, -1), (-9, -9, -9), \dots, (1, 1, 1)\}$$

۲۱ حالت وجود دارد.

۱۳. گزینه (۲)

برهان خلف (اثبات غیر مستقیم): در این روش اثبات گزاره‌ها ابتدا

فرض می‌کنیم که حکم نادرست است سپس به کمک قوانین منطق

گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک

نتیجه غیرممکن و یا در تضاد با فرض مسئله می‌رسیم و از آنجا نتیجه

می‌شود که فرض نادرست بودن حکم غلط است و درستی حکم اثبات

می‌شود.

گزاره (الف): نادرست - بنابراین درستی آن اصلاً قابل اثبات نیست، به‌عنوان مثال نقض

$$\text{دو عدد } 2 + \sqrt{3} \text{ و } 2 - \sqrt{3} \text{ هر دو گنگ هستند، ولی } 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

یک عدد گویا است.

گزاره (ب): درست - ولی اثبات آن به کمک استدلال استنتاجی است به‌طوری‌که:

$$\text{فرض } \begin{cases} a = 2k - 2 \\ b = 2k \\ c = 2k + 2 \end{cases}$$

$$a + b + c = 2k - 2 + 2k + 2k + 2 = 6k$$

گزاره (پ): درست - به کمک برهان خلف اثبات می‌شود.

۱۴. گزینه (۲)

اگر α و β دو عدد گنگ و $m\alpha + n\beta$ عدد گویا باشند هر ترکیب خطی از α و β به جذر $k(m\alpha + n\beta)$ گنگ است.

با توجه به نکته فوق $(2\alpha - \beta)$ گنگ و $2(3\alpha + \beta) = 6\alpha + 2\beta$ یک عدد

گویا است.

۱۵. گزینه (۴)

با توجه به نکته تست قبل چون بنا به فرض $(6\alpha - 9\beta)$ گویا و

$$4\alpha - 6\beta = \frac{2}{3}(6\alpha - 9\beta)$$
 پس یک عدد گویا است و $3\alpha + 2\beta$ یک عدد

گنگ است.

۱۶. گزینه (۲)

گزاره (الف): به کمک استدلال استنتاجی اثبات می‌شود. (در پاسخ تست ۸، این گزاره

اثبات شده است.)

گزاره (ب): به کمک استدلال استنتاجی اثبات می‌شود به‌طوری‌که

$$k = x(x+1) = x^2 + x$$
 پس داریم:

$$4k+1 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$$

گزاره (پ): یک گزاره درست است که به کمک اثبات یا در نظر گرفتن همه حالات،

اثبات می‌شود به‌طوری‌که دو حالت برای اثبات مسئله فرض می‌کنیم:

حالت اول:

$$n = 2k$$

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

$$= 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2k' + 1$$
 عددی فرد

حالت دوم:

$$n = 2k + 1$$

$$n^2 - 5n + 7 = (2k+1)^2 - 5(2k+1) + 7$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 = 4k^2 - 6k + 2 + 1$$

$$= 2(2k^2 - 3k + 1) + 1 = 2k' + 1$$
 عددی فرد

۱۷. گزینه (۴)

چون a_1, a_2 و a_3 همان اعداد b_1, b_2 و b_3 ولی با ترتیب متفاوت هستند.

پس: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ و $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3$ است.

عبارات (۱) و (۲) اگر بخواهند فرد باشند، هر سه پرانتز آن‌ها باید فرد باشند، پس مجموع

آن‌ها نیز فرد می‌شود که قطعاً برابر صفر نیست.

$$1) (a_1 - b_3)(a_2 - b_1)(a_3 - b_2)$$

$$2) (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) \neq 0$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \neq b_1 + b_2 + b_3$$
 غیرممکن

$$(a_1 - b_2) + (a_2 - b_1) + (a_3 - b_3) \neq 0$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \neq b_1 + b_2 + b_3$$
 غیرممکن

چون $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3$ است، پس هر دو عدد $a_1a_2a_3$ و $b_1b_2b_3$ با هم

زوج و یا با هم فرد هستند، بنابراین مجموع آن‌ها زوج است.

۲۴. گزینه (۳)

$$x^2 + y^2 \geq rx + ry - r \Leftrightarrow x^2 - rx + 1 + y^2 - ry + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

۲۵. گزینه (۴)

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) گزینه: $x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

(۲) گزینه: $x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow rx^2 + rxy + ry^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + rxy + y^2 + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (x+y)^2 + y^2 \geq 0$$

(۳) گزینه: $x^2 + y^2 + xy \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + xy + y^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 + (\frac{x}{4} + y)^2 \geq 0$$

بنابراین جواب گزینه (۴) است.

۲۶. گزینه (۱)

$$x^2 + ry^2 + 8 \geq rxy - 4x$$

$$\xrightarrow{+x^2} rx^2 + 4y^2 + 16 \geq 4xy - 8x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 + 8x + 16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)^2 + (x+4)^2 \geq 0 \text{ بدیهی}$$

پس:

$$A = (x+4)^2$$

$$x=5 \Rightarrow A=9^2=81$$

۲۷. گزینه (۳)

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) گزینه: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

$$\xrightarrow{+x^2} rx^2 + ry^2 + rz^2 - rxy - ryz - rxz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - rxy + y^2 + x^2 - rxz + z^2 + y^2 - ryz + z^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \text{ بدیهی}$$

(۲) گزینه: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

$$\xrightarrow{+x^2} rx^2 + ry^2 + r \geq rxy + rx + ry$$

$$\Leftrightarrow x^2 - rxy + y^2 + x^2 - rx + 1 + y^2 - ry + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \text{ بدیهی}$$

(۳) گزینه: $\frac{a^2 + b^2}{4} \geq \frac{ab}{4}$

$$\left. \begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 &\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \\ 2ab &\geq \frac{4}{4}ab \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{4}{4}ab$$

گزینه (۳): نادرست - به عنوان مثال نقض اگر $x=1$ و $y=-1$ باشد

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \text{ است که بزرگتر مساوی ۲ نمی‌باشد.}$$

۱۸. گزینه (۴)

هم ارزی بیان شده اثبات به روش در نظر گرفتن همه حالت‌های ممکن است.

۱۹. گزینه (۳)

اگر $\frac{x^2(x+1)^2}{16}$ زوج باشد، حتما جذر این عدد هم زوج است.

$$\frac{x(x+1)}{4} = 2k \Rightarrow x(x+1) = 8k$$

چون x و $(x+1)$ دو عدد متوالی هستند (یکی زوج و یکی فرد) پس باید x یا $(x+1)$ مضرب ۸ باشند.

۶ عضو $x = 8k \Rightarrow x \in \{8, 16, 24, \dots, 48\}$

۶ عضو $x+1 = 8k \Rightarrow x = 8k-1 \Rightarrow x \in \{7, 15, 23, \dots, 47\}$

بنابراین به ازای ۱۲ مقدار از مجموعه S حاصل A یک عدد زوج است.

۲۰. گزینه (۳)

اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج باشد، حتما جذر این عدد هم زوج است.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2K \Rightarrow n(n+1) = 4K$$

یعنی $n(n+1)$ باید مضرب ۴ شود و این زمانی حاصل می‌شود که n به صورت

$$4K \text{ یا } 4K-1 \text{ باشد. حال باید از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ عددهایی که به فرم } 4K$$

یا $4K-1$ هستند را شمارش کنیم.

$$1 \leq 4K \leq 100 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq K \leq 25 \Rightarrow K \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$$

$$1 \leq 4K-1 \leq 100 \Rightarrow 2 \leq 4K \leq 101 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq K \leq \frac{101}{4}$$

$$\Rightarrow K \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$$

$$\text{تعداد کل} = 25 + 25 = 50$$

۲۱. گزینه (۴)

اگر $(a+b)$ زوج باشد a و b هر دو یا هم فرد یا هر دو با هم زوج هستند، پس ab

گلهی فرد و گلهی زوج است. اگر a و b هر دو فرد باشند، $2a$ زوج و b فرد است

پس $2a-b$ فرد می‌شود و اگر a و b هر دو فرد باشند، $4a+b$ فرد می‌شود.

ولی اگر a و b هر دو زوج باشند $5a+2b$ زوج و اگر a و b هر دو فرد باشند $5a$

فرد و $2b$ هم فرد است پس $5a+2b$ زوج می‌شود.

۲۲. گزینه (۳)

گزینه (۱): نادرست - به عنوان مثال نقض $a=4$ و $b=-4$ که $a \neq b$ ولی

$$a^2 = b^2$$

گزینه (۲): نادرست - به عنوان مثال نقض $a=-3$ و $b=2$ که $a < b$ است

ولی $a^2 > b^2$ می‌باشد.

گزینه (۴): نادرست - چون اگر $a=0$ و $b=1$ باشد $a \neq b$ ولی

$$a^2 - ab = 0$$

۲۳. گزینه (۳)

اثبات بازگشتی: گاهی برای اثبات نامساوی‌ها در اعداد حقیقی، فرض مناسب را برای شروع اثبات نمی‌دانیم، می‌توانیم از خود حکم شروع کنیم و با طی مراحل استنتاجی به رابطه‌ای بدیهی می‌رسیم که البته این اثبات کامل نیست مگر آنکه نشان دهیم تمامی مراحل طی شده بازگشت‌پذیر هستند.

$$\frac{a+b}{4} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

۲۸. گزینه (۱)

اگر a و b دو عدد هم علامت باشند:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{vab}{a^2 + b^2} = A \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{vab} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{a^2}{vab} + \frac{b^2}{vab} = \frac{1}{A}$$

$$\xrightarrow{\times v} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{v}{A} \Rightarrow \frac{v}{A} \geq 2 \Rightarrow \frac{A}{v} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq \frac{v}{2}$$

۲۹. گزینه (۳)



عاد کردن: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a \neq 0$ ، گوییم a بر b بخش پذیر است. اگر عددی مانند q وجود داشته باشد که $b = a \cdot q$ در این حالت گوییم عدد a عدد b را عاد می کند و می نویسیم $a | b$ که عدد a یکی از مقسوم علیه های عدد b است، بنابراین داریم:

$$a | b \Leftrightarrow b = a \cdot q$$

$$a | 24 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

چون $a/22$ پس $a \notin \{1, 2, 4, 8, 16, 22\}$ نمی باشد، بنابراین $a \in \{3, 6, 12, 24\}$ است که یعنی ۴ مقدار طبیعی برای عدد a وجود دارد.

۳۰. گزینه (۳)



$$a | b \Leftrightarrow a | b \mp na$$

$$20 | 20 + a \Rightarrow 20 | a \Rightarrow a = 20k$$

$$a | 400 + a \xrightarrow{a = 20k} 20k | 400 + 20k \Rightarrow 20k | 400$$

$$\xrightarrow{+20} k | 20 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

۳۱. گزینه (۴)



به راحتی می توان با مثال نقض نادرست بودن گزاره های گزینه های (۱) تا (۳) را نشان دهد.

گزینه (۱) اگر $a = 2$ و $b = 3$ و $c = 5$ باشد $c = 5$ و $b = 3$ و $a = 2$ ولی $(a|b+c)2|3+5$ ولی $2/5$ و $2/3$

گزینه (۲) اگر $a = 4$ و $b = 6$ و $c = 10$ باشد $c = 10$ و $b = 6$ و $a = 4$ ولی $(a|bc)4|6 \times 10$ ولی $4/10$ و $4/6$

گزینه (۳) اگر $a = 4$ و $b = 2$ و $n = 3$ باشد $n = 3$ و $b = 2$ و $a = 4$ ولی $(a|b^n)4|2^3$ ولی $4/2$

برای اثبات گزینه (۴) داریم:

$$ab | d \Rightarrow d = (ab)q \Rightarrow \begin{cases} d = a(bq) \Rightarrow a | d \\ d = b(aq) \Rightarrow b | d \end{cases}$$

۳۲. گزینه (۲)



$$\text{اگر } a^x | b^y \text{ داشته باشیم } \left| \frac{x}{z} - \frac{y}{t} \right| \geq \text{انگاه } a^z | b^t$$

به بررسی گزینه ها می پردازیم:

$$(۱) \text{ گزینه: } a | b^2 \Rightarrow a | b \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{1} \right| = 1 - 2 = -1 < 0$$

گزاره نادرست است.

$$(۲) \text{ گزینه: } a^3 | b^2 \Rightarrow a^2 | b^3 \quad \left| \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right| = 9 - 4 = 5 > 0$$

گزاره درست است.

$$(۳) \text{ گزینه: } a^3 | b^4 \Rightarrow a | b \quad \left| \frac{3}{4} - \frac{4}{1} \right| = 3 - 4 = -1 < 0$$

گزاره نادرست است.

$$(۴) \text{ گزینه: } a | b \Rightarrow a^2 | b \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{2}{1} \right| = 1 - 2 = -1 < 0$$

گزاره نادرست است.

۳۳. گزینه (۱)



$$a | b^2 \wedge a | c \Rightarrow a | b \mp c, a | b \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} a | nb$$

$$\left. \begin{aligned} a | 7k + 2 &\Rightarrow a | 9(7k + 2) \\ a | 9k - 2 &\Rightarrow a | -7(9k - 2) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} a | 63k + 27 - 63k + 14$$

$$\Rightarrow a | 41 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \begin{cases} a = 1 \\ a = 41 \end{cases}$$

بنابراین دو مقدار طبیعی برای a وجود دارد.

۳۴. گزینه (۴)



$$a | b$$

حتما باید مخرج کسر، مقسوم علیه صورت آن باشد تا $y \in \mathbb{Z}$ شود، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} x + 2 | 2x - 1 \\ x + 2 | x + 2 &\Rightarrow x + 2 | -2(x + 2) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+}$$

$$x + 2 | 2x - 1 - 2x - 4 \Rightarrow x + 2 | -5 \Rightarrow x + 2 | 5$$

$$x + 2 \in \{-5, -1, 1, 5\} \Rightarrow x \in \{-7, -3, -1, 3\}$$

بنابراین ۴ نقطه با مختصات صحیح وجود دارد.

۳۵. گزینه (۲)



حتما باید مخرج کسر مقسوم علیه صورت آن باشد تا $y \in \mathbb{N}$ شود، بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 1 | 5x + 2 &\Rightarrow 2x - 1 | 2(5x + 2) \\ 2x - 1 | 2x - 1 &\Rightarrow 2x - 1 | -5(2x - 1) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+}$$

$$2x - 1 | 10x + 6 - 10x + 5 \Rightarrow 2x - 1 | 11 \Rightarrow 2x - 1 \in \{1, 11\}$$

پس $x \in \{1, 6\}$ ، بنابراین فقط دو نقطه $(1, 8)$ و $(6, 3)$ با مختصات طبیعی

روی منحنی وجود دارند.

۳۶. گزینه (۳)



ابتدا y را تنها می کنیم:

$$yx + 2y = 2x + 1 \Rightarrow y(x + 2) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x + 1}{x + 2}$$

یعنی $(x + 2)$ باید مقسوم علیه $(2x + 1)$ باشد.

$$\left. \begin{aligned} x + 2 | 2x + 1 \\ x + 2 | x + 2 &\Rightarrow x + 2 | -2(x + 2) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+}$$

$$x + 2 | 2x + 1 - 2x - 4 \Rightarrow x + 2 | -5$$

$$\Rightarrow x + 2 \in \{-5, -1, 1, 5\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-7, -4, -2, 2\} \Rightarrow y \in \{3, 7, -3, 1\}$$

یعنی فقط ۴ نقطه $(-8, 3)$ و $(-4, 7)$ و $(-2, -3)$ و $(2, 1)$ روی منحنی است.