

راهنمای استفاده از کتاب



فرمول نامه!

در این بخش خلاصه‌ای از فرمول‌های هر فصل برای سهولت استفاده شما عزیزان درج شده است. توصیه می‌شود قبل از شروع کتاب، تدریس دبیر و کتاب درسی را به صورت کامل بررسی نمایید.



پرسش‌های تشریحی

۱. هر فصل به چند بخش تقسیم شده است.
۲. در هر بخشی سؤالات تشریحی مربوط به آن بخش با تیپ‌های مختلف و شبیه آزمون‌های نهایی تألیف شده است.



سؤالات تستی

بعد از پرسش‌های تشریحی سؤالات تستی با تقسیم‌بندی سؤالات آموزشی با (شماره سؤالات به رنگ مشکی) و سؤالات تثبیتی با (شماره سؤالات به رنگ آبی) همراه با تمامی تست‌های کنکور منطبق با کتاب درسی جدید آورده شده است.



آزمون‌های پایان فصل تشریحی و جامع

این قسمت در انتهای هر فصل که شامل سؤالات کل فصل می‌باشد در نظر گرفتن استاندارد آزمون نهایی تألیف شده است.
این آزمون‌ها در پایان کتاب نیز به عنوان جامع از کل کتاب تهیه شده است.



آزمون های تستی پایان فصل و جامع

این قسمت همانند قسمت قبل شامل پرسش های چهارگزینه ای از کل فصل و منطبق بر استاندارد کنکور سراسری می باشد.
این آزمون ها در پایان کتاب نیز به عنوان جامع از کل کتاب تهیه شده است.

۴

آزمون پلاس

تست های با سطح دشواری بسیار بالا برای علاقه مندان در این قسمت گنجانده شده است.

۵

پاسخنامه کلیدی

این پاسخنامه به صورت گزینه ای صرفاً برای سؤالات تستی با هدف تطبیق پاسخ دهی در انتهای فصل گنجانده شده است.

۶

پاسخنامه تشریحی الکترونیکی

پاسخنامه کامل تشریحی کل سؤالات در این بخش قرار دارد. این بخش در اختیار مجموعه های آموزشی قرار می گیرد.

۷

اعلام ایرادات کتاب

قطعاً این مجموعه با نظرات سازنده شما عزیزان به مجموعه ای پربار تبدیل خواهد شد.
با اسکن کد مقابل می توانید ایرادات این کتاب را برای ما ارسال نمایید.

۸



فهرست

فصل اول
دایره

۷

فصل دوم
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

۵۱

فصل سوم
روابط طولی در مثلث

۷۷

آزمون جامع

۱۰۳

فصل ۱

دایره



تستی

۱۸۰

تشریحی

۱۱۹

بارم بندی امتحانات

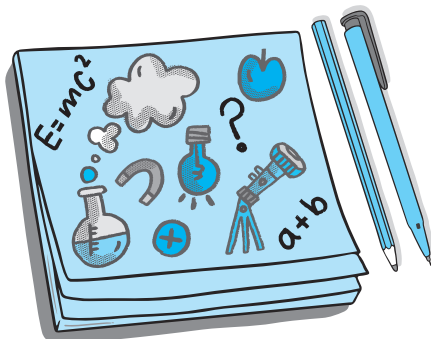
نهایی	نیمسال اول
۸ نمره	۱۴ نمره

سهم تست

درصد	تعداد
۵٪	۲



به فصل اول هندسه یازدهم خوش آمدید. در این فصل به بررسی یکی از مهم ترین و جذاب ترین مباحث هندسه یعنی دایره خواهیم پرداخت. با مطالعه دقیق این فصل و انجام تمرینات تشریحی این کتاب شما قادر خواهید بود تا نمره کامل در امتحان نهایی کسب کنید و همچنین در تمرینات تستی راه های هیجان انگیز و خلاقانه ای برای حل مسئله معرفی شده است که به شما کمک می کند تا مهارت های خود را به سطح بالاتری برسانید. بیایید با هم این سفر هیجان انگیز را آغاز کنیم و به دنیای شگفت انگیز دایره ها قدم بگذاریم.

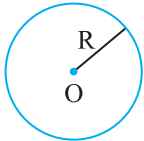


فرمول نامه

«دایره»

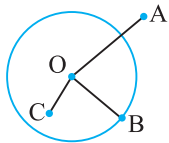
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله این نقاط از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک اندازه باشد، این اندازه را شعاع دایره گوئیم. دایره به مرکز O و شعاع R را با $C(O, R)$ نشان می‌دهیم.



وضعیت نقطه با دایره

یک نقطه با دایره سه حالت دارد:



(۱) نقطه خارج دایره: در این صورت فاصله نقطه از مرکز دایره بزرگ‌تر از شعاع دایره است. $OA > R$

(۲) نقطه روی دایره: در این صورت فاصله نقطه تا مرکز برابر شعاع دایره است. $OB = R$

(۳) نقطه داخل دایره: در این صورت فاصله نقطه تا مرکز کمتر از شعاع دایره است. $OC < R$

نکته مهم

اگر نقطه‌ای روی دایره نباشد و بخواهیم نزدیک‌ترین و دورترین نقطه از دایره را نسبت به آن نقطه پیدا کنیم از آن نقطه به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند.

نقطه A داخل دایره باشد. نزدیک‌ترین فاصله A تا دایره $AM = R - OA$ دورترین فاصله A تا دایره $AN = R + OA$	نقطه A خارج دایره باشد. نزدیک‌ترین فاصله A تا دایره $AM = AO - R$ دورترین فاصله A تا دایره $AN = AO + R$
--	--

وضعیت خط با دایره

یک خط با دایره سه حالت دارد.

خط دایره را قطع نکند. $OH > R$	خط بر دایره مماس باشد. $OH = R$	خط دایره را قطع کند. $OH < R$
--	--	---

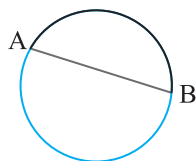
وتر در دایره

پاره‌خطی که دو سر آن روی یک دایره است را وتر گوئیم.

نکته مهم

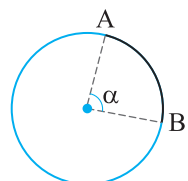
بزرگ‌ترین وتر دایره قطر دایره است.

کمان در دایره: قسمتی از دایره که بین دو نقطه قرار دارد را کمان گوئیم.



اندازه یک کمان

اگر زاویه مرکزی این کمان α و شعاع دایره برابر R باشد، طول کمان AB از دستور زیر حساب می‌شود.



$$|\widehat{AB}| = \frac{\alpha \pi R}{180^\circ} \quad \alpha \text{ بر حسب درجه}$$

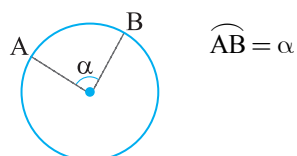
$$|\widehat{AB}| = \alpha R \quad \alpha \text{ بر حسب رادیان}$$

نکته مهم

$AB = R$	$AB = R\sqrt{2}$	$AB = R\sqrt{3}$
----------	------------------	------------------

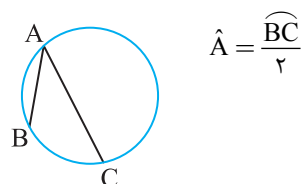
زاویه مرکزی

زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع دایره است.



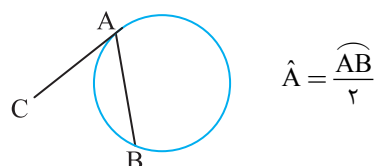
زاویه محاطی

زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن وتر دایره است.



زاویه ظلی

زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره است و یک ضلع آن وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره می‌باشد.

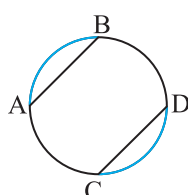


نکات مهم

(۱) اگر دو وتر با هم برابر باشند، اندازه کمان‌های آن‌ها با هم برابر است.

(۲) اگر اندازه دو کمان با هم برابر باشند، اندازه وترهای آن‌ها نیز با هم برابر است.

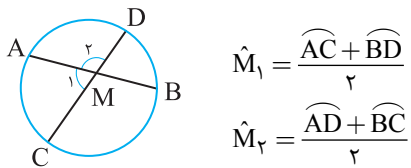
(۳) اگر دو وتر با هم موازی باشند، کمان‌های بین آن دو وتر با هم برابرند.



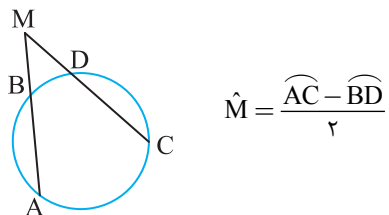
$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

زاویه بین دو وتر

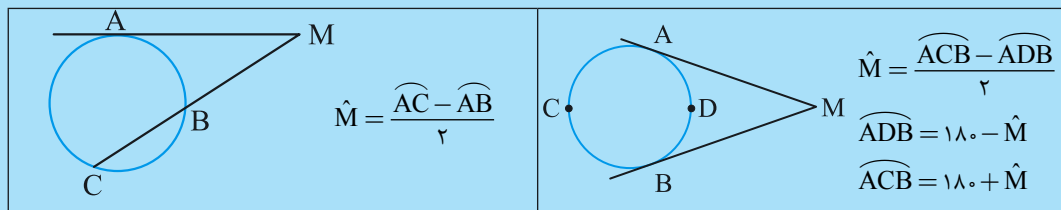
اگر دو وتر همدیگر را داخل دایره قطع کنند، داریم:



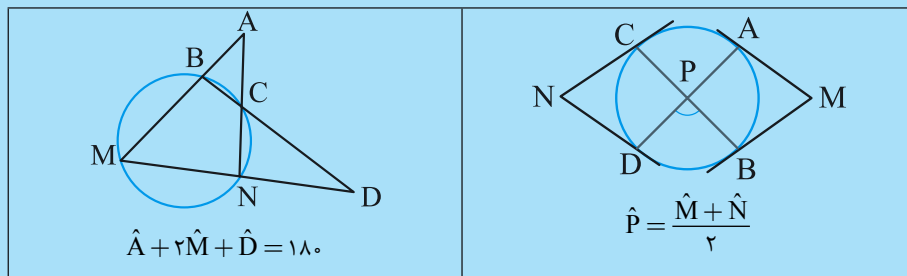
اگر دو وتر همدیگر را خارج دایره قطع کنند، داریم:



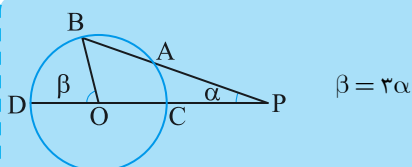
نکته ۱



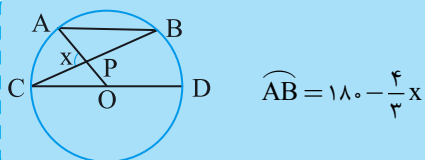
نکته ۲



نکته ۳ اگر PA برابر شعاع دایره باشد، داریم:

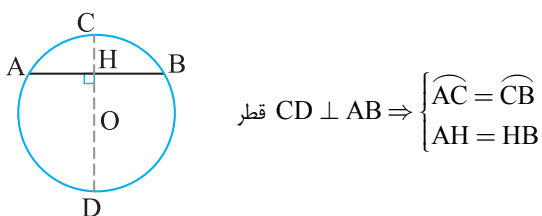


نکته ۴ اگر قطر CD با وتر AB موازی باشد، داریم:



قطر عمود بر وتر

اگر CD قطر عمود بر وتر AB باشد، داریم:



نکات مهم

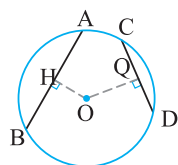
(۱) اگر از مرکز دایره به وسط یک وتر وصل کنیم، آنگاه آن پاره خط به آن وتر عمود است و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.

(۲) اگر از مرکز دایره به وسط یک کمان از آن دایره وصل کنیم، آن پاره خط بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می کند.

(۳) کوچک ترین وترى که از یک نقطه داخل دایره می گذرد، وترى است که به قطر گذرنده از آن عمود باشد.

(۴) بزرگ ترین وترى که از یک نقطه داخل دایره می گذرد، قطر دایره است.

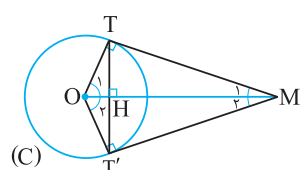
(۵) از دو وتر نامساوى، آن که بزرگ تر است، به مرکز دایره نزدیک تر است و برعکس.



$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OQ$$

رابطه های طولی در دایره

مماس بر دایره: از هر نقطه مثل M که در خارج از دایره $C(O, R)$ قرار دارد می توان دو مماس بر دایره رسم کرد، که روابط زیر برقرار است:



$$MT = MT' \quad \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \quad TH = T'H$$

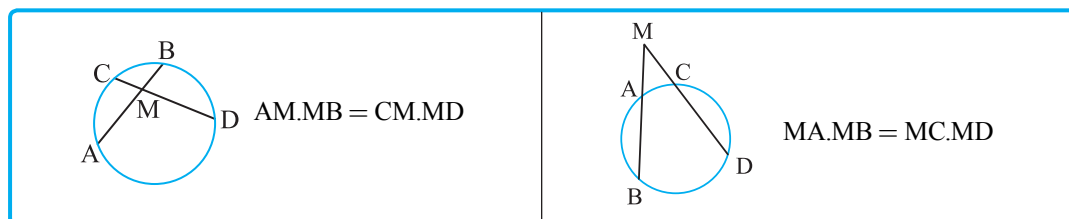
$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad OH \cdot OM = R^2$$

$$TT'^2 = 4OH \cdot HM \quad TT' \cdot OM = 2R \cdot MT$$

نکته مهم

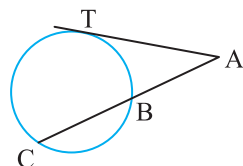
مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط بتوان دو مماس با زاویه α بر دایره $C(O, R)$ رسم کرد، یک دایره است به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

روابط طولی در دایره: اگر دو وتر AB و CD از یک دایره همدیگر را در نقطه M قطع کنند، داریم:



نکته مهم

اگر از یک نقطه خارج دایره، یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، داریم:



$$AT^2 = AB \cdot AC$$

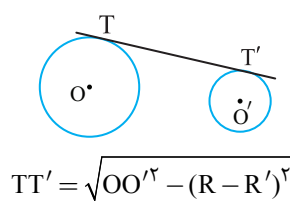
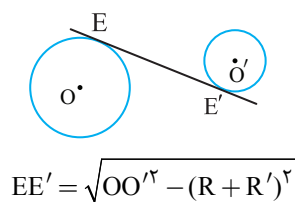
وضعیت دو دایره

دو دایره نسبت به هم ۶ حالت دارند.

متقاطع $R - R' < OO' < R + R'$	مماس برون $OO' = R + R'$	متخارج $OO' > R + R'$
هم مرکز $OO' = 0$	متداخل $OO' < R - R'$	مماس درون $OO' = R - R'$

مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر هر دو دایره در یک طرف این خط باشند، این خط مماس مشترک خارجی است و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک داخلی دو دایره است.

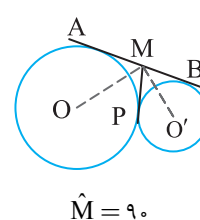
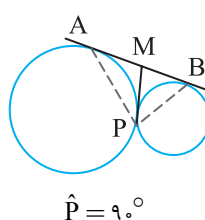
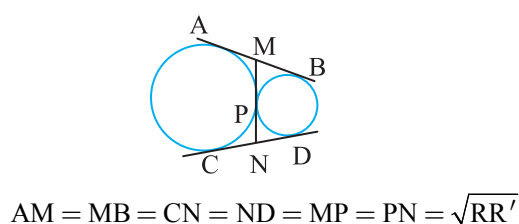


مماس برون ۳ مماس مشترک	مماس درون ۱ مماس مشترک	مماس بیرون ۴ مماس مشترک
مماس مشترک ۲ مماس مشترک	مماس بیرون ۳ مماس مشترک	مماس درون ۱ مماس مشترک
مماس بیرون ۳ مماس مشترک	مماس درون ۱ مماس مشترک	مماس بیرون ۴ مماس مشترک

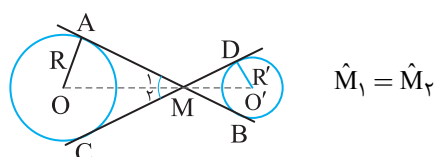
نکات مماس مشترک

(۱) طول مماس مشترک داخلی همواره از طول مماس مشترک خارجی کوچکتر است.

(۲) اگر دو دایره مماس خارج باشند داریم:

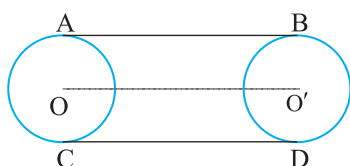


(۳) دو مماس مشترک داخلی دو دایره و خط المרכזین دو دایره همواره همسر هستند و داریم:

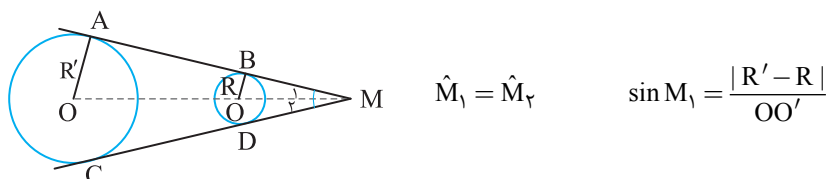


$$\sin M_1 = \frac{R + R'}{OO'}$$

(۴) اگر شعاع دو دایره با هم برابر باشد در این صورت مماس‌های مشترک خارجی با خط المרכזین موازی‌اند.

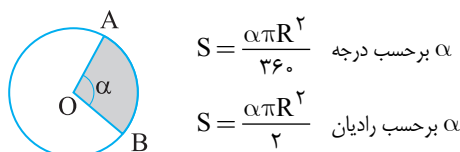


(۵) اگر شعاع دو دایره با هم برابر نباشد در این صورت مماس‌های مشترک خارجی با خط‌المرکزین دو دایره هم‌مرس هستند که داریم:

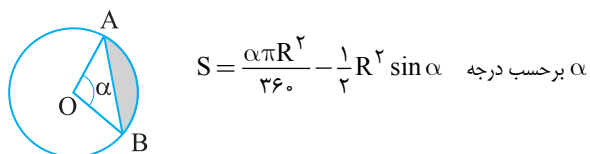


مساحت قطاع

ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره محدود هستند یک قطاع دایره گویند.

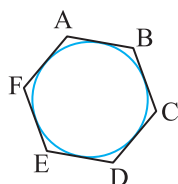


قسمت رنگ شده زیر را قطعه می‌نامیم.



چندضلعی‌های محاطی و محیطی

چندضلعی محیطی: هرگاه همه ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، آن چندضلعی را محیطی گوئیم. به این دایره، دایره محاطی چندضلعی گوئیم.



نکات چندضلعی محیطی

(۱) مرکز دایره محاطی یک چندضلعی محیطی محل هم‌رسی نیمسازهای داخلی آن است.

(۲) یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر نیمسازهای داخلی آن هم‌رس باشند.

(۳) همه چندضلعی‌های منتظم محیطی هستند.

(۴) اگر اندازه هر ضلع یک n ضلعی منتظم برابر a باشد، اندازه شعاع دایره محاطی نیز برابر R باشد در این صورت داریم:

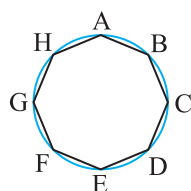
$$a = 2R \tan \frac{180}{n}$$

(۵) اگر مساحت یک چندضلعی محیطی برابر S و محیط این چندضلعی برابر 2P باشد، آنگاه شعاع دایره محاطی آن از دستور زیر به دست می‌آید.

$$r = \frac{S}{P}$$

چندضلعی محاطی

چندضلعی را محاطی گوئیم اگر و فقط اگر دایره‌ای وجود داشته باشد که از همه رؤس آن بگذرد در این صورت دایره را، دایره محیطی آن چندضلعی می‌گوئیم.



نکات چندضلعی محاطی

(۱) مرکز دایره محیطی یک چندضلعی محاطی محل هم‌مرسی عمودمنصف اضلاع آن است.

(۲) یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف اضلاع آن هم‌رس باشند.

(۳) همه چندضلعی‌های منتظم محاطی هستند.

(۴) اگر اندازه هر ضلع یک n ضلعی منتظم برابر a باشد، اندازه شعاع دایره محیطی نیز برابر R باشد در این صورت داریم:

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

(۵) n ضلعی منتظم محیطی بر دایره با n ضلعی منتظم محاطی در همان دایره متشابه است که نسبت تشابه برابر $\cos \frac{180^\circ}{n}$ می‌باشد.

چهارضلعی محیطی

چهارضلعی‌های محیطی دارای ویژگی‌های زیر هستند.

(۱) یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر باشد و مجموع هر کدام نصف محیط باشد.

$$AB + DC = AD + BC = \text{نصف محیط}$$

(۲) مهم‌ترین چهارضلعی‌های محیطی عبارتند از مربع، لوزی و کایت

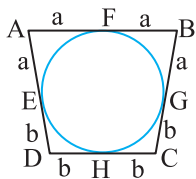
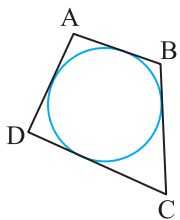
(۳) اگر یک مستطیل محیطی باشد، حتماً مربع بوده است.

(۴) اگر متوازی‌الاضلاع محیطی باشد، حتماً لوزی است.

(۵) اگر دوزنقه‌ای متساوی‌الساقین بر یک دایره محیط شود، داریم:

$$AF = FB = AE = BG = a \quad DH = HC = DE = CG = b$$

$$R^2 = ab \quad h = 2R$$



چهارضلعی محاطی

چهارضلعی‌های محاطی دارای ویژگی‌های زیر هستند.

(۱) زاویه‌های مقابل مکمل هستند.

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

(۲) مهم‌ترین چهارضلعی‌های محاطی عبارتند از مربع، مستطیل و دوزنقه متساوی‌الساقین.

(۳) اگر یک لوزی محاطی باشد، حتماً مربع بوده است.

(۴) اگر متوازی‌الاضلاع محاطی باشد، حتماً مستطیل است.

(۵) اگر نیمسازهای یک چهارضلعی محذب هم‌رس نباشند، حتماً شکل حاصل از برخورد آن‌ها یک چهارضلعی محاطی است.

(۶) اگر قطرهای یک چهارضلعی رسم شود و زاویه‌های به وجود آمده روبه‌روی یک ضلع با هم برابر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

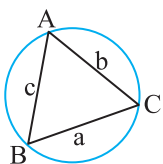
دایره محیطی مثلث

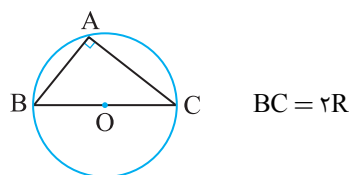
نکات دایره محیطی مثلث به قرار زیر است:

(۱) با معلوم بودن یک ضلع و زاویه مقابل به آن ضلع می‌توان اندازه شعاع دایره محیطی مثلث را حساب کرد.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$



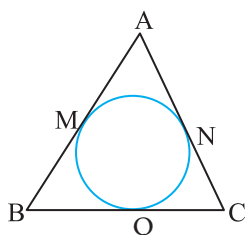


(۲) در مثلث قائم‌الزاویه وتر مثلث، قطر دایره محیطی آن است.

(۳) شعاع دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ است.

(۴) عمودمنصف یک ضلع مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع همدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

دایره محاطی داخلی مثلث



اگر در یک مثلث $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$ باشد و این مثلث بر دایره‌ای محیط باشد، داریم:

$$AM = AN = P - a$$

$$BM = BQ = P - b$$

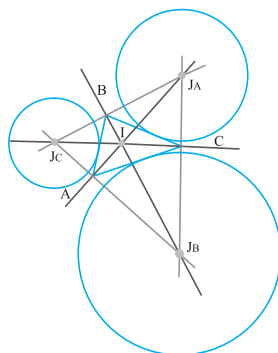
$$NC = CQ = P - c$$

نکات دایره محاطی داخلی مثلث

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

(۱) اگر h_a و h_b و h_c سه ارتفاع مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد، داریم:

(۲) در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مرکز دایره محاطی و محیطی یک نقطه است و اندازه شعاع دایره محاطی داخلی برابر $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ است که نصف اندازه شعاع دایره محیطی است.



دایره‌ای است که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است. هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد که مراکز این دایره‌ها محل تلاقی دو نیمساز خارجی و یک نیمساز داخلی است و شعاع دایره‌های محاطی خارجی از رابطه‌های زیر به دست می‌آید.

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

$$r_b = \frac{S}{p - b}$$

$$r_c = \frac{S}{p - c}$$

دایره محاطی خارجی مثلث

نکات دایره محاطی خارجی

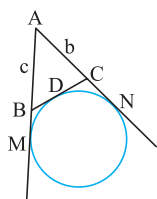
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

(۱) اگر r_a و r_b و r_c سه شعاع دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد، داریم:

(۲) در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a اندازه شعاع دایره محاطی خارجی برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ است که سه برابر اندازه شعاع دایره محاطی داخلی است.

(۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع دایره محاطی داخلی با تمام دایره‌های محاطی خارجی مماس برون است.

(۴) در مورد دایره محاطی خارجی داریم: ($2P$ محیط مثلث است).



$$AM = AN = P$$

$$BD = BM = P - c$$

$$DC = CN = P - b$$

(۵) اگر h_a و h_b و h_c سه ارتفاع مثلث و r_a و r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی باشند.

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} = \frac{1}{r_b}$$

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r_a}$$