بسم الله الرحمن الرحیم

علــوی

هندسه ۳

سیروس نصیری – مفید ابراهیم‌پور

مجموعه کتاب‌های همراه علــوی

سخن ناشر

سرآغاز هر نامه نام خداست   که بی نام او نامه یکسر خطاست

سپاس خدای را سزاست که اندیشهٔ انسانی را از طریق الهام با علم الهی پیوند زد و غبار تفکر بشری را با ظهور وحی ناب شست‌وشو داد و راهی رسا و نمایان در مقابل انسان گشود.

مؤسسهٔ علوی طی سالیان متمادی، با ارائه خدمات فرهنگی و آموزشی، مفتخر است که توانسته تا حد توان در راه اعتلای کیفی فرهنگ و آموزش گام بردارد و با توجه به این رسالت خطیر و جامعیت بخشیدن به برنامه‌های آموزشی خویش اقدام به تهیه مجموعهٔ حاضر نماید.

کتاب پیش رو برای دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم منطبق با آخرین نسخهٔ کتاب درسی تألیف شده است، همچنین این کتاب برای آمادگی و تسلط کامل بر دروس پایه دهم و یازدهم می‌تواند بسیار آموزنده و مفید باشد.

مؤلف کتاب در مقدمه به شیوایی رئوس مطالب را شرح داده است، پس سخن را کوتاه و شما را به مطالعه کتاب دعوت می‌نماییم. امیدواریم آموزش این کتاب، به رشد و شکوفایی علم و دانش و پرورش شایستگی‌ها در نسل جوان یاری رساند. در خاتمه از همهٔ دست اندرکاران محترم که در مسیر پر فراز و نشیب تدوین و نشر کتاب زحمات فراوانی کشیده اند سپاسگزاری می‌نماییم و از تمامی شما عزیزان خواهشمندیم جهت بهبود و ارتقای سطح کیفیت کتاب پیشنهادات و انتقادات خود را از طریق سایت alavi.ir و شماره های تماس ذکر شده در صفحه شناسنامه با ما در میان بگذارید.

مقدمه مؤلف

«به نام او که به ما اندیشیدن آموخت»

سپاس خدای بزرگ که به ما اندیشیدن آموخت.

توفیق دیگری نصیبمان شد تا بتوانیم کتاب دیگری را به رشتهٔ تحریر درآوریم.

کتابی که پیش روی شماست هندسه (۳) نام دارد که از سه فصل ماتریس، مقاطع مخروطی و بردارها تشکیل شده است.

مباحث این کتاب بسیار ساده تر از مباحث کتاب های سال های قبل است که به عنوان هندسه تحلیلی چاپ می شد. هندسه (۳) کتابی روان و ساده است.

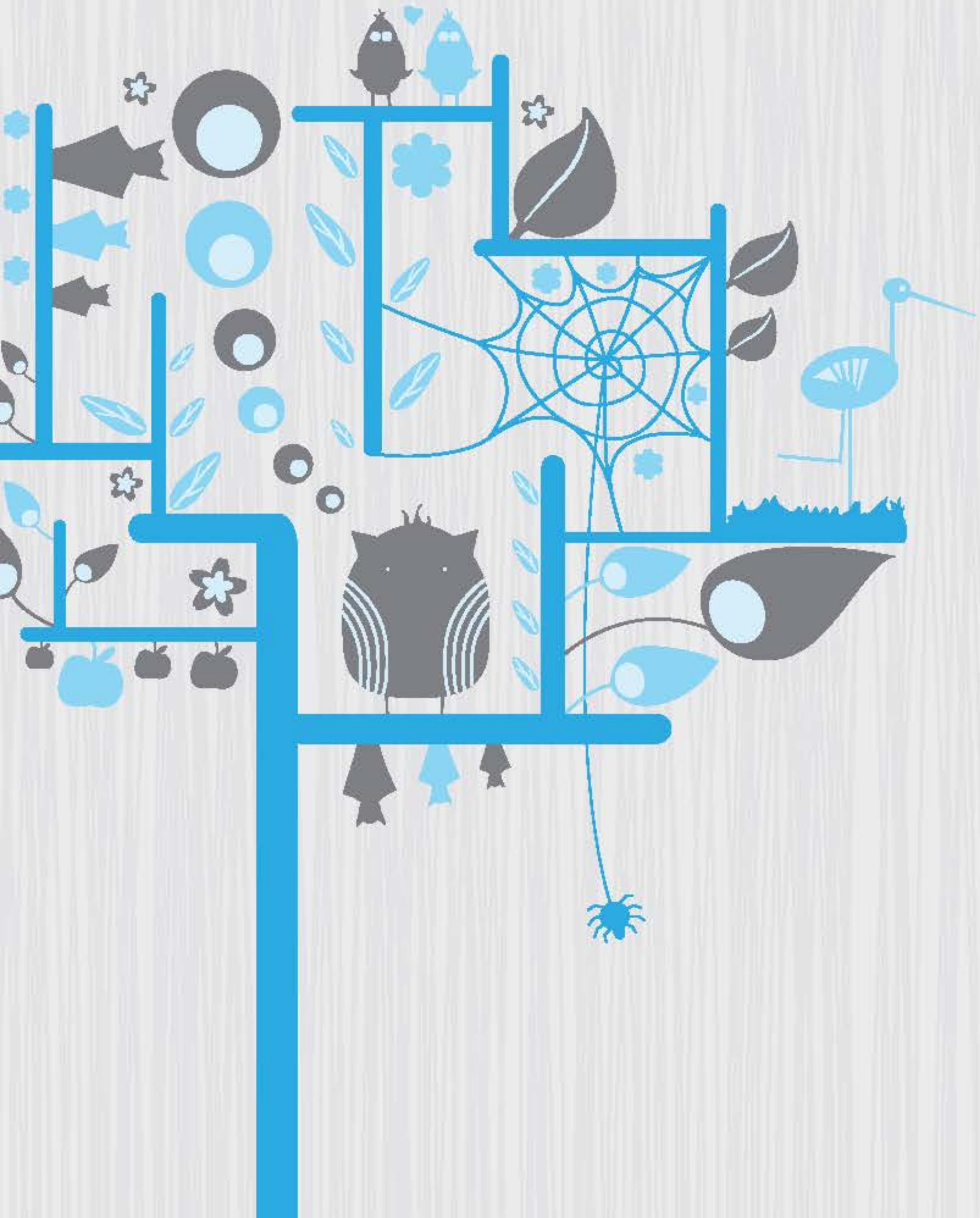
مهندسان آینده با خواندن این کتاب و تمرین و تکرار آن و حل تست ها می توانید به راحتی تست های کنکور را پاسخ دهید.

امیدواریم که این کتاب و مطالب آن، قدرت هندسی شما را بالا ببرد و همچنین از خداوند متعال تندرستی و شادکامی شما را خواستاریم.

نصیری، ابراهیم پور

تقدیم به:

- همهٔ آن‌ها که تا امروز در مسیر آموزش تلاش کرده‌اند.
- و شما که قرار است در آیندهٔ نزدیک، نقش علمی مهمی ایفا کنید.



فهرست


ماتریس و کاربردها
۱

درس ۱ تعریف ماتریس

ماتریس آرایش سطری و ستونی اعداد است. منظور از آرایش چیزی شبیه به جدول می‌باشد. هر ماتریس را با نماد $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نمایش می‌دهند که:

الف) A اسم ماتریس است که معمولاً با حروف بزرگ نمایش داده می‌شود.

ب) a_{ij} درایه‌ی ماتریس نامیده می‌شود که i نمایش سطر و j نمایش ستون است.

ج) m تعداد سطر و n تعداد ستون می‌باشد.

د) $m\times n$ مرتبه‌ی ماتریس می‌باشد.

پس مدل کلی ماتریسِ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ به‌صورت مقابل خواهد بود:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & \dots & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

a_{ij} درایه‌ی حاصل از برخورد سطر i ام و ستون j ام ماتریس می‌باشد؛ مثلاً در ماتریسِ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$ عدد مربوط به $a_{۲۲}$ عددی است که در سطر دوم و ستون دوم قرار دارد؛ یعنی $a_{۲۲}=-۲$.

انواع ماتریس

ماتریس سطری

هر ماتریس از مرتبه‌ی $۱\times n$ را ماتریس سطری می‌نامیم. ماتریس سطری فقط یک سطر دارد:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix}_{۱\times n}$$

مثال ۱:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۱\times ۳}$$

ماتریس ستونی

هر ماتریس از مرتبه‌ی $m\times ۱$ را ماتریس ستونی می‌نامیم. ماتریس ستونی فقط یک ستون دارد: $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ \vdots \\ a_{m۱} \end{bmatrix}$ مثل ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۴\times ۱}$$

ماتریس صفر

ماتریسی که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با $O_{m\times n}$ نشان داده می‌شود. (در بعضی مواقع به‌صورت $\overline{O}_{m\times n}$ نیز نوشته می‌شود.)

ماتریس مربعی

اگر در ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ، $m=n$ باشـد، ماتریس مربعی است. (یعنی تعداد سـطرها و ستون‌های آن برابر می‌باشد) پس ماتریس مربعی به‌صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ نشان داده می‌شود که A را یک ماتریس مربعی از مرتبه n $(n\times n)$ می‌نامیم. به‌عنوان مثال ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times ۲} ,\ B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ & \sqrt{۲} \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} ,\ C=[۴]_{۱\times ۱}$$

نکته اگر $i=j$ باشد، در این صورت a_{ij} درایه‌های روی قطر اصلی می‌شود و اگر $i>j$ باشد، a_{ij} درایه‌های زیر قطر اصلی می‌شود و اگر $i<j$ باشد، a_{ij} درایه‌های بالای قطر اصلی می‌شود.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس قطری: ماتریس مربعی که درایه‌های غیر از قطر اصلی‌اش صفر باشند (درایه‌های قطر اصلی می‌تواند صفر باشد یا نباشد) و ضابطه‌ی تعریف درایه‌های ماتریس قطری به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i\neq j \\ f(i,j) & i=j \end{cases}$ خواهد بود

مثال ۲:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس اسکالر: ماتریسی قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی برابر هستند و رابطه‌ی ماتریس اسکالر به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i\neq j \\ \lambda & i=j \end{cases}$ خواهد بود. مثال:

$$C=[۲] \text{ و } A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

نکته با توجه به تعریف ماتریس‌های قطری و اسکالر می‌توان گفت: هر ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است ولی هر ماتریس قطری ممکن است ماتریسی اسکالر نباشد.

ج) ماتریس همانی: ماتریس اسکالری است که درایه‌های قطر اصلی آن یک باشند. ماتریس همانی $n\times n$ را با نماد I_n نشان می‌دهند و $I_n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۱ & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد. معروف‌ترین ماتریس همانی ۲×۲ و ۳×۳ که $I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است. ضابطه‌ی ماتریسی، ماتریس همانی به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i\neq j \\ ۱ & i=j \end{cases}$ است.

د) ماتریس بالامثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر است و تابع ماتریسی آن به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i>j \\ f(i,j) & i\leq j \end{cases}$ است.

مثال ۳:

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \text{ و } A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

هـ) ماتریس پایین‌مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر است و تابع ماتریسی آن به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & i<j \\ f(i,j) & i\geq j \end{cases}$ است.

تساوی دو ماتریس

شرط این‌که دو ماتریس برابر باشند، این است که اولاً هم‌مرتبه باشند و ثانیاً همه‌ی درایه‌ها، نظیر به نظیر باهم برابر باشند و به زبان ریاضی به این صورت نوشته می‌شود:

$$[a_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$$

مثال ۴: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۵ & y+z\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x+y & x+z\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}$ مساوی باشند، $(x+y+z)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

$$A=B \xleftrightarrow{\forall i,j} a_{ij}=b_{ij}$$

$$\begin{cases}x+y=۹ & (۱)\\ x+z=۲ & (۲) \Rightarrow (۱)+(۲)+(۳) \Rightarrow ۲x+۲y+۲z=۱۴ \xrightarrow{\div ۲} x+y+z=۷\\ y+z=۳ & (۳)\end{cases}$$

ضرب عدد در ماتریس

اگر بخواهیم عدد حقیقی را در یک ماتریس ضرب کنیم، کافی است که در همه‌ی درایه‌های آن ضرب کنیم؛ یعنی:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A=\lambda[a_{ij}]_{m\times n}=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

جمع و تفریق دو ماتریس

برای این‌که بتوانیم دو ماتریس را جمع (تفریق) کنیم، باید هم‌مرتبه باشند و کافی است که درایه‌ها را نظیر به نظیر جمع (تفریق) کنیم، یعنی:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \text{ و } B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$$

خواص جمع ماتریس

اگر ماتریس‌های A، B و C هم‌مرتبه و r و s اعداد حقیقی باشند، در این صورت:

الف) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)

ب) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

پ) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (عضو خنثی جمع)

ت) $r(A+B)=rA+rB$

ث) $(r+s)A=rA+sA$

ج) $A+B=B+C \Rightarrow A=C$ حذف‌پذیری

چ) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ عضو قرینه

ح) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

خ) $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال ۵: اگر $2A-3I+\begin{bmatrix}1&2\\2&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-9\end{bmatrix}$ باشد و مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر (-4) باشد، m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ داریم:

$$a+d=-4$$

$$\begin{bmatrix}2a&2b\\2c&2d\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\2&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-9\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a-2&2b+2\\2c+2&2d-3+m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2a-2=0\Rightarrow a=1\xrightarrow{a+d=-4}1+d=-4\Rightarrow d=-5$$

$$2d-3+m=-9\Rightarrow 2(-5)-3+m=-9\Rightarrow m=4$$

ضرب ماتریس‌ها

فرض کنیم $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ باشند، شرط ضرب‌پذیری $A\times B$ این است که $n=p$ باشد. یعنی تعداد ستون‌های ماتریس اول برابر تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد، در این صورت داریم:

$$A\times B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\times\left[b_{ij}\right]_{n\times q}=\left[c_{ij}\right]_{m\times q}=C$$

پس مرتبه‌ی ماتریس $C=A\times B$ معلوم می‌شود. عنصرهای ماتریس C به‌صورت رو به رو می‌باشد:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

یعنی برای به‌دست آوردن هر عنصر ماتریس C باید سطر i ام از ماتریس A در ستون j ام از ماتریس B ضرب شود. مثلاً اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{3\times 2}$ باشد:

$$A\times B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}\times\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_{11}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\\c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\\vdots\end{cases}$$

مثال ۶: از رابطه $\begin{bmatrix}x&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=0$، مقدار x کدام است؟

۱) $2\pm\sqrt{2}$ ۲) $3\pm\sqrt{3}$ ۳) $-3\pm\sqrt{5}$ ۴) $-3\pm\sqrt{7}$

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

$$\begin{bmatrix}x&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+3&2x+3&x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2x+3+x+1=x^2+6x+4=0\Rightarrow x=-3\pm\sqrt{5}$$

مثال ۷: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=۳\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه «۲» صحیح است.

$$AB=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۴+۳=۷$$

خواص ضرب ماتریس ها

اگر A ، B و C سه ماتریس و I ماتریس همانی باشند، داریم:

الف) $AB\neq BA$ (ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد)

ب) $A(B+C)=AB+AC$ (خاصیت پخشی)

ج) $AI=IA=A$ (عضو خنثی در ضرب ماتریس‌ها)

د) $(AB)C=A(BC)$ (خاصیت شرکت‌پذیری در ضرب ماتریس‌ها)

هـ) $\overline{O}A=A\overline{O}=\overline{O}$

و) $AB=AC \not\Rightarrow B=C$ (قاعده‌ی حذف در ماتریس‌ها برقرار نیست)

ز) $AB=O \not\Rightarrow A=O$ یا $B=O$ (اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس برابر صفر باشد، لزومی ندارد یکی از آن‌ها برابر صفر باشد)

ح) اتحادهای جبری در ماتریس‌ها درست نیست؛ مگر در حالتی که دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند که بعداً در مورد آن صحبت خواهیم کرد.

ضرب ماتریس های قطری و مثلثی

جمع و ضرب دو ماتریس قطری، ماتریسی قطری است و جمع و ضرب دو ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی)، ماتریسی بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

$$\begin{bmatrix}a & ۰\\ ۰ & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & ۰\\ ۰ & b'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa' & ۰\\ ۰ & bb'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b' & c'\\ ۰ & d' & e'\\ ۰ & ۰ & f'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa' & ? & ?\\ ۰ & dd' & ?\\ ۰ & ۰ & ff'\end{bmatrix}$$

برای درایه‌هایی که با (?) مشخص شده، قبل از ضرب کردن قابل پیش‌بینی نمی‌باشند.

نکته: حاصل‌ضرب، مجموع و تفاضل هر دو ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) هم مرتبه، ماتریسی بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

نکته: حاصل‌ضرب، مجموع و تفاضل هر دو ماتریس قطری هم‌مرتبه، ماتریسی قطری است.

توان های یک ماتریس

گاهی با حســاب کردن توان دوم، ســوم و ... یک ماتریس، می‌توانیم الگوی خاصی برای پیدا کردن توان‌های بالاتر حدس بزنیم. این الگو را می‌توان به کمک استقرای ریاضی ثابت کرد.

۱) $A^{0}=I$

۲) $A^{1}=A$

۳) $A^{2}=A.A$

۴) $A^{3}=A.A^{2}=A^{2}.A$

۵) $A^{4}=A.A^{3}=A^{3}.A=A^{2}.A^{2}$
$\vdots$

۶) $A^{n}=A.A^{n-1}=A^{n-1}.A$

۷) $A^{m}.A^{n}=A^{n}.A^{m}=A^{m+n}$

۸) $(A^{m})^{n}=A^{mn}$

۹) $(rA)^{n}=r^{n}A^{n} \qquad r\in\mathbb{R}$

۱۰) تساوی $(AB)^{n}=A^{n}B^{n}$ لزوماً برقرار نیست

مثال ۸: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس A^{10} کدام است؟

۱) 2^{7} ۲) 2^{9} ۳) 2^{11} ۴) 2^{12}

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

$$A^{2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=2A$$

$$A^{3}=A^{2}.A=(2A).A=2A^{2}=2(2A)=4A=2^{2}A$$

$$\vdots$$

$$A^{10}=2^{9}A=\begin{bmatrix}2^{9} & 2^{9}\\ 2^{9} & 2^{9}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مجموعه درایه ها}}4\times 2^{9}=2^{11}$$

ماتریس خود توان

اگر در ماتریس A رابطه‌ی $A^{2}=A$ به‌دست بیاید، یعنی همه‌ی توان‌های ماتریس برابر A خواهد بود.
به این ماتریس، ماتریس خودتوان گفته می‌شود، یعنی همه‌ی توان‌های ماتریس برابر خودش می‌باشد. به زبان ریاضی گفته می‌شود:

$$A^{2}=A \Rightarrow A^{n}=A\ ,\ n\in\mathbb{N}$$

نکته اگر $A^{2}=I$ باشد، توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد A برابر A می‌شود و به زبان ریاضی می‌توان گفت:

$$A^{2}=I \Rightarrow \begin{cases}A^{2n}=I\\ A^{2n-1}=A\end{cases},\ n\in\mathbb{N}$$

نکته چون داریم $I^{2}=I\times I=I$، پس ماتریس همانی خودتوان است؛ یعنی $I^{n}=I$

ضرب و توان های ماتریس مربعی

اگر A یک ماتریس مثلثی باشد، بعضی از عنصرهای توان n ام این ماتریس قابل محاسبه است. مثلاً درایه‌های روی قطر اصلی به توان n می‌رسند.

$$\begin{bmatrix}a & b & d\\ 0 & c & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}a^{n} & ? & ?\\ 0 & c^{n} & ?\\ 0 & 0 & f^{n}\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b' & c'\\ 0 & d' & e'\\ 0 & 0 & f'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa' & ? & ?\\ 0 & dd' & ?\\ 0 & 0 & ff'\end{bmatrix}$$

توان های ماتریس قطری

برای به توان رساندن ماتریس قطری کافی است که قطر اصلی به توان برسد:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

نکته: برای به توان رساندن ماتریس‌های شبه‌قطری به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} a^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & b^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & c^{2n} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^{2n+1} \\ 0 & b^{2n+1} & 0 \\ c^{2n+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

مثال ۹: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$، حاصل $A^{10} - A^9$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

پاسخ: گزینه «۴» صحیح است.

$$\begin{cases} A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow A^{10} - A^9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: برای ماتریس خاص $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته: می‌توان ۸ تا از درایه‌های توان n ام ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به راحتی پیدا کرد:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & nx & ? \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته برای توان ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته ماتریس‌های پوچ توان: اگه ماتریس A مربعی باشد و حداقل یک n پیدا شود که به ازای آن $A^n = \bar{O}$ باشد، ماتریس A را پوچ‌توان می‌نامیم و در این صورت به ازای هر $m \geq n$، $A^m = O$ خواهد بود. توجه داشته باشید که در ماتریس مثلثی اکید (ماتریس مثلثی که درایه‌های قطر صفر است) حداقل مقدار n که A پوچ‌توان باشد، مرتبه‌ی ماتریس است؛ مثلاً برای مثلثی اکید یک ماتریس 3×3 خواهیم داشت: $A^3 = O$.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \bar{O}$$

مثال ۱۰: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های ماتریس $A + A^2 + A^3 + A^4$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

با توجه به نکتهٔ بالا $A^3 = \bar{O}$ پس $A^4 = \bar{O}$ پس داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{O} + \bar{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموعه درایه ها}} 1 + 5 + 3 = 9$$

نکته اگر دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند به هر توانی که برسند باز هم تعویض‌پذیرند و برعکس.

$$AB = BA \xrightarrow{m,n \in \mathbb{N}} A^m B^n = B^n A^m$$

و در حالت خاص که $A = B$ است داریم:

$$A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n}$$

ماتریس های تعویض پذیر

اگر $AB = BA$ باشد، در این صورت ماتریس A و B را تعویض‌پذیر می‌نامیم. می‌دانیم که در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، اما در برخی حالات ماتریس‌های B و A تعویض‌پذیرند.

۱) درحالت کلی اتحادهای جبری درماتریس‌هابرقرارنیست‌ولی‌اگربرقرارباشد،دوماتریس تعویض‌پذیر هستندوبلعکس،مثلاًاگر $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ باشد، نتیجه می‌شود که $AB = BA$ و در مورد همه‌ی اتحادها این رابطه برقرار است. در غیر این صورت حق استفاده از اتحاد را نداریم، مثلاً اگر $AB \neq BA$ باشد:

$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

۲) اگر دو ماتریس قطری هم‌مرتبه باشند، در این صورت تعویض‌پذیرند، مثلاً برای 3×3 داریم:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

۳) اگر A، B و I سه ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه در حالت‌های زیر A و B تعویض‌پذیرند:

الف) اگر یکی از ماتریس‌ها همانی باشد؛ یعنی:

$$AI=IA=A$$

ب) اگر یکی از ماتریس‌ها صفر باشد؛ یعنی:

$$AO=OA=O$$

ج) اگر $A=B$ باشد، یعنی:

$$A=B\ \Rightarrow\ AB=BA=B^2=A^2$$

دقت کنید که این موارد فقط تعدادی حالت خاص هستند که دو ماتریس A و B تعویض‌پذیرند. در حالت کلی ممکن است ماتریس‌های دیگر هم که به این صورت نیستند، تعویض‌پذیر باشند.

مثال ۱۱: اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند و $AB=2BA$، آن‌گاه $(A-B)^2$ کدام است؟

۱) A^2-AB+B^2 ۲) $A^2-2BA+B^2$ ۳) $A^2-3BA+B^2$ ۴) $A^2-3AB+B^2$

پاسخ: گزینه «۳» صحیح است.

چون دو ماتریس تعویض‌پذیر نیستند پس اتحادهای جبری برای آن‌ها صادق نیست.

$$(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2\xrightarrow{AB=2BA}A^2-(2BA)-BA+B^2=A^2-3BA+B^2$$