درس: ریاضیات گسسته

بنام افریدگار اعداد و اشکال:

نام آزمون: پک طلایی گسسته بخش استدلال

تهیه و تنظیم: استاد کرد

پدرام کرد

۱) برای .... درستی گزارۀ «اگر $۳p + ۲$ اول باشد، p نیز اول است.» می‌توان از روش .... استفاده کرد.

۱) رد – مثال نقض
۲) اثبات – برهان خلف
۳) رد – برهان خلف
۴) اثبات – در نظر گرفتن همۀ حالت‌ها

۲) اگر x و y دو عدد صحیح باشند، کدام گزاره همواره درست است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

۱) $x + y = ۲k \rightarrow xy = ۲k$
۲) $x + y = ۲k + ۱ \rightarrow xy = ۲k$
۳) $x + y = ۲k \rightarrow xy = ۲k + ۱$
۴) $x + y = ۲k + ۱ \rightarrow xy = ۲k + ۱$

۳) درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

۱) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی عدد وسطی است.
۲) اگر $۳p + ۲$ اول باشد، p نیز اول است.
۳) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای برابر ۱ دارد.
۴) اگر x گنگ باشد، $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

۴) چه تعداد از عبارت‌های زیر مثال نقض دارد؟

الف) میانگین اعداد طبیعی ۱ تا n برابر $\frac{n+۱}{۲}$ است.

ب) اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد آن‌گاه $\alpha - \beta$ نیز گویا است.

پ) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

ت) عدد $۲^{۲^n} + ۱$ به ازای همۀ عددهای طبیعی n، عددی اول است.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۵) اگر x و y دو عدد گویا و α و β دو عدد گنگ باشند، کدام یک از موارد زیر الزاماً درست هستند؟

۱) $\frac{x}{\alpha} \in Q$
۲) $x(y+\beta) \in R - Q$
۳) $\alpha^{\beta} \in R - Q$
۴) $x + \alpha \in R - Q$

۶) چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

الف) میانگین اعداد طبیعی ۱ تا n برابر با $\frac{n+۱}{۲}$ است.

ب) به ازای همۀ اعداد طبیعی n، حداقل یکی از اعداد $۲^n - ۱$ و $۲^n + ۱$ عددی اول است.

ج) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی و متوالی بر ۶بخش‌پذیر است.

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۷) اگر x و y اعدادی گنگ و z و t اعدادی گویا باشند، چه تعداد از عبارت‌های زیر همواره درست است؟ ($t, z \neq ۰$)

الف) $\frac{t}{z} \in Q$
ب) $z(x)^t \in \mathbb{R} - Q$
ج) $۲\sqrt{۳} + y \in \mathbb{R} - Q$
د) $x^z \in \mathbb{R} - Q$

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۸) کدام‌یک از اعداد زیر برای گزارهٔ «اگر n عددی طبیعی و زوج باشد، $2^n - n$ بر n بخش‌پذیر است.» مثال نقض محسوب نمی‌شود؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۹) چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

الف) به ازای هر عدد طبیعی n، $2^n - 1$ عددی اول است.

ب) اگر n عددی اول باشد، $2^n + 1$ عددی اول است.

پ) اگر $2^n - 1$ عددی اول باشد، آنگاه n اول است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰) کدام‌یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

۱) اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، $4k + 1$ مربع کامل است.

۲) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $24k + 1$ نوشت.

۳) باقی‌مانده مکعب هر عدد فرد بر ۸ برابر ۱ است.

۴) حاصلضرب هر ۴ عدد متوالی بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۱۱) اگر حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، آنگاه کدام نتیجهٔ زیر همواره درست است؟

۱) عدد وسط زوج است. ۲) عدد وسط فرد است. ۳) یکی از این ۳ عدد مضرب ۶ است. ۴) یکی از این ۳ عدد مضرب ۴ است.

۱۲) چه تعداد از گزاره‌های زیر با مثال نقض رد می‌شوند؟

الف) اگر a و b دو عدد صحیح و متوالی باشند، عدد ab زوج است.

ب) اگر a و b دو عدد صحیح و متوالی باشند، عدد $ab + a$ مربع کامل است. $(a > b)$

ج) اگر a و b دو عدد صحیح و زوج متوالی باشند، عدد ab بر ۶ بخش‌پذیر است.

د) اگر a و b دو عدد صحیح و فرد متوالی باشند، عدد $ab + 1$ مربع کامل است.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳) چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

الف) اگر p و q اعدادی اول باشند، مجموع آنها نیز عددی اول است.

ب) همهٔ اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $6k + 1$ نوشته می‌شوند.

ج) تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴) کدام گزینه را نمی‌توان با مثال نقض کرد؟

۱) به ازای همهٔ اعداد طبیعی n، عدد $2^{2^n} + 1$، عددی اول است.

۲) به ازای اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ برای n، عدد $2^n - 1$ عددی اول است.

۳) اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند بطوریکه $AB = \bar{O}$ آنگاه $A = \bar{O}$ یا $B = \bar{O}$ است.

۴) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۵) چه تعداد از گزاره‌های زیر را نمی‌توان با مثال نقض رد کرد؟

الف) حاصل‌ضرب سه عدد متوالی بزرگ‌تر از یک، بر ۱۲ بخشپذیر است.

ب) اگر حاصل‌ضرب سه عدد متوالی بر ۱۲ بخشپذیر باشد، قطعاً یکی از این سه عدد مضرب ۴ است.

ج) مجموع سه عدد متوالی بر ۳ بخشپذیر است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶ کدام گزینه را می‌توان با مثال نقض رد کرد؟

(۱) میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.
(۲) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی برابر با عدد وسط است.
(۳) اگر m حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی و متوالی باشد، $۴m+۱$ مربع کامل است.
(۴) به ازای تمام اعداد طبیعی n، عدد $۲^{n^۲}+۱$ عددی اول است.

۱۷ کدام گزاره مثال نقض دارد؟

(۱) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.
(۲) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد $۴k+۱$ مربع کامل است.
(۳) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.
(۴) به ازای هر عدد طبیعی n، عبارت $n^۲-۵n+۷$ فرد است.

۱۸ برای .... درستی گزارهٔ «به‌ازای هر عدد طبیعی a، $a^۲-۷a+۱۱$ عددی فرد است.» از روش .... استفاده می‌کنیم.

(۱) رد – مثال نقض
(۲) رد – در نظر گرفتن همه حالت‌ها
(۳) اثبات – مستقیم
(۴) اثبات – در نظر گرفتن همه حالت‌ها

۱۹ چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان به روش مستقیم اثبات کرد؟

الف) اگر مجموع دو عدد زوج باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها نیز زوج است.
ب) اگر مجموع دو عدد فرد باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها نیز فرد است.
ج) اگر مربع عددی فرد را بر ۸ تقسیم کنیم، باقی‌مانده مساوی ۱ می‌شود.
د) اگر حاصل‌ضرب دو عدد زوج باشد، تفاضل آن‌ها نیز زوج است.

(۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۲۰ برای آنکه ثابت کنیم برای هر عدد طبیعی n، عبارت $n^۲-۳n+۵$ همواره فرد است، از روش اثبات به کمک در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها استفاده می‌کنیم. در این اثبات از کدام هم‌ارزی زیر استفاده می‌شود؟

(۱) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$
(۲) $(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$
(۳) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\vee(q\Rightarrow r)$
(۴) $(p\wedge q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$

۲۱ اگر $x_۱,x_۲,x_۳,\cdots,x_n$ اعدادی صحیح و $y_۱,y_۲,y_۳,\cdots,y_n$ نیز همان اعداد ولی به‌ترتیبی دیگر باشند در این صورت عبارت $(x_۱-y_۱)(x_۲-y_۲)\cdots(x_n-y_n)$ همواره .... است و روش اثبات آن به کمک .... می‌باشد. (n عددی فرد می باشد.)

(۱) فرد – برهان خلف
(۲) فرد – درنظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)
(۳) زوج – برهان خلف
(۴) زوج – در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (روش اشباع)

۲۲ کدام گزینه جملهٔ زیر را کامل می‌کند؟

برای .... درستی گزارهٔ $n^۲+۹n+۵$ به‌ازای هر عدد طبیعی n عددی فرد است می‌توان از روش .... استفاده کرد.

(۱) رد – مثال نقض
(۲) رد – برهان خلف
(۳) اثبات – برهان خلف
(۴) اثبات – در نظر گرفتن همهٔ حالات

۲۳ فرض کنید a عددی گویا و b عددی گنگ باشد، به‌طوری که ab عددی گویا باشد. حاصل $ab^۲+a^۳+۳$ کدام است؟

(۱) ۰
(۲) ۳
(۳) به‌طور یکتا به دست نمی‌آید.
(۴) چنین چیزی امکان ندارد.

۲۴ اگر α و β دو عدد .... و $\alpha+\beta$ .... باشد، آنگاه $\alpha-\beta$ و $\alpha+۲\beta$ هردو گنگ هستند.

(۱) گنگ– گنگ
(۲) گویا– گنگ
(۳) گنگ– گویا
(۴) گویا– گویا

۲۵ اگر x و y و z و t و n به‌ترتیب اعداد طبیعی و متوالی باشند که میانگین آن‌ها نیز زوج است، حاصل $۶z+۵n$ همواره به کدام صورت است؟ $(q\in\mathbb{Z})$

(۱) $۲q$
(۲) $۲q+۱$
(۳) $۳q$
(۴) $۳q+۱$

۲۶ کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همواره درست نیست؟

۱) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی و زوج متوالی باشد، آن‌گاه $n+1$ مربع کامل است.

۲) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی و فرد متوالی باشد، آن‌گاه $n+1$ مربع کامل است.

۳) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $4n+1$ مربع کاملی است.

۴) اگر n حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آن‌گاه $8n+1$ مربع کامل است.

۲۷ برای اثبات درستی گزارهٔ «مربع هیچ عدد طبیعی‌ای به فرم $5k+2$ نیست» به شیوهٔ در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، برای n چند حالت مختلف در نظر گرفته می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۸ فرض کنید می‌خواهیم با در نظر گرفتن همهٔ حالات اثبات کنیم که عدد n^2-5n+7 عددی فرد است. اگر $n=2k-1$ باشد، آن‌گاه باید نشان دهیم کدام‌یک از عبارات زیر عددی فرد است؟

۱) $4k^2-10k+7$ ۲) $4k^2-14k+13$ ۳) $4k^2-12k+9$ ۴) $4k^2-6k+3$

۲۹ چند عدد طبیعی مانند n در مجموعهٔ اعداد کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که به‌ازای آن $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج شود؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

۳۰ اگر $A=1+2+3+\cdots+n$، به ازای چند عدد دو رقمی n عدد A زوج است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۶ ۳) ۴۴ ۴) ۴۰

۳۱ اگر a و b دو عدد صحیح و $a-2b|5a+3b$، حداقل مقدار $\alpha+\beta$ به‌طوری که $a-2b|\alpha a$ و $a-2b|\beta b$ کدام است؟ $(\alpha,\beta\in N)$

۱) ۲۶ ۲) ۱۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۳۲ چه تعداد از زوج مرتب‌هایی مانند (a,b) از اعداد صحیح با شرایط $-10\leq a\ ,\ b\leq 10$ وجود دارد به طوری که تساوی $(a+b)^2=a^2+b^2$ برقرار باشد؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

۳۳ چند زوج مرتب مانند (a,b) از اعداد حقیقی و ناصفر وجود دارد به طوری که تساوی $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$ برقرار باشد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۴ اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، در اثبات درستی گزارهٔ $a^2+b^2+c^2\geq ab-ac-bc$ به روش بازگشتی به کدام رابطهٔ بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(a-b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2\geq 0$

۲) $(a-b)^2+(a+c)^2+(b-c)^2\geq 0$

۳) $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$

۴) $(a+b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0$

۳۵ چند زوج‌مرتب (x,y) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد، به‌طوری که به‌ترتیب روابط $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ و $x^2+y^2=(x+y)^2$ برقرار باشند.

۱) هیچ - هیچ ۲) هیچ - بی‌شمار ۳) یک - یک ۴) یک - بی‌شمار

۳۶) a_1 و a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1 و b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. آنگاه $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ ....

۱) همواره زوج است.
۲) همواره فرد است.
۳) فقط در حالتی که a_1 و a_2 و a_3 زوج باشند، زوج است.
۴) اگر a_1 و a_2 و a_3 فرد باشند، فرد است.

۳۷) چه تعداد از ترکیب‌های دوشرطی زیر صحیح است؟ ($a,b\in\mathbb{R}$)

الف) $a=b\Leftrightarrow a^3=b^3$

ب) $a=b\Leftrightarrow a^2=b^2$

پ) $a<b\Leftrightarrow a^2<b^2$

ت) $a<b\Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۳۸) کدام‌یک از نامساوی‌های زیر برای هردو عدد حقیقی مخالف صفر x و y برقرار نیست؟

۱) $|x+y|+2\geq|x|+y+2$
۲) $x^2+xy+y^2\geq 0$
۳) $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$
۴) $(x^2+1)(y^2+1)\geq(xy+1)^2$

۳۹) برای اثبات کدام گزاره به روش بازگشتی به رابطهٔ بدیهی و همواره درست $(a-b)^2\geq 0$ می‌رسیم؟ (a و b اعدادی حقیقی، غیر صفر و مثبت هستند)

۱) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq\frac{2}{a+b}$
۲) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$
۳) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$
۴) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{a+b}$

۴۰) در اثبات نامساوی $a^2+ab+b^2\geq 0$ به کمک روش بازگشتی، به رابطهٔ بدیهی $(\frac{ma}{2}+nb)^2+\frac{kb^2}{4}\geq 0$ رسیده‌ایم. حاصل $m+2n+bk$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$
۲) ۳
۳) ۵
۴) ۶

۴۱) برای اثبات گزارهٔ $(x^2+z^2)(t^2+4y^2)\geq(kxy+zt)^2$ به روش بازگشتی به رابطهٔ همواره درست $(xt-2yz)^2\geq 0$ رسیده‌ایم. k برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۲) k کدام باشد تا گزارهٔ «اگر $x=1$ باشد آن‌گاه $(x-1)(3x^2-6x+k)=0$ است.» قضیه‌ای دو شرطی باشد؟ ($x\in\mathbb{R}$)

۱) ۱
۲) ۳
۳) -1
۴) ۲

۴۳) چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان به‌صورت قضیهٔ دو شرطی نوشت؟

الف) اگر k عددی طبیعی باشد، آن‌گاه $k^3>k^2$ است.

ب) اگر $x+\frac{1}{x}\geq 2$ باشد آن‌گاه $x>0$ است ($x\neq 0$).

ج) اگر $x^2<y^2$ باشد، آن‌گاه $x<y$ است. (x و y مثبت‌اند)

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۴۴) برای اثبات نامساوی $(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)\geq(ac+bd)^۲$ به صورت بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(ad+bc)^۲\geq ۰$ ۲) $(ad-bc)^۲\geq ۰$ ۳) $(ac+bd)^۲\geq ۰$ ۴) $(ac-bd)^۲\geq ۰$

۴۵) اگر A، B و C سه مجموعهٔ دلخواه از U باشند آنگاه کدام دسته از گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند؟

۱) $A=C$ و $B-A=B-C$ ۲) $A'\cap B'\cap C'=C'$ و $A\cup B\subseteq C$

۳) $A'\subseteq B'$ و $A\cup B=B$ ۴) $A=C$ و $A-B=C-B$

۴۶) اگر n عددی صحیح باشد، کدام گزینه دو گزارهٔ هم‌ارز نیستند؟

۱) n زوج است و $n^۲$ زوج است. ۲) n فرد است و $n^۳$ فرد است. ۳) n زوج است و $۲n+۳$ فرد است. ۴) n فرد است و $۳n+۲$ فرد است.

۴۷) گزارهٔ $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

۱) $(x-۱)^۲+۲(y-۱)^۲\geq ۰$ ۲) $x^۲+(y-۱)^۲+y^۲\geq ۰$

۳) $(x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲\geq ۰$ ۴) $x^۲(y-۱)^۲+(x-۱)^۲\geq ۰$

۴۸) به ازای چند زوج مرتب ناصفر (x,y) حداقل یکی از دو روابط $\frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ یا $\frac{۱}{x-y}=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}$ برقرار است؟ ($x,y\in R$, $x\neq y$)

۱) ۰ ۲) بیشمار ۳) ۱ ۴) ۴

۴۹) گزارهٔ $x^۲+xy+y^۲\geq ۰$ با چه تعداد از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟ ($x,y\in\mathbb{R}$)

الف) $(x+\frac{y}{۲})^۲+\frac{۳y^۲}{۴}\geq ۰$ ب) $(\frac{x}{۲}+y)^۲+\frac{۳x^۲}{۴}\geq ۰$

ج) $(x+y)^۲+\frac{(x-y)^۲}{۲}\geq ۰$

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵۰) اگر x و y اعدادی حقیقی باشند، برای اثبات نامساوی $x^۲+۵y^۲\geq ۳(x+y+xy-۳)$ به روش بازگشتی به کدام رابطه همواره درست می‌رسیم؟

۱) $(x-۳)^۲+(y-۳x)^۲+(y-۳)^۲\geq ۰$ ۲) $(x-۳)^۲+(۳y-x)^۲+(y-۳)^۲\geq ۰$

۳) $(x+۳)^۲+(۳y-x)^۲+(y+۳)^۲\geq ۰$ ۴) $(x-۳y)^۲+(y-۳x)^۲+(y+۳)^۲\geq ۰$

۵۱) چه تعداد از گزاره‌های زیر هم‌ارز هستند؟

الف) $A=C$ و $A\cup B=A\cup C$

ب) $C'\cap B'\cap A'=A'$ و $B\cup C\subseteq A$

ج) $B=C$ و $A\cap B=B\cap C$

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۵۲ کدام دو گزاره هم‌ارز هستند؟ $(n \in \mathbb{Z})$

الف) حاصل ضرب n و $n+3$ عددی فرد است.

ب) $5n^2+3$ عددی زوج است.

ج) $\frac{n+4}{2}$ عددی صحیح است.

د) n^2+2n عددی فرد است.

۱) الف و د ۲) ب و ج ۳) ج و د ۴) ب و د

۵۳ برای اثبات گزارهٔ $(4x^2+9y^2)(z^2+t^2) \geq (2xt+3yz)^2$ به روش بازگشتی به رابطهٔ بدیهی $(mxz+nyt) \geq 0$ رسیده‌ایم. حاصل $m-n$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۷

۵۴ کدامیک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست نیست؟

۱) $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$

۲) $(a+b)^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow (a=0 \vee b=0)$

۳) $(x^2-1=0) \Leftrightarrow (x-1=0)$

۴) $x>0; x \leq y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \geq 1$

۵۵ در اثبات درستی رابطهٔ $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (a و b دو عدد حقیقی مثبت و غیرصفر هستند.)

۱) $(a+b)^2 \geq 0$ ۲) $(a-b)^2 \geq 0$ ۳) $(a+2b)^2 \geq 0$ ۴) $(a-2b)^2 \geq 0$

۱) ۴ ۳ ۲ **۱** اگر قرار دهیم $p=1$ آن‌گاه $3p+2=5$ است و عددی اول است اما $p=1$ عددی اول نیست پس گزاره در حالت کلی درست نیست و با یک مثال نقض این را نشان داده‌ایم.

۲) ۴ ۳ **۲** ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه اول: اگر حاصل جمع x و y زوج باشد، یا هر دوی این اعداد زوج هستند یا هر دو فرد هستند. در حالت اول حاصل‌ضرب زوج می‌شود ولی در حالت دوم حاصل‌ضرب فرد می‌شود. پس این گزینه همواره درست نیست.

گزینه دوم: اگر حاصل جمع x و y فرد باشد، یکی از اعداد زوج است و یکی فرد است و در این حالت به خاطر عدد زوج، حاصل‌ضرب زوج می‌شود. پس این گزینه همواره درست است.

گزینه سوم: در گزینهٔ اول بررسی شد که حالت حاصل‌ضرب زوج هم وجود دارد. پس این گزینه همواره درست نیست.

گزینه چهارم: در گزینه دوم بررسی شد که اگر یکی از اعداد زوج باشد و یکی فرد باشد حاصل‌ضرب همواره زوج است. پس این گزینه همواره غلط است.

۳) ۴ ۳ **۲** ۱ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: عدد اول را x می‌نامیم:

$$\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)}{5}=\frac{5x+10}{5}=x+2\rightarrow \text{عدد وسطی}\checkmark$$

گزینه «۲»: مثال نقض می‌زنیم، اگر $p=1$ باشد آن‌گاه $3\times 1+2=5$ اول است اما p اول نیست.

گزینه «۳»:

$$\text{همه اعداد صحیح}\begin{cases}3k\rightarrow \text{اول نیست.}\\ \left.\begin{array}{l}3k+1\\3k+2\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{بزرگ‌تر از ۳}]{\text{همه اعداد اول}}\end{cases}\begin{cases}p=3k+1\rightarrow p^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1=3k'+1\\ p=3k+2\rightarrow p^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1=3k'+1\end{cases}$$

یعنی باقیمانده تقسیم مربع همه اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ بر ۳ برابر یک است.

گزینه «۴»: حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیر صفر در عدد گنگ برابر با عددی گنگ است پس اگر x گنگ باشد و $\frac{1}{x}$ بخواهد گویا باشد حاصل‌ضرب x در $\frac{1}{x}$ عددی گنگ می‌شود در حالی که می‌دانیم حاصل‌ضرب عددی گویا است (یک عددی گویا است) پس $\frac{1}{x}$ باید گنگ باشد.

۴) ۴ ۳ **۲** ۱ اثبات الف)

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\rightarrow \text{میانگین}=\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}$$

مثال نقض ب) اگر $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=-\sqrt{2}$ آن‌گاه $\alpha+\beta=0$ عددی گویاست ولی $\alpha-\beta=2\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات پ)

$$(a+1)^3-a^3=\cancel{a^3}+3a^2+3a+1-\cancel{a^3}=3\underbrace{a(a+1)}_{2q}+1=\underbrace{6q+1}_{\text{فرد}}$$

مثال نقض ت) مطابق صفحه ۲ کتاب درسی به ازای $n=5$: $2^{2^n}+1=641\times 6700417$ بنابراین عبارت $2^{2^n}+1$ همواره اول نیست!

پس عبارت‌های (ب) و (ت) مثال نقض دارد.

۵) **۴** ۳ ۲ ۱ گزینه «۱» درست نیست. زیرا وارون α یعنی $\frac{1}{\alpha}$ گنگ است پس حاصل ضرب آن در x که گویاست عددی گنگ خواهد بود. (به‌جز حالتی که $x=0$ باشد)

$$\frac{x}{\alpha}=\underbrace{x}_{\text{گویا}}\times\underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{\text{گنگ}}\in R-Q$$

گزینه «۲» درست نیست. زیرا اگر $x=0$ قرار دهیم حاصل کل برابر صفر می‌شود که گویاست.

گزینه «۳» درست نیست. مثال نقض:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ \beta=\sqrt{2}\end{array}\right\}\rightarrow \alpha^{\beta}=\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}=2^1=2\in Q$$

گزینه «۴» همواره درست است. زیرا اگر $x+\alpha$ گویا باشد پس $(\alpha+x)-x$ که تفاضل دو عدد گویاست باید گویا باشد در حالیکه α گنگ است!

۶ گزینهٔ **۳**

الف) این گزاره درست است و مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر با $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است پس میانگین که برابر با مجموع تقسیم بر n است برابر با $\frac{n+۱}{۲}$ است و مثال نقضی در این مورد وجود ندارد.

ب) قرار می‌دهیم $n=۶$ و داریم: $۲^۶-۱=۶۳=۹\times۷$ و $۲^۶+۱=۶۵=۱۳\times۵$ پس این مورد با مثال نقض $n=۶$ رد می‌شود.

ج) از بین سه عدد طبیعی متوالی حتماً یکی بر ۳ بخش‌پذیر است و حتماً یکی زوج است. پس اگر اعداد را در هم ضرب کنیم حاصل‌ضرب حتماً بر $۶=۲\times۳$ بخش‌پذیر است و لذا در این مورد مثال نقضی وجود ندارد.

۷ گزینهٔ **۲** موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر t و z اعدادی گویا باشند حاصل تقسیم‌شان هم گویا می‌شود.

ب) اگر قرار دهیم $z=۱$ و $t=\frac{۲}{۱}$ و $x=\sqrt{۲}$ آن‌گاه داریم $zx^۲=۲\in Q$ پس این مورد هم همواره درست نیست.

ج) اگر قرار دهیم $y=-۲\sqrt{۳}$ داریم $۲\sqrt{۳}+y=۰\in Q$ این مورد نیز همواره درست نیست.

د) اگر قرار دهیم $x=\sqrt{۲}$ و $z=۲$ داریم $x^z=(\sqrt{۲})^۲=۲\in Q$ این مورد همواره درست نیست.

۸ گزینهٔ **۲** عدد ۲^n به ازای مقادیر طبیعی n، هیچ‌گاه بر اعداد ۶، ۱۰ و ۱۲ بخش‌پذیر نیست، پس اعداد $۶-۲^۶$، $۱۰-۲^{۱۰}$ و $۱۲-۲^{۱۲}$ به‌ترتیب بر ۶، ۱۰ و ۱۲ بخش‌پذیر نیستند ولی عدد $۲^۸$ و در نتیجه $۸-۲^۸$ بر عدد ۸ بخش‌پذیر است.

۹ گزینهٔ **۱** گزارهٔ الف به ازای $n=۱$ رد می‌شود.

گزارهٔ ب به ازای $n=۳$ رد می‌شود.

گزارهٔ پ نیز نادرست است.

$$۲^n+۱=۱۷ \qquad n=۴$$

۱۰ گزینهٔ **۳** گزینهٔ «۱»:

$$k=m(m+۱)\,,\ m\in\mathbb{N}\Rightarrow ۴k+۱=۴m(m+۱)+۱=۴m^۲+۴m+۱=(۲m+۱)^۲$$

گزینهٔ «۲»: می‌دانیم هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ را می‌توان به صورت $۶k\pm۱$ نوشت بنابراین مربع آن به صورت زیر خواهد بود:

$$P^۲=(۶k\pm۱)^۲=۳۶k^۲\pm۱۲k+۱=۱۲\underbrace{k(۳k\pm۱)}_{\text{۲q زوج}}+۱=۲۴q+۱$$

گزینهٔ «۳»: به‌عنوان مثال نقض $n=۳$ را در نظر بگیرید که مکعب آن برابر ۲۷ است که در تقسیم بر ۸، دارای باقی‌ماندهٔ ۳ می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: می‌دانیم حاصلضرب هر n عدد متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است، بنابراین حاصلضرب هر ۴ عدد متوالی بر ۲۴ و در نتیجه ۱۲ بخش‌پذیر است.

۱۱ گزینهٔ **۴** حاصل‌ضرب سه عدد ۲، ۳ و ۴، مضرب ۲۴ است، پس این سه عدد مثال نقضی برای گزینه‌های «۱» و «۳» هستند. همچنین حاصل‌ضرب سه عدد ۷، ۸ و ۹، مضرب ۲۴ است که این سه عدد، مثال نقضی برای گزینهٔ «۲» هستند.

۱۲ گزینهٔ **۳** گزارهٔ (ج) با مثال نقض رد می‌شود. فرض کنیم $a=۲$ و $b=۴$ آن‌گاه $ab=۸$ است که بر ۶ بخش‌پذیر نیست.

الف) از دو عدد صحیح متوالی a و b، یکی قطعاً زوج است، پس عدد ab نیز زوج می‌باشد.

ب) $a>b$ است پس داریم:

$$b=a-۱\to ab+a=a(a-۱)+a=a^۲-a+a=a^۲$$

د) فرض می‌کنیم $a=۲k+۱$ و $b=۲k+۳$ باشند، پس داریم:

$$ab=(۲k+۱)(۲k+۳)=۴k^۲+۸k+۳\ \to ab+۱=۴x^۲+۸k+۴=(۲k+۲)^۲$$

۱۳ گزینهٔ **۳**

الف) $p=۲$ و $q=۷$ مثال نقض این گزاره محسوب می‌شود. $p=۲\ ,\ q=۷\Rightarrow p+q=۹\notin P$

ب) $k=۵$ مثال نقض این گزاره محسوب می‌شود زیرا به فرم $۶k+۱$ نوشته نمی‌شود.

ج) اثبات این گزاره به صورت زیر است:

اگر n و $n+۱$ دو عدد صحیح و متوالی باشند داریم:

$$(n+۱)^۳-(n)^۳=n^۳+۳n^۲+۳n+۱-n^۳=۳n^۲+۳n+۱=۳\underbrace{n(n+۱)}_{\text{دو عدد متوالی}}+۱=۳(۲k)+۱=۲\underbrace{(۳k)}_{k'}+۱=۲k'+۱$$

می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره مضرب ۲ است.

۱۴ گزینهٔ **۴** گزینهٔ (۱): $n=۵$ مثال نقض این گزاره محسوب می‌شود. (این عدد در کتاب درسی آمده است)

$$۲^{۲^۵}+۱=۶۴۱\times۶۷۰۰۴۱۷$$

گزینهٔ (۲): $n=۴$ مثال نقض این گزاره محسوب می‌شود.

$$۲^۴-۱=۱۵=۳\times۵$$

گزینهٔ (۳): $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ مثال نقض این گزاره محسوب می‌شود.

$$AB=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

گزینهٔ (۴): برای اثبات این گزاره سه عدد طبیعی و متوالی n، $n+۱$ و $n+۲$ را درنظر می‌گیریم:

$$n+n+۱+n+۲=۳n+۳=۳\underbrace{(n+۱)}_{k}=۳k$$

۱۵ (۳) تنها گزارهٔ (الف) با مثال نقض رد می‌شود. حاصل‌ضرب اعداد متوالی ۵، ۶ و ۷ برابر ۲۱۰ است که بر ۱۲ بخشپذیر نیست.

۱۶ (۴) گزینهٔ (۱): اگر a و b اعداد نامنفی باشند باید حکم $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$ را بررسی کنیم.

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\geq۲\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq۰\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq۰$$

گزینهٔ (۲): پنج عدد طبیعی و متوالی را به صورت $a+۵$، $a+۴$، $a+۳$، $a+۲$ و $a+۱$ در نظر می‌گیریم که میانگین آن‌ها برابر است با:

$$\frac{(a+۱)+(a+۲)+(a+۳)+(a+۴)+(a+۵)}{۵}=\frac{۵a+۱۵}{۵}=a+۳$$

گزینهٔ (۳):

$$m=k(k+۱)\,,\,k\in\mathbb{N}\rightarrow۴m+۱=۴k(k+۱)+۱=۴k^۲+۴k+۱=(۲k+۱)^۲$$

گزینهٔ (۴): $n=۳$ مثال نقض این گزاره محسوب می‌شود، چون $۲^۹+۱=۵۱۳$ است که ۵۱۳ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۷ (۳) گزینه‌ها را یک به یک چک می‌کنیم. گزینهٔ اول: عدد اول را a در نظر می‌گیریم:

$$\text{میانگین پنج عدد متوالی}=\frac{a+(a+۱)+(a+۲)+(a+۳)+(a+۴)}{۵}$$

$$=\frac{۵a+۱۰}{۵}=a+۲\rightarrow\text{این همان عدد وسطی است}$$

این گزاره به ازای هر a برقرار است در نتیجه این گزاره کلاً درست است.

گزینهٔ دوم: عدد اول را a می‌نامیم:

$$a(a+۱)=k\rightarrow۴k+۱=۴a(a+۱)+۱=۴a^۲+۴a+۱\xrightarrow{\text{از اتحاد مربع استفاده می‌کنیم}}۴k+۱=(۲a+۱)^۲$$

مربع کامل شد، پس این گزینه هم کلاً درست است.

گزینهٔ سوم: این گزاره مثال نقض دارد. مثلاً ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت. می‌توان $۲+۰$ نوشت که در این صورت متوالی نیست و ۰ هم طبیعی نیست یا اینکه می‌توان $۱+۱$ نوشت که در این صورت هم متوالی نیست.

گزینهٔ چهارم: اگر n زوج باشد $n^۲$ و $۵n$ زوج هستند. می‌دانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد زوج، زوج است پس $n^۲-۵n$ هم زوج است و حاصل جمع و تفریق عدد زوج و فرد، فرد است پس $n^۲-۵n+۷$ فرد است. اگر n فرد باشد می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد فرد، فرد است پس $n^۲$ هم فرد و $۵n$ هم فرد است. می‌دانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد فرد، زوج است پس $n^۲-۵n$ زوج است و حاصل جمع زوج با فرد (۷) هم در نهایت فرد می‌شود. پس این گزاره کلاً صادق است.

۱۸ (۴) برای اثبات این گزاره از روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها استفاده می‌کنیم. یعنی هر دو حالت زوج یا فرد بودن a را بررسی می‌کنیم.

$$a=۲k\rightarrow a^۲-۷a+۱۱=(۲k)^۲-۷(۲k)+۱۱=۴k^۲-۱۴k+۱۱=۲\underbrace{(۲k^۲-۷k+۵)}_{q}+۱=۲q+۱$$

$$a=۲k+۱\rightarrow a^۲-۷a+۱۱=(۲k+۱)^۲-۷(۲k+۱)+۱۱=۴k^۲+۴k+۱-۱۴k-۷+۱۱$$
$$=۴k^۲-۱۰k+۵=۲\underbrace{(۲k^۲-۵k+۲)}_{q'}+۱=۲q'+۱$$

۱۹ (۱) الف) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases}a=۱\\ b=۳\end{cases}$$

ب) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases}a=۲\\ b=۳\end{cases}$$

ج) گزاره همیشه درست است و با استدلال استنتاجی(اثبات مستقیم) ثابت می شود

$$a=2k+1\Rightarrow a^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1=4\times 2q+1=8q+1$$

د) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$$

۲۰ — ۴ ۳ ۲ **[۱]** در اثبات این مسئله کافی‌ست یک‌بار به‌جای n عدد $\overbrace{\text{زوج}}^{2k}$ و یک‌بار عدد $\overbrace{\text{فرد}}^{2k+1}$ قرار دهیم، درنهایت حاصل فرد خواهد شد. اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن n^2-3n+5 را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزارهٔ $p\vee q\Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم‌ارزی:

$$(p\vee q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$$

شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

۲۱ — ۴ **[۳]** ۲ ۱ به کمک برهان خلف می‌توان ثابت کرد حاصل ضرب عبارت‌های $(x_n-y_n),\cdots,(x_2-y_2),(x_1-y_1)$ همواره زوج است.

۲۲ — **[۴]** ۳ ۲ ۱

نکته: در بعضی از موارد برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن بررسی شود به این روش، اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالات می‌گوییم.

$$\begin{cases}n=\text{زوج}=2k\Rightarrow n^2+9n+5=(2k)^2+9(2k)+5=4k^2+18k+4+1=2(\underbrace{2k^2+9k+2}_{k'})+1\\ =2k'+1=\text{فرد}\\ \text{یا}\\ n=\text{فرد}=2k+1\Rightarrow n^2+9n+5=(2k+1)^2+9(2k+1)+5=4k^2+4k+1+18k+9+5\\ =4k^2+22k+15=4k^2+22k+14+1=2(\underbrace{2k+11k+7}_{k''})+1=2k''+1=\text{فرد}\end{cases}$$

یعنی به‌ازای هر مقدار دلخواهی از n عدد موردنظر همواره فرد است.

۲۳ — ۴ ۳ **[۲]** ۱ اگر a گویا، b گنگ و ab گویا باشد، آن‌گاه a حتماً صفر است، پس:

$$ab^2+a^3+3=0+0+3=3$$

۲۴ — ۴ **[۳]** ۲ ۱ می‌دانیم مجموع و تفاضل دو عدد گویا و گنگ همواره عددی گنگ است.

بنابراین:

$$\underbrace{(\alpha+2\beta)}_{\text{گنگ}}-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}}=\underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}$$

$$\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}}-\underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}=\underbrace{\alpha}_{\text{گنگ}}$$

تذکر: دقت کنید که اگر α و β گنگ و $\alpha+\beta$ نیز گنگ باشد، ممکن است $\alpha-\beta$ گویا باشد, مانند حالت $\alpha=\beta=\sqrt{2}$.

۲۵ — ۴ ۳ ۲ **[۱]** می‌دانیم میانگین ۵ عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. بنابراین:

$$\frac{x+y+z+t+n}{5}=z$$

فرض $z=2k\to t=2k'+1\to n=2k''$

(اگر z زوج باشد، n هم زوج خواهد بود.)

$$6z+5n=6(2k)+5(2k'')=12k+10k''=2(\underbrace{6k+5k''}_{q})=2q$$

۲۶ — **[۴]** ۳ ۲ ۱ اثبات گزینهٔ «۱»:

$$n=2k(2k+2)\to n+1=4k^2+4k+1\to n+1=(2k+1)^2$$

اثبات گزینهٔ «۲»:

$$n=(2k+1)(2k+3)\to n+1=4k^2+8k+4=(2k+2)^2$$

اثبات گزینهٔ «۳»:

$$n=k(k+1)\to 4n+1=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$$

۲۷ — **[۴]** ۳ ۲ ۱ کافی است n را $5k$، $5k+1$، $5k+2$، $5k+3$ و $5k+4$ در نظر گرفته و مسأله را حل کنید.

۲۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$n=۲k-۱\Rightarrow n^۲-۵n+۷=(۲k-۱)^۲-۵(۲k-۱)+۷=۴k^۲-۱۴k+۱۳$$

۲۹ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}=\text{زوج}\rightarrow\frac{n(n+۱)}{۲}=\overbrace{\text{زوج}}^{۲k}\Rightarrow n(n+۱)=۴k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۴k\rightarrow ۱\le ۴k\le ۱۰۰\rightarrow ۱\le k\le ۲۵\\ \text{یا}\\ n+۱=۴k\rightarrow n=۴k-۱\rightarrow ۱\le ۴k-۱\le ۱۰۰\rightarrow ۱\le k\le ۲۵\end{cases}$$

پس در مجموع به‌ازای ۵۰ مقدار طبیعی n عبارت $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ عددی زوج است.

۳۰ **۱** ۲ ۳ ۴

$$A=۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}=۲k\rightarrow n(n+۱)=۴k$$

چون n و $n+۱$ دو عدد متوالی هستند نمی‌توانند هر دو مضرب ۲ باشند، بنابراین دو حالت پیش می‌آید:

$$n=۴q\rightarrow ۱۰\le ۴q\le ۹۹\rightarrow ۳\le q\le ۲۴\rightarrow q=۲۲$$
$$n+۱=۴q\rightarrow n=۴q-۱\rightarrow ۱۰\le ۴q-۱\le ۹۹\rightarrow ۳\le q\le ۲۵\rightarrow q=۲۳$$

بنابراین:

$$\text{مجموع}=۲۲+۲۳=۴۵$$

یعنی به ازای ۴۵ مقدار مختلف n، عدد A زوج است.

۳۱ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{matrix}a-۲b|۵a+۳b\\ a-۲b|(a-۲b)\times ۵\end{matrix}\xrightarrow{\boxed{-}}a-۲b|۱۳b\rightarrow\beta=۱۳$$

$$\begin{matrix}a-۲b|(۵a+۳b)\times ۲\rightarrow a-۲b|۱۰a+۶b\\ a-۲b|(a-۲b)\times ۳\rightarrow a-۲b|۳a-۶b\end{matrix}\xrightarrow{\boxed{-}}a-۲b|۱۳a\rightarrow\alpha=۱۳\rightarrow min(\alpha+\beta)=۱۳+۱۳=۲۶$$

۳۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$(a+b)^۲=a^۲+b^۲\Rightarrow a^۲+۲ab+b^۲=a^۲+b^۲$$
$$\Rightarrow ۲ab=۰\Rightarrow a=۰\ \text{یا}\ b=۰$$

به ازای ۲۱ حالت $a=۰$ و به ازای ۲۱ حالت نیز $b=۰$ است که حالت $(۰,۰)$ تکراری است.

۳۳ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}=\frac{۱}{a+b}\Rightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{۱}{a+b}\Rightarrow(a+b)^۲=ab\Rightarrow a^۲+b^۲+ab=۰\Rightarrow a^۲+b^۲+(a+b)^۲=۰$$

معادلهٔ به دست آمده در مجموعه اعداد حقیقی غیر صفر، جوابی ندارد.

۳۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$a^۲+b^۲+c^۲\ge ab-ac-bc\xrightarrow{\times ۲}۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲\ge ۲ab-۲ac-۲bc\Rightarrow a^۲+a^۲+b^۲+b^۲+c^۲+c^۲-۲ab+۲ac+۲bc\ge ۰$$
$$\Rightarrow(a^۲-۲ab+b^۲)+(a^۲+۲ac+c^۲)+(b^۲+۲bc+c^۲)\ge ۰\Rightarrow(a-b)^۲+(a+c)^۲+(b+c)^۲\ge ۰\ \text{همواره درست}$$

۳۵ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\rightarrow\frac{۱}{x+y}=\frac{x+y}{xy}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}xy=(x+y)^۲\rightarrow x^۲+y^۲+xy=۰\xrightarrow{\times ۲}۲x^۲+۲y^۲+۲xy=۰$$
$$\rightarrow(x+y)^۲+x^۲+y^۲=۰$$

رابطهٔ اخیر به ازای زوج‌مرتبی مانند (x,y) با شرایط مسأله برقرار نیست.

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲\rightarrow x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy\rightarrow xy=۰$$

رابطهٔ اخیر نیز به ازای اعداد صحیح و ناصفر برقرار نیست.

۳۶ **۱** ۲ ۳ ۴ روش اول:

اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ فرد باشد پس هر سه عامل $(a_۱-b_۱)$ و $(a_۲-b_۲)$ و $(a_۳-b_۳)$ هم باید فرد باشند و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد،

یعنی $(a_۱ - b_۱) + (a_۲ - b_۲) + (a_۳ - b_۳)$ باید عددی فرد باشد، اما مجموع این ۳ عبارت صفر است! زیرا $a_۱ + a_۲ + a_۳ = b_۱ + b_۲ + b_۳$ است پس عبارت همواره زوج است.

روش دوم:

عددگذاری

۳۷ ۴ ۳ ۲ ۱ الف) اگر $a = b$ می‌توان نتیجه گرفت $a^۳ = b^۳$ و برعکس اگر $a^۳ = b^۳$ می‌توان گفت $a = b$.

ب) اگر $a = b$ می‌توان ادعا کرد $a^۲ = b^۲$ ولی برعکس خیر! مثلاً $(-۲)^۲ = ۲^۲$ ولی $۲ \neq -۲$.

پ) اگر $a < b$ نمی‌توان ادعا کرد $a^۲ < b^۲$ مثلا $-۳ < ۲$ ولی $(-۳)^۲ \not< ۲^۲$.

ت) اگر $a < b$ نمی‌توان ادعا کرد $\frac{۱}{b} > \frac{۱}{a}$ مثلا $-۳ < ۲$ ولی $\frac{۱}{-۳} \not> \frac{۱}{۲}$.

پس فقط رابطهٔ الف صحیح است.

۳۸ ۴ ۳ ۲ ۱ اثبات گزینهٔ ۲:

$$x^۲ + xy + y^۲ \geq \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲xy + ۲y^۲ \geq ۰ \to (x+y)^۲ + x^۲ + y^۲ \geq ۰ \quad \text{بدیهی}$$

اثبات گزینهٔ ۳:

$$x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ - ۲xy - ۲x - ۲y \geq ۰ \to (x-y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geq ۰ \quad \text{بدیهی}$$

اثبات گزینهٔ ۴:

$$(x^۲+۱)(y^۲+۱) \geq (xy+۱)^۲ \to x^۲y^۲ + x^۲ + y^۲ + ۱ \geq x^۲y^۲ + ۲xy + ۱ \to x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰ \quad \text{بدیهی}$$

مثال نقض گزینهٔ ۱: $x = -۳$ و $y = ۱$

۳۹ ۴ ۳ ۲ ۱

$$(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}) \geq \frac{۴}{a+b} \xrightarrow{\times ab} b + a \geq \frac{۴ab}{a+b} \xrightarrow{\times(a+b)} (a+b)^۲ \geq ۴ab \to a^۲ + b^۲ + ۲ab \geq ۴ab \xrightarrow{-۴ab} a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰$$
$$\to (a-b)^۲ \geq ۰$$

۴۰ ۴ ۳ ۲ ۱ به کمک روش بازگشتی داریم:

$$a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲ + ab + \frac{b^۲}{۴} + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰ \Leftrightarrow (a + \frac{b}{۲})^۲ + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰$$

با توجه به رابطهٔ بدیهی به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{m}{۲} = ۱ \to m = ۲$$
$$n = \frac{۱}{۲} \quad , \quad \frac{k}{۴} = \frac{۳}{۴} \to k = ۳$$
$$\to m + ۲n + k = ۲ + ۱ + ۳ = ۶$$

۴۱ ۴ ۳ ۲ ۱

$$(x^۲ + z^۲)(t^۲ + ۴y^۲) = x^۲t^۲ + ۴x^۲y^۲ + z^۲t^۲ + ۴z^۲y^۲ \geq (kxy + zt)^۲ = k^۲x^۲y^۲ + z^۲t^۲ + ۲kxyzt$$

رابطهٔ همواره درستی که به آن رسیده‌ایم به این صورت است:

$$(xt - ۲yz)^۲ = x^۲t^۲ + ۴y^۲z^۲ - ۴xyzt \geq ۰$$

رابطهٔ اولی را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$x^۲t^۲ + (۴ - k^۲)x^۲y^۲ + ۴y^۲z^۲ - ۲kxyzt \geq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{عبارت } ۴xyzt \text{ را اضافه و کم می‌کنیم}} [x^۲t^۲ + ۴y^۲z^۲ - ۴xyzt] + (۴ - k^۲)x^۲y^۲ + ۲(۲ - k)xyzt \geq ۰$$

قبلاً دیدیم عبارت داخل کروشه مثبت یا برابر با صفر است. مطمئن هستیم $x^۲y^۲$ مثبت است، اما مطمئن نیستیم که $xyzt$ مثبت باشد. پس برای اینکه نتیجه‌ای همیشه درست به دست آوریم باید ضریب $xyzt$ برابر صفر و ضریب $x^۲y^۲$ نامنفی باشد، در نتیجه $k = ۲$ است.

۴۲ ۴ ۳ ۲ ۱ اگر $x = ۱$ باشد که قضیه از یک سمت درست است زیرا $x - ۱ = ۰$ است و در نتیجه $(x-۱)(۳x^۲ - ۶x + k) = ۰$. برای این‌که بخواهیم قضیه دو شرطی باشد باید از سمت دیگر هم قضیه درست شود یعنی اگر $(x-۱)(۳x^۲ - ۶x + k) = ۰$ آن‌گاه $x = ۱$

می‌دانیم $(x-۱)(۳x^۲ - ۶x + k)$ می‌تواند ۱ یا ۳ ریشه در اعداد حقیقی داشته باشد. برای اینکه وقتی $(x-۱)(۳x^۲ - ۶x + k)$ برابر با صفر شد بتوانیم حتماً نتیجه بگیریم که $x = ۱$ و نتیجه‌ای غیر از آن نگیریم، لازم است که $(x-۱)(۳x^۲ - ۶x + k)$ تنها ریشهٔ $x = ۱$ را داشته باشد و دو ریشهٔ مربوط به $(۳x^۲ - ۶x + k)$ در اعداد حقیقی نباشند.

می‌دانیم معادلهٔ درجه دو $ax^۲ + bx + c = ۰$ تنها وقتی دارای پاسخ حقیقی است که $\Delta = b^۲ - ۴ac \geq ۰$ باشد. پس قرار می‌دهیم $\Delta < ۰$ که مطمئن شویم پاسخ حقیقی نداریم.

در نتیجه $(-۶)^۲ - ۴ \times ۳ \times k < ۰$ پس داریم: $k > \frac{۳۶}{۱۲} = ۳$. اما در صورتی که دو ریشهٔ $۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۰$ را بررسی کنیم. داریم $۳x^۲ - ۶x + ۳ = ۳(x-۱)^۲$

پس $k=3$ هم جواب است زیرا آن دو ریشه هم یک هستند.

۴۳ ۱ ۲ **۳** ۴ الف) اگر k عددی طبیعی باشد الزاماً $k^3>k^2$ نیست. به عنوان مثال برای $k=1$ داریم. $k^3=k^2$. لذا این گزاره در حالت کلی برقرار نیست. ضمن این که معکوسش هم الزاماً صادق نیست.

ب) اگر $x+\frac{1}{x}\geq 2$ باشد آن‌گاه $x>0$ است. برای اثبات این قضیه ابتدا از برهان خلف می‌رویم. اگر $x<0$ باشد x و $\frac{1}{x}$ هر دو منفی‌اند و امکان ندارد حاصل جمع دو عدد منفی از صفر بزرگ‌تر شود چه برسد به اینکه از دو بزرگ‌تر شود. برای اثبات عکس قضیه از اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \leftrightarrow x^2+1\geq 2x \leftrightarrow x^2+1-2x\geq 0 \leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

ج) اگر $x^2<y^2$ آن‌گاه رادیکال می‌گیریم و $x<y$ و اگر $x<y$ آن‌گاه به توان دو می‌رسانیم و داریم $x^2<y^2$، پس این قضیه هم دو شرطی است.

۴۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq (ac+bd)^2 \leftrightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq a^2c^2+2acbd+b^2d^2$$

$$\leftrightarrow \cancel{a^2c^2}+a^2d^2+b^2c^2+\cancel{b^2d^2}\geq \cancel{a^2c^2}+2acbd+\cancel{b^2d^2}$$

$$\leftrightarrow a^2d^2-2acbd+b^2c^2\geq 0 \leftrightarrow (ad-bc)^2\geq 0$$

۴۵ ۱ **۲** ۳ ۴ گزینهٔ «۱»: اگر $B=\{1,2,3,4\}$ و $A=\{3,4\}$ و $C=\{3,4,5\}$ آنگاه $B-A$ و $B-C$ با هم برابر است ولی همان‌طور که می‌بینید A و C برابر نیستند.

گزینهٔ «۲»: دو گزاره داده شده هم‌ارز هستند.

$$(A'\cap B')\cap C' \Leftrightarrow (A\cup B)'\cap C'=C' \xrightarrow{\text{متمم}} (A\cup B)\cup C=C \Leftrightarrow A\cup B\subseteq C$$

گزینهٔ «۳»:

$$A=\{1,2\}\ ,\ B=\{1,2,3\}\Rightarrow A\cup B=B$$

ولی $A\subseteq B$ است و در نتیجه $B'\subseteq A'$ می‌باشد.

گزینهٔ «۴»: اگر $A=\{3\}$ و $C=\{4\}$ و $B=\{3,4\}$ باشد آنگاه:

$$\begin{cases} A-B=\varnothing \\ C-B=\varnothing \end{cases} \Rightarrow A-B=C-B$$

ولی همان‌طور که می‌بینیم A با C برابر نیست.

۴۶ ۱ ۲ **۳** ۴ گزینهٔ «۱»: اگر n زوج باشد، توان ۲ آن نیز زوج می‌باشد و برعکس.

گزینهٔ «۲»: اگر n فرد باشد، توان ۳ آن نیز فرد است و برعکس.

گزینهٔ «۳»: عدد $2n+3$ همواره عددی فرد است و به زوج و فرد بودن n بستگی ندارد، پس دو گزاره هم‌ارز نیستند.

گزینهٔ «۴»:

$$n=2k+1\Rightarrow 3(2k+1)+2=6k+5 \to 2\underbrace{(3k+2)}_{q}+1=2q+1 \quad \text{فرد}$$

$$3n+2=2k+1\to 3n=2k-1 \quad \text{فرد}$$

چون $3n$ عددی فرد است، پس n نیز عددی فرد است.

۴۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y \xleftrightarrow{\text{طرفین}\times 2} 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+\underset{1+1}{2}-2xy-2x-2y\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0 \quad \text{بدیهی}$$

۴۸ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\to\frac{1}{x+y}=\frac{y+x}{xy}\to xy=(x+y)^2\to x^2+2xy+y^2=xy$$

$$\to x^2+y^2+xy=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2xy=0 \to (x+y)^2+x^2+y^2=0$$

$\Rightarrow x=0\wedge y=0\wedge x+y=0$ با فرض در تناقض است.

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\to\frac{1}{x-y}=\frac{y-x}{xy}\to (x-y)^2=-xy$$

$$\to x^2-2xy+y^2+xy=0\to x^2+y^2-xy=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2-2xy=0\to (x-y)^2+x^2+y^2=0$$

$\Rightarrow x=0 \wedge y=0 \wedge x-y=0$ با فرض در تناقض است.

پس به ازای هیچ مقدار این دو رابطه برقرار نیست.

۴۹ ۴ ۳ ۲ ۱

الف) $x^2+xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+xy+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow (x+\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4}\geq 0$

ب) $x^2+xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4}+\frac{x^2}{4}+xy+y^2\geq 0 \Leftrightarrow (\frac{x}{2}+y)^2+\frac{3x^2}{4}\geq 0$

گزارهٔ $x^2+xy+y^2\geq 0$ با گزارهٔ (ج) هم‌ارز نیست.

۵۰ ۴ ۳ ۲ ۱

$$x^2+5y^2\geq 3(x+y+xy-3) \Leftrightarrow x^2+5y^2\geq 3x+3y+3xy-9$$

$$\Leftrightarrow x^2+5y^2-3x-3y-3xy+9\geq 0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x^2+10y^2-6x-6y-6xy+18\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(9y^2-6xy+x^2)+(y^2-6y+9)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(3y-x)^2+(y-3)^2\geq \quad \text{همواره درست}$$

۵۱ ۴ ۳ ۲ ۱ الف) اگر $A=\{1,2,3\}$، $B=\{2,4\}$ و $C=\{1,4\}$ باشد، $A\cup B=A\cup C$ اما $A\neq C$ است.

ب)

$$B\cup C\subseteq A \Leftrightarrow A'\subseteq (B\cup C)' \Leftrightarrow A'\subseteq B'\cap C' \Leftrightarrow (B'\cap C')\cap A'=A'$$

ج) اگر $A=\{1,2,3\}$، $B=\{1,4\}$ و $C=\{1,5\}$ آن‌گاه $A\cap B=B\cap C$ اما $B\neq C$ است.

۵۲ ۴ ۳ ۲ ۱ دو گزاره p و q هم‌ارز هستند هرگاه از درستی p، درستی q نتیجه شود و برعکس.

گزارهٔ الف) نادرست است زیرا به ازای مقادیر زوج یا فرد n حاصل ضرب اعداد n و $n+3$ زوج خواهد بود.

گزارهٔ ب) $5n^2$ عددی فرد است؛ پس n^2 و همچنین n باید فرد باشند.

گزارهٔ ج) $\frac{n+4}{2}$ عددی صحیح است؛ پس n عددی زوج است.

گزارهٔ د) n^2+2n عددی فرد است؛ پس n عددی فرد است.

واضح است که گزاره‌های (ب) و (د) هم‌ارز هستند.

اگر $5n^2+3$ زوج باشد پس n^2 و n فرد هستند در نتیجه n^2+2n عددی فرد است و اگر n^2+2n عددی فرد باشد پس n عددی فرد است در نتیجه $5n^2+3$ عددی زوج است.

۵۳ ۴ ۳ ۲ ۱

$$(4x^2+9y^2)(z^2+t^2)\geq (2xt+3yz)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2z^2+\cancel{4x^2t^2}+\cancel{9y^2z^2}+9y^2t^2\geq \cancel{4x^2t^2}+\cancel{9y^2z^2}+12xtyz$$

$$\Leftrightarrow 4x^2z^2+9y^2t^2\geq 12xtyz \Leftrightarrow 4x^2z^2+9y^2t^2-12xtyz\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2xz-3yt)^2\geq 0$$

$$\rightarrow m=2\ ,\ n=-3 \ \rightarrow m-n=2-(-3)=5$$

تذکر: نامساوی $(-2xz+3yt)^2\geq 0$ نیز از این رابطه حاصل می‌شود که در این صورت $m=-2$ و $n=3$ و $m-n=-5$ است.

۵۴ ۴ ۳ ۲ ۱ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: واضح است که درست است یعنی از $a=b$ می‌توان نتیجه گرفت $a^3=b^3$ و برعکس.

گزینهٔ ۲: اگر عبارت $(a+b)^2=a^2+b^2$ را به‌صورت زیر بنویسیم داریم:

$$a^2+b^2+2ab=a^2+b^2 \Leftrightarrow 2ab=0 \Leftrightarrow (a=0)\vee(b=0)$$

پس این گزینه هم درست است.

گزینهٔ ۳: می‌توان گفت که از $x-1=0$ می‌توان $x^2-1=0$ را نتیجه گرفت ولی از $x^2-1=0$ لزوماً نتیجهٔ $x-1=0$ به‌دست نمی‌آید. زیرا به‌ازای $x=-1$، $x^2-1=0$ برقرار است اما $x-1=0$ درست نیست پس دو گزاره با هم هم‌ارز نبوده و ترکیب دو شرطی نادرست است.

گزینهٔ ۴، داریم:

$$x\leq y \xrightarrow[\frac{1}{x}>0 \text{ پس } x>0]{\text{طرفین در } \frac{1}{x} \text{ ضرب می‌شود.}} \frac{1}{x}\times x\leq \frac{1}{x}\times y \Rightarrow 1\leq \frac{y}{x}$$

اگر عملیات جبری را به‌صورت برعکس اعمال کنیم از عبارت $1\leq \frac{y}{x}$ و فرض $x>0$ عبارت $x\leq y$ حاصل می‌شود پس دو شرطی است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵۵

$$\frac{a}{b^{۲}}+\frac{b}{a^{۲}}\geq\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\leftrightarrow\frac{a^{۳}+b^{۳}}{a^{۲}b^{۲}}\geq\frac{b+a}{ab}\xrightarrow{\times a^{۲}b^{۲}}$$

$$a^{۳}+b^{۳}\geq ab^{۲}+ba^{۲}\leftrightarrow(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})\geq ab(a+b)\xrightarrow{\div(a+b)}$$

$$a^{۲}-ab+b^{۲}\geq ab\leftrightarrow a^{۲}-۲ab+b^{۲}\geq ۰\leftrightarrow(a-b)^{۲}\geq ۰$$ همیشه درست

۱	**۱**	۲	۳	۴
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	۱	**۲**	۳	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	۱	**۲**	۳	۴
۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۱	۱	۲	۳	**۴**
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۲۰	**۱**	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۲۴	۱	۲	**۳**	۴
۲۵	**۱**	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	**۴**
۲۷	۱	۲	۳	**۴**
۲۸	۱	**۲**	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	**۴**
۳۰	**۱**	۲	۳	۴
۳۱	**۱**	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	**۳**	۴
۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۳۴	**۱**	۲	۳	۴
۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۳۶	**۱**	۲	۳	۴
۳۷	۱	**۲**	۳	۴
۳۸	**۱**	۲	۳	۴
۳۹	۱	**۲**	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	**۴**
۴۱	۱	۲	**۳**	۴
۴۲	۱	**۲**	۳	۴
۴۳	۱	۲	**۳**	۴
۴۴	۱	**۲**	۳	۴
۴۵	۱	**۲**	۳	۴
۴۶	۱	۲	**۳**	۴
۴۷	۱	۲	**۳**	۴
۴۸	**۱**	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	**۳**	۴
۵۰	۱	**۲**	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	**۴**
۵۲	۱	۲	۳	**۴**
۵۳	**۱**	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	**۳**	۴
۵۵	۱	**۲**	۳	۴