پدرام کرد

۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3 < x^2$.

۳ گزارهٔ درست را اثبات کنید و برای گزارهٔ نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

الف مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۴ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ب هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارد که رابطهٔ $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ برقرار باشد.

۵ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۶ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2$$

۷ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

ب هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

۸ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

۹ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

۱۰ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۱۱ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

۱۲ ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

۱۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

۱۴ برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

۱۵ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۱۶ گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

(برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^۲+y^۲+۱\geq xy+x+y$)

۱۷ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$(I)\ \ x^۲+y^۲+z^۲ \geq xy+yz+zx$

$(II)\ \ x^۲+y^۲+۱ \geq xy+x+y$

۱۸ به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

۱۹ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$.

۲۰ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a>۰$ آن‌گاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$.

۲۱ اگر عدد طبیعی $a>۱$، در دو شرط $a|۴k+۹$ و $a|۶k+۱۴$ صدق کند، مقدار a را بیابید.

۲۲ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$ ثابت کنید a عددی اول است.

۲۳ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$m\leq n\ ,\ a|b\Rightarrow a^m|b^n$

۲۴ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(راهنمایی: فرض کنید $(m,m+۱)=d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۲۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۲۶ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

۲۷ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۲۸ ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۲۹ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a، b، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۳۰ فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به‌طوری که $a|۳n+۴$ و $a|۲n+۳$. نشان دهید $a=۱$.

۳۱ اگر $n\in\mathbb{N}$، $n|۹k+۷$ و $n|۷k+۶$، ثابت کنید $n=۱$ یا $n=۵$.

۳۲ گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

الف برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

ب برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$.

پ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است، اگر و تنها اگر $(a,b)|m$.

۳۳ جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید.

الف a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$، آن‌گاه عدد .... شمارندهٔ عدد .... است.

ب m عددی صحیح است. حاصل $(۲m,۶m^۳)$ برابر با .... است.

۳۴) حاصل هریک را به‌دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $([m^{۲},m],m^{۵})$

ب) $(۲m,۶m^{۳})$

پ) $(۳m+۱,۳m+۲)$

ت) $[m^{۷},(m^{۲},m^{۳})]$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

۳۵) اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=۱$.

۳۶) جاهای خالی را پر کنید.

الف

$[a,b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

$۱)\ a|c\,,\ b|c$ $\qquad$ $۲)\forall m>۰, \cdots\cdots\cdots\cdots$

۳۷) اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۵a+۴,۲a+۳)$ را به‌دست آورید.

۳۸) فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^{۲},۳۵a]$ را به‌دست آورید.

۳۹) درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید:

الف) اگر $a|b$ آن‌گاه $[a,b]=|b|$.

ب) معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,b)|m$.

۴۰) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به‌ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم a را بر ۳۰ بیابید.

۴۱) ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

۴۲) ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۴۳) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۴۴) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۴۵) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^{۳}-n$.

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^{۳}-n$.)

۴۶) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^{۲}+b^{۲}+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۴۷) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۴۸) پاسخ هریک از سؤالات زیر را به‌دست آورده و دلیل پاسخ خود را به‌طور کامل بنویسید.

الف) اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^{۲}+b^{۲}+۳$ را بر $\underline{۸}$ بیابید.

ب) مطلوب است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ بر عدد $\underline{۷}$

۴۹) اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲a-۵b)$ بر ۱۷ را بیابید.

۵۰) اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲m-۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

۵۱) ثابت کنید اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$, $(k \in \mathbb{W})$ نوشته می‌شود.

۵۲) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۲a+۳$ بر ۸ را به‌دست آورید.

۵۳) اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد. در این صورت با استفاده از هم‌نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۵۴ اگر باقیماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد $۵n - ۳m$ بر ۱۳ را به دست آورید.

۵۵ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مردادماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۵۶ اگر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۵۷ با استفاده از بسط دوجمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a,b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۵۸ عکس عبارت «اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$» را بیان و اثبات کنید.

۵۹ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۶۰ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۶۱ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۶۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است.

$k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۶۳ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۶۴ فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$, $a,b \in \mathbb{Z}$ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$, $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

۶۵ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۹ + (۲۷)^۷$ را بر ۱۳ بیابید.

۶۶ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را به‌دست آورید.

۶۷ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید.

۶۸ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۶۹ ثابت کنید عدد $۲۳^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۷۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

۷۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم $(۳۸^{۳۶} + ۱۹)$ را بر ۴ به‌دست آورید.

۷۲ رقم یکان عدد $(۲^{۱۱} + ۷)$ را به‌دست آورید.

۷۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۷^{۳۰}$ بر ۱۵ را به‌دست آورید.

۷۴ باقی‌مانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به‌دست آورید.

۷۵ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۷۶ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۷۷ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $۵x+۲y=۱۸$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۷۸ معادلهٔ همنهشتی $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ را حل و جواب عمومی آن را به‌دست آورید.

۷۹ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را به‌دست آورید.

الف

$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب

$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

پ

$۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۸۰ معادلهٔ $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.

۸۱ معادلهٔ هم‌نهشتی $۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۸۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=۱!+۲!+۳!+\cdots+۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید. (رقم یکان A را بیابید.)

۸۳ با تبدیل معادلهٔ سیاله خطی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۲۹۰۰۰$ به معادلهٔ همنهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۸۴ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)

۸۵ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دستهٔ گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۸۶ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۸۷ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۸۸ معادله همنهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

۸۹ معادله سیاله $۲x+۵y=۱۹$ را حل کنید.

۹۰ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x+۱۳y=۷$ را به‌دست آورید.

۹۱ کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می کند؟

۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۷۴

۹۲ کدام گزینه مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع یک لوزی است.
۲) هر عدد اول بزرگ‌تر از ۲، فرد است.
۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است.
۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان سوم آن است.

۹۳ اثبات کدام قضیه ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف <u>ندارد</u> ؟

۱) عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.
۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می توان رسم کرد.
۳) در یک صفحه از یک نقطه خارج خط مفروض فقط یک خط می توان بر آن خط عمود کرد.
۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۹۴ به ازای چند عدد اول P، عدد $۴۸P+۱$ مجذور کامل یک عدد طبیعی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۵ عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$، مجذور عدد دو رقمی $\overline{cc}$ است. $a-b$، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۹۶ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت های $۵n-۲$ و $۷n+۳$ ، نسبت به هم غیر اوّل اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۷ با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[۱۵۴,(۴۲۹,۶۲۷)]$، کدام است؟

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

۹۸ اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $۱۲n+۷$ و $۵n-۲$ نسبت به هم اول نباشند، آن گاه بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

۱) ۵۹ ۲) ۶۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۹

۹۹ به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n، دو عدد به صورت های $۱۱n+۴$, $۲۵n+۹$ نسبت به هم اوَل اند؟

۱) ۸۶ ۲) ۹۰ ۳) ۸۹ ۴) ۸۷

۱۰۰ به‌ازای چند عدد طبیعی n، هر دو عدد $۷n+۵$ و $۱۱n+۲$، مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بیشمار

۱۰۱ به ازای هر عدد طبیعی $n \leq n_{۰}$، دو عدد « $۲n+۷$, $۱۱n-۳$ » نسبت به هم اول‌اند. بیش‌ترین مقدار $n_{۰}$ کدام است؟

۱) ۳۵ ۲) ۳۷ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

۱۰۲ در مجموعهٔ اعداد طبیعی اگر $(۳n^{۲}-۲n+۶,۳n+۵)=d$ و $d \neq ۱$ باشد، عدد d کدام است؟

۱) ۴۱ ۲) ۴۳ ۳) ۴۷ ۴) ۵۳

۱۰۳ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=۲^{m}\times ۵^{n}$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{۴۰}$ ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x کدام است؟

۱) ۶۴۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۸۰

۱۰۴ درتقسیم عدد ۱۶۵ برعددطبیعی b، خارج قسمت مجذور باقیمانده است، چندعدد b می توان یافت؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵ درتقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقیمانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۰۶ اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a > ۹$ بر ۱۱، ۳ واحد بیشتر از باقی‌ماندهٔ آن باشد احتمال این که عدد $a-۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۱}$

۱۰۷ چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقیمانده تقسیم‌های آن بر دو عدد ۴ و ۵، برابر ۱ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۸ اگر $a^{2}-1 \overset{m}{\equiv} a^{3}-a^{2}-a+1$ و $(a^{2}-1,m)=1$، آنگاه:

(۱) $m|a-2$ (۲) $m|a-1$ (۳) $m|a+1$ (۴) $m|a+2$

۱۰۹ باقیمانده تقسیم عدد طبیعی N بر عدد ۳۱ برابر ۲۶ می‌باشد. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر خارج قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N، کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۱۰ از رابطه همنهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$، کدام نتیجه گیری در پیمانه ۷ نادرست است؟

(۱) $2a \equiv -1$ (۲) $a \equiv 4$ (۳) $a \equiv 3$ (۴) $3a \equiv 2$

۱۱۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟

(۱) ۲۹ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۴۱

۱۱۲ دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته هم ارزی به پیمانه m همنهشت شده اند. اگر $(m,7)=1$، باقیمانده عدد m^{m} بر ۷ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱۳ اگر عدد $2^{n}-1$ بر عدد ۱۰۵ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۱۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۳ برابر ۵ و باقی‌ماندهٔ تقسیم دو برابر عدد A بر عدد ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲، کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۱۵ در همنهشتی به پیمانه m سه عدد a و ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند، کوچکترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه Z به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز شود، کدام است؟

(۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۳ (۳) ۱۰۴ (۴) ۱۰۶

۱۱۶ از رابطه‌ی همنهشتی (پیمانه‌ی ۹) $18a \overset{9}{\equiv} 12b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ $(a\ ,\ b \neq 0)$

(۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ (۲) $b \overset{3}{\equiv} 0$ (۳) $3a \overset{3}{\equiv} b$ (۴) $3a \overset{3}{\equiv} 2b$

۱۱۷ اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۶۳ چگونه است؟

(۱) عدد اول (۲) مضرب ۲ (۳) مضرب ۳ (۴) مضرب ۵

۱۱۸ اگر باقیمانده تقسیم عددی بر ۹ و ۱۳ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقیمانده تقسیم این عدد بر ۳۹ کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

۱۱۹ از رابطه همنهشتی (پیمانه ۱۸) $9a \equiv 6b$، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

(۱) (پیمانه ۲) $a \equiv 0$ (۲) (پیمانه ۳) $b \equiv 0$ (۳) (پیمانه ۶) $a \equiv 2$ (۴) (پیمانه ۶) $3a \equiv 2b$

۱۲۰) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی A بر اعداد ۵ و ۷ و ۱۱ به ترتیب ۲ و ۴ و ۸ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگترین عدد سه‌رقمی A بر عدد ۲۳ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۴

۱۲۱) فرض کنید خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد طبیعی سه رقمی m بر n به‌ترتیب، ۲۹ و ۱۷ باشند. تعداد عددهای طبیعی m بخش‌پذیر بر ۵، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۲) چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد، که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن اعداد بر ۴۳۰، با مجذور خارج قسمت، برابر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۲۳) اگر m بزرگترین عدد طبیعی باشد که $(۱۰-m)! \overset{۳۶}{\equiv}$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $m^{۱۲۳}$ بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۴) به ازای چند عدد طبیعی کوچک تر از ۵۰، عدد $۴۲+۷^{n}$ بر ۴۳ بخش پذیر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۲۵) به ازای کدام مقادیر n از عدد طبیعی، عبارت $۲^{n+۱}+۲^{n+۴}+۵^{۲n+۱}$، بر عدد ۲۳ بخش‌پذیر است؟

۱) تمام اعداد ۲) فقط اعداد فرد ۳) فقط اعداد زوج ۴) فقط اعداد مضرب ۷

۱۲۶) عدد $A+۷^{۵۴}\times ۱۳$ بر ۴۳ بخش پذیر است. کوچک ترین عدد طبیعی A، کدام می باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

۱۲۷) باقیمانده تقسیم عدد $۲^{۴۲}-۳^{۴۲}$ برعدد ۳۵ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲۸) به ازای کدام مقادیر n از عدد طبیعی، عبارت $۱+۵^{۳n+۲}+۵^{۶n+۴}$، بر عدد ۳۱ بخش‌پذیر است؟

۱) فقط اعداد فرد ۲) فقط اعداد زوج ۳) فقط اعداد مضرب ۵ ۴) تمام اعداد

۱۲۹) اگر عدد $a+۷^{۲۰۰}$ مضرب ۱۹ باشد. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۳۰) باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۵^{۲۰}$ بر ۴۱، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۳۱) تعداد اعداد دو رقمی a به طوری که $۱۱^{a}\equiv ۱$ (پیمانه ۱۹) کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۷ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۱۳۲) عدد $a+۷^{۱۵}$ مضرب ۱۷ است. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

۱۳۳) در رابطه هم باقیمانده بر ۱۱ عدد $۵^{۱۰}$ به کدام دسته هم ارزی تعلق دارد؟

۱) [۱] ۲) [۳] ۳) [۵] ۴) [۷]

۱۳۴ باقیمانده ی تقسیم عدد $۱۳^{۴۳}$ بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳۵ اگر عدد $a + ۷^{۱۳}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳۶ باقیمانده ی تقسیم $(-۶)^{۲۳}$ بر عدد ۳۳ کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۱۵ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۳۷ اگر عدد $\left(۶^n - ۳^n\right)$ مضرب ۲۵ باشد. کوچکترین عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۱۳۸ اگر $a^p = ۱۰k + ۷$ آنگاه رقم یکان عدد $a^{p+۴}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳۹ اگر عدد $۲^n - ۱$ بر عدد ۲۱۷ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۶۰} - ۳^{۶۰} + ۶^{۶۰}$، بر عدد ۳۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۱۴۱ عدد طبیعی N در پایه ی ۷ به صورت $(a۵۱b)$ نوشته شده. اگر عدد N مضرب ۹ باشد، چند جواب برای مقادیر a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۲ عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ ممکن است مضرب کدام عدد نباشد ؟

۱) ۷ ۲) ۳۷ ۳) ۳۱ ۴) ۱۳

۱۴۳ اگر یک عدد چهاررقمی به صورت $\overline{a۷۰b}$ مضرب ۴۴ باشد ولی مضرب ۵۵ نباشد، آن گاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۴۴ عدد پنج‌رقمی $N = \overline{a۷۳b۸}$ بر ۴۴ بخش پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم کوچکترین عدد N بر ۹، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴۵ اگر عدد طبیعی پنج رقمی $\overline{۵abb۶}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر باشد، رقم b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۴۶ عدد شش رقمی $\overline{a۶۳b۲۹}$ بر عدد ۹۹ بخشپذیر است، رقم a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۷ عدد پنج‌رقمی $N = \overline{a۷۴۶b}$ مضرب ۳۶ می‌باشد. باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ ترین عدد N بر ۱۱ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۸ چند عدد پنج رقمی به صورت $\overline{a\,۳\,۵\,b\,۲}$، بخش‌پذیر بر ۳۶ موجود است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۴۹) میانگین بزرگترین و کوچکترین عدد سه رقمی به‌صورت $\overline{aba}$ که مضرب عدد ۱۲ باشند کدام است؟

۱) ۳۴۸ ۲) ۵۴۰ ۳) ۵۷۰ ۴) ۵۷۴

۱۵۰) به ازای برخی از اعداد طبیعی n، دو عدد به صورت‌های $۱۱n + ۷$ و $۹n + ۲$ نسبت به هم اول نیستند. کوچکترین مقدار n در این حالت مضرب کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۵۱) به‌ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $\alpha|۱۳n+۳$ و $\alpha|۷n+۴$ و $\alpha \neq ۱$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۵۲) اگر عدد $۲x^۲ - x - ۶$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگترین عدد سه رقمی x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵۳) در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b، باقیمانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر a مضرب ۶ باشد ، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۵۴) اگر عدد طبیعی به صورت $۲n+۱$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باقیمانده‌ی عدد طبیعی به صورت $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ بر عدد ۲۵، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۵) به‌ازای بعضی از مقادیر، $n \in \mathbb{N}$ اگر $\alpha|۱۱n+۳$ و $\alpha|۵n+۴$ و $\alpha \neq ۱$، آنگاه تعداد اعداد دورقمی n در این حالت، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵۶) معادله‌ی همنهشتی $۷۲x \equiv ۱$ (پیمانه ۳۱) در مجموعه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۱۵۷) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت‌های $۵n+۴$ و $۱۳n-۳$، نسبت به هم غیر اول‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۵۸) در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b خارج قسمت ۲۱ و باقیمانده ۳۷ می باشد، چند عضو از مجموعه جواب های a مضرب ۵ می باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۹) اگر $(۳۵۷, ۶۲۹) = ۳۵۷x + ۶۲۹y$، آنگاه کوچکترین عدد مثبت $x+y$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۶۰) قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به‌ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۶۱) اگر $(۲۲۱, ۳۵۷) = ۲۲۱x + ۳۵۷y$ باشد، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی x، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۶۲ معادلهٔ سیالهٔ $۲۵x + ۱۲y = ۱۱۱۰$ بر روی مجموعهٔ اعداد طبیعی (N) چند زوج جواب دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶۳ معادلهٔ سیالهٔ $۹x + ۱۳y = ۷۲۵$، در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۶۴ مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه‌رقمی x که در معادلهٔ $۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲$ صدق کند، کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۶۵ به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ الف) گزاره درست است زیرا دو عدد فرد a و a' را درنظر می‌گیریم؛ داریم:

$$a = ۲k + ۱ \quad , \quad a' = ۲k' + ۱ \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

$$a + a' = ۲k + ۱ + ۲k' + ۱ = ۲(\underbrace{k + k' + ۱}_{k''}) = ۲k'' \Rightarrow$$ عدد زوج است.

ب) گزاره نادرست است.

از مثال نقض استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۴$ قرار دهیم؛ داریم:

$$۲^n - ۱ \xlongequal{n=۴} ۲^۴ - ۱ = ۱۵ = ۳ \times ۵ \Rightarrow$$ اول نیست.

۲ برای مثال: $x = -۰/۱$ یا $x = -۱$ را در نظر بگیرید.

۳

نادرست

الف

$$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in Q^C$$
$$\sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰ \notin Q^C$$

درست

ب

$$(۲k + ۱)^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k(k + ۱) = ۴ \times ۲q = ۸q$$

۴

الف درست

ب نادرست (برای مثال $x = ۰$ و $y = ۲$ را در نظر بگیرید.)

۵ الف) اثبات این گزاره به صورت زیر است:

اگر $۲n - ۱$ که $n \in \mathbb{Z}$ عدد فرد دلخواهی باشد آنگاه داریم:

$$(۲n + ۱)^۲ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ = ۲(۲n^۲ + ۲n) + ۱ = ۲q + ۱ \rightarrow$$ فرد است.

$$(۲n + ۱)^۳ = ۸n^۳ + ۱۲n^۲ + ۶n + ۱ = ۲(۴n^۳ + ۶n^۲ + ۳n) + ۱ = ۲q + ۱$$ فرد است.

ب) فرض کنیم $n + ۱$، $n + ۲$، $n + ۳$، $n + ۴$ و $n + ۵$ $\quad (n \in \mathbb{N} \cup \{۰\})$ ۵ عدد طبیعی متوالی باشند، داریم:

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{۵n + ۱۵}{۵} = n + ۳ \rightarrow$$ عدد وسطی

بنابراین حکم برقرار است.

۶

$$x^۲ + y^۲ = x^۲ + y^۲ + ۲xy \rightarrow ۲xy = ۰ \rightarrow x = ۰ \text{ یا } y = ۰$$

اگر حداقل یکی از اعداد x و y برابر صفر باشند تساوی برقرار است به‌عنوان مثال $x = ۰$ و $y = ۱$ را در نظر بگیرید.

۷

درست

الف

$$k = n(n + ۱) \Rightarrow k = n^۲ + n \Rightarrow ۴k = ۴n^۲ + ۴n \Rightarrow ۴k + ۱ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ \Rightarrow ۴k + ۱ = (۲n + ۱)^۲$$

درست

ب

فرض کنیم $(a, a + ۱) = d \ , \ a \in \mathbb{Z}$ درنتیجه داریم:

$$\begin{matrix} d|a \\ d|a + ۱ \end{matrix} \longrightarrow d|(a + ۱) - a \longrightarrow d|۱ \xrightarrow{d>۰} d = ۱$$

۸

$$\frac{a + b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲ \geq ۰$$

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۹) اگر $\alpha + ۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست درنتیجه: $(\alpha + ۲\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$

اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۱۰) خیر؛ فرض کنیم چنین اعدادی وجود داشته باشند بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{a+b} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \Rightarrow \frac{۱}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \to (a+b)^۲ = ab$$
$$\to a^۲ + b^۲ + ۲ab = ab \to a^۲ + b^۲ + ab = ۰ \xrightarrow{\times ۲} ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲ab = ۰$$
$$\to (a^۲ + b^۲ + ۲ab) + a^۲ + b^۲ = ۰ \to (a+b)^۲ + a^۲ + b^۲ = ۰$$
$$\to a = ۰ \ , \ b = ۰ \ , \ a+b = ۰ \quad \dot{\times}$$

حال که به تناقض رسیدیم می‌توانیم خلاف حکم را نتیجه بگیریم.

۱۱) فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha - \beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی $\alpha + \beta$ گویا است پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha + \beta + \alpha - \beta = ۲\alpha$ گویاست در نتیجه α گویا است که با فرض در تناقض است پس $\alpha - \beta$ گنگ است.

فرض کنیم بنابر برهان خلف $\alpha + ۲\beta$ گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون $\alpha + \beta$ گویا است پس تفاضل آن‌ها یعنی $\beta = \alpha + ۲\beta - (\alpha + \beta)$ گویا است که با فرض در تناقض است پس $\alpha + ۲\beta$ گنگ است.

۱۲)

باقی‌ماندهٔ هر عدد بر ۴ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$p = ۴k \ (۱) \ , \ p = ۴k + ۱ \ (۲) \ , \ p = ۴k + ۲ \ (۳) \ , \ p = ۴k + ۳ \ (۴)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

۱۳) از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left.\begin{matrix} \alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{۲} \Rightarrow \alpha \in Q \ (\text{تناقض با فرض})$$

۱۴)

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲xy + ۲yz + ۲xz$$
$$\Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲xy) + (y^۲ + z^۲ - ۲yz) + (x^۲ + z^۲ - ۲xz) \geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲ + (y-z)^۲ + (x-z)^۲ \geq ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

۱۵) اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^۲ \geq ۰ \ \text{گزارهٔ همیشه درست}$$

۱۶)

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ \geq ۲xy + ۲x + ۲y \Leftrightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) + (x^۲ - ۲xy + y^۲) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ + (x-y)^۲ \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-۱)^۲ \geq ۰ \quad , \quad (y-۱)^۲ \geq ۰ \quad , \quad (x-y)^۲ \geq ۰$$

۱۷) الف) x و y هم‌علامت‌اند بنابراین $xy > ۰$ خواهد بود؛ داریم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲ \Leftrightarrow xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq ۲xy \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ \geq ۲xy$$
$$\Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰ \to \ \text{همواره درست}$$

ب)

$$(I) \ \ x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx \leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲xy + ۲yz + ۲zx$$
$$\Leftrightarrow x^۲ + x^۲ + y^۲ + y^۲ + z^۲ + z^۲ - ۲xy - ۲yz - ۲zx \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲ + (x-z)^۲ + (y-z)^۲ \geq ۰ \to \ \text{همواره درست}$$

۱۸)

$$xy \leq \frac{x^{۲}+y^{۲}}{۲} \Leftrightarrow ۲xy \leq x^{۲}+y^{۲} \Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲xy \geq ۰ \Leftrightarrow (x-y)^{۲} \geq ۰$$

گزاره همواره درست است.

۱۹

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^{۲}+y^{۲}}{xy} \geq ۲ \Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲} \geq ۲xy \Leftrightarrow (x-y)^{۲} \geq ۰$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است.

۲۰

$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^{۲}+۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^{۲}-۲a+۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^{۲} \geq ۰$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.

۲۱

$$\left.\begin{matrix} a|۴k+۹ \\ a|۶k+۱۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|-۶(۴k+۹)+۴(۶k+۱۴) \Rightarrow a|۲ \xrightarrow{a>۱} a=۲$$

۲۲ نکته:

۱) اگر عدد a عدد b را عاد کند، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد.

۲) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc$

$$\begin{matrix} a|۹k+۴ \\ a|۵k+۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۴۵k+۲۷ \end{matrix} \Rightarrow a|۷ \rightarrow a=\pm ۱ \text{ یا } \pm ۷ \xrightarrow{a>۱} a=۷$$

۲۳

$$a|b \longrightarrow a^{m}|b^{m} \xrightarrow{b\in\pi\ ,\ n-m\geq ۰} a^{m}|b^{m}\times b^{n-m} \longrightarrow a^{m}|b^{n}$$

۲۴ الف) فرض کنید $(m, m+۱)=d$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|m \\ d|m+۱ \end{matrix}\right\} \rightarrow d|m+۱-m \rightarrow d|۱$$

حال چون $d>۰$ می‌توان نتیجه گرفت $d=۱$ یعنی عدد دو صحیح و متوالی m و $m+۱$ نسبت به هم اول‌اند.

ب) فرض کنید $(۲m+۱, ۲m+۳)=d$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|۲m+۱ \\ d|۲m+۳ \end{matrix}\right\} \rightarrow d|۲m+۳-۲m-۱ \rightarrow d|۲$$

با توجه به اینکه $d>۰$ می‌توان نتیجه گرفت $d=۱$ یا $d=۲$ چون هیچ عدد فردی مقسوم‌علیه زوج ندارد بنابراین $d=۱$.

۲۵ خیر؛ می‌دانیم ۲|۲ و ۳|۹ ولی $۲+۳ \nmid ۲+۹$.

۲۶

$$۵|۴k+۱ \rightarrow ۵^{۲}|(۴k+۱)^{۲} \rightarrow ۲۵|۱۶k^{۲}+۸k+۱ \quad (I)$$

$$\left.\begin{matrix} ۵|۴k+۱ \\ ۵|۵ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۲۵|۲۰k+۵ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} ۲۵|۲۰k+۵ \\ ۲۵|۱۶k^{۲}+۸k+۱ \end{cases} \rightarrow ۲۵|۱۶k^{۲}+۲۸k+۶$$

۲۷

$$\left.\begin{matrix} a|۵k+۳ \rightarrow a|۹(۵k+۳) \\ a|۹k+۴ \rightarrow a|۵(۹k+۴) \end{matrix}\right\} \longrightarrow a|۹(۵k+۳)-۵(۹k+۴) \longrightarrow a|۷$$

در نتیجه با توجه به اینکه $a>۱$، a برابر ۷ می‌باشد که عددی اول است.

۲۸

$$a|b \longrightarrow b=aq\ ,\ q\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow b=(-a)(-q) \longrightarrow -a|b$$
$$\Rightarrow -b=(-a)q=a(-q) \longrightarrow -a|-b\ ,\ a|-b$$

۲۹

$(۱)\ ab=(c)d \longrightarrow d|ab$ $(۲)\ ab=c(d)\longrightarrow c|ab$

$(۳)\ ab=cd(۱)\longrightarrow cd|ab$ $(۴)\ cd=ab(۱)\longrightarrow ab|cd$

$(۵)\ cd=(a)b\longrightarrow b|cd$ $(۶);cd=a(b)\longrightarrow a|cd$

۳۰

$$\begin{matrix} a|۳n+۴ \\ a|۲n+۳ \end{matrix} \Rightarrow a|-۲(۳n+۴)+۳(۲n+۳)\Rightarrow a|۱\Rightarrow a=\pm ۱ \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=۱$$

۳۱

$$\left.\begin{matrix} n|۹k+۷ & \times(-۷) \\ n|۷k+۶ & \times ۹ \end{matrix}\right\} \Rightarrow n|-۶۳k-۴۹+۶۳k+۵۴\Rightarrow n|۵ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۱ \text{ یا } ۵$$

۳۲

الف نادرست

$n=۴\Rightarrow\ ۲^۴-۱=۱۵\notin P$

ب درست

پ نادرست

۳۳

الف عدد a شمارندهٔ عدد b است.

ب $۲m$

۳۴

الف) $m|m^۲\rightarrow [m^۲,m]=m^۲ \quad , \quad m^۲|m^۵\rightarrow (m^۲,m^۵)=m^۲$

$\Rightarrow ([m^۲,m],m^۵)=(m^۲,m^۵)=m^۲$

ب) $۲m|۶m^۳\rightarrow (۲m,۶m^۳)=۲m$

پ) $(۳m+۱,۳m+۲)=d\rightarrow \begin{cases} d|۳m+۱ \\ d|۳m+۲ \end{cases}\rightarrow d|۱\rightarrow d=۱$

ت) $m^۲|m^۳\rightarrow (m^۲,m^۳)=m^۲ \quad , \quad m^۲|m^۷\rightarrow [m^۲,m^۷]=m^۷$

$\Rightarrow [m^۷,(m^۲,m^۳)]=[m^۷,m^۲]=m^۷$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]=[(۲^۳\times ۳^۲,۲^۴\times ۳),۱۲۰]=[۲۴,۱۲۰]=۱۲۰$

(توجه کنید که $۲۴|۱۲۰$)

۳۵ فرض کنیم $(p,q)=d$ و $d\neq ۱$ بنابراین داریم:

$$d|p\ ,\ d|q \xrightarrow{q,p,d\neq ۱ \text{ اول}} d=p\ ,\ d=q\longrightarrow p=q$$

حال با توجه به اینکه $p=q$ با فرض مسئله در تناقض است نتیجه می‌گیریم $d=۱$.

۳۶

الف

$\forall m>۰\ ,\ a|m\ ,\ b|m\ \Rightarrow c\leq m$

۳۷

$$\left.\begin{matrix} (۵a+۴,۲a+۳)=d\Rightarrow & \begin{matrix} d|۲a+۳ \\ d|۵a+۴ \end{matrix} \\ \Rightarrow d|۷\Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷ & \end{matrix}\right\}\Rightarrow d|-۲(۵a+۴)+۵(۲a+۳)$$

۳۸

$A=۲۱a^۲=۳\times ۷\times a^۲\ ,\ B=۳۵a^۲=۵\times ۷\times a^۲\ \ \Rightarrow [A,B]=۱۰۵a^۲$

۳۹

الف درست

$[a,b]\overset{a|b}{=\!=}|b|$

ب نادرست

می‌دانیم: معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)|b$.

۴۰ بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = ۵q + ۲ \\ a = ۶q' + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a = ۳۰q + ۱۲ \\ ۵a = ۳۰q' + ۱۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۳۰q'' - ۳$$

$$\Rightarrow a = ۳۰r + ۲۷$$

۴۱ اعداد صحیح متوالی دلخواه n، $n+۱$ و $n-۱$ را در نظر می‌گیریم با توجه به تمرین ۱۱ نشان دادیم که حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی نیز بر ۲ بخش‌پذیر است؛ پس حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی نیز مضرب ۲ می‌باشد؛ در نتیجه $n(n+۱)(n-۱)$ بر !۳ بخش‌پذیر است.

۴۲

$$(n+۱)^۳ - n^۳ = n^۳ + ۳n^۲ + ۳n + ۱ - n^۳ = ۳n^۲ + ۳n + ۱ = ۳\underbrace{n(n+۱)}_{۲k} + ۱ = ۶k + ۱$$

حال n می‌تواند زوج یا فرد باشد. در هر دو صورت حاصل $(n+۱)^۳ - n^۳$ عددی فرد می‌شود پس حکم برقرار است.

۴۳

برای عدد صحیح و دلخواه a یکی از ۳ حالت زیر را داریم:

(۱) اگر $a = ۳k$ آنگاه $۳|a$.

(۲) اگر $a = ۳k + ۱$ آنگاه $۳|a + ۲$.

(۳) اگر $a = ۳k + ۲$ آنگاه $۳|a + ۴$.

۴۴ طبق فرض به‌ازای اعداد صحیح $q_۱$ و $q_۲$ داریم: $a = nq_۱$ و $b = nq_۲$.

$$a = bq + r \to nq_۱ = nq_۲q + r \to r = nq_۱ - nq_۲q = n(q_۱ - q_۲q)$$

بنابراین r هم بر n بخش‌پذیر است.

۴۵

می‌توان نوشت:

$$n^۳ - n = n(n^۲ - ۱) = n(n+۱)(n-۱)$$

حالت ۱: فرض کنیم $n = ۳k$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$n^۳ - n = (۳k)(۳k+۱)(۳k-۱) \to ۳|n^۳ - n$$

حالت ۲: فرض کنیم $n = ۳k + ۱$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$n^۳ - n = (۳k+۱)(۳k+۲)(۳k) \to ۳|n^۳ - n$$

حالت ۳: فرض کنیم $n = ۳k + ۲$ که $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$n^۳ - n = (۳k+۲)(۳k+۳)(۳k+۱) \to ۳|n^۳ - n$$

پس در هر حالت ثابت کردیم $۳|n^۳ - n$.

۴۶ طبق فرض $a = ۲n + ۱$ که $n \in \mathbb{Z}$ داریم:

$b|a + ۲ \to b|۲n + ۳ \to$ عددی فرد است. $b \to b = ۲n' + ۱ \quad (-n' \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۳ = (۲n+۱)^۲ + (۲n'+۱)^۲ + ۳ = ۴n^۲ + ۴n + ۱ + ۴n'^۲ + ۴n' + ۱ + ۳$$

$$= ۴\underbrace{n(n+۱)}_{۲k} + ۴\underbrace{n'(n'+۱)}_{۲k'} + ۵ = ۸k + ۸k' + ۵ = ۸\underbrace{(k+k')}_{q} + ۵$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲ + b^۲ + ۳$ بر ۸ برابر ۵ است.

۴۷ طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۷k + ۵ \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times ۸} ۸a = ۵۶k + ۴۰ \\ a = ۸k' + ۷ \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۵۶k' + ۴۹ \end{array}\right\}$$

$$\to a = ۵۶k - ۵۶k' - ۹ \Rightarrow a = ۵۶(k - k') - ۹ \Rightarrow a = ۵۶k'' - ۹$$

$$\Rightarrow a = ۵۶\underbrace{(k'' - ۱)}_{q} + ۵۶ - ۹ \Rightarrow a = ۵۶q + ۴۷$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ برابر ۴۷ می‌باشد.

۴۸

الف a عددی فرد است بنابراین $a + ۲$ عددی فرد است و $b|a + ۲$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود.

می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به‌علاوهٔ یک است.

$$a^۲ + b^۲ + ۳ = (۸m + ۱) + (۸n + ۱) + ۳ = ۸(m + n) + ۵ \Rightarrow r = ۵$$

ب

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۱۲ + ۱۰ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

۴۹

$$\left.\begin{array}{l} a = ۱۷q + ۵ \\ b = ۱۷q' + ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a - ۵b = ۱۷ \times ۲q + ۱۰ - ۱۷ \times ۵q' - ۱۵ = ۱۷(۱۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ = ۱۷k + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

۵۰

$$\left.\begin{array}{l} m = ۱۷q + ۵ \quad (q \in \mathbb{Z}) \\ n = ۱۷q' + ۳ \quad (q' \in \mathbb{Z}) \end{array}\right\} \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q') - ۵ \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

۵۱ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p = ۶k \ (۱) \quad , \quad p = ۶k + ۱ \ (۲) \quad , \quad p = ۶k + ۲ = ۲(۳k + ۱) \ (۳)$$

$$p = ۶k + ۳ = ۳(۲k + ۱) \ (۴) \quad , \quad p = ۶k + ۴ = ۲(۳k + ۲) \ (۵) \quad , \quad p = ۶k + ۵ \ (۶)$$

p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود.

۵۲

$$a = ۴q + ۳ \Rightarrow ۲a + ۳ = ۸q + ۹ = ۸\underbrace{(q + ۱)}_{q'} + ۱ = ۸q' + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

۵۳

روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصلهٔ اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد.

۵۴

$$\left.\begin{array}{l} m = ۱۳q_۱ + ۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳m = ۱۳(۳q_۱) + ۶ \\ n = ۱۳q_۲ + ۹ \xrightarrow{\times ۵} ۵n = ۱۳(۵q_۲) + ۴۵ \end{array}\right\} \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹ \rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \rightarrow r = ۰$$

۵۵ فرض کنیم ۱۲ بهمن x-امین و ۳۱ مرداد y-امین روز سال باشند در این صورت، داریم:

$$x = ۶ \times ۳۱ + ۴ \times ۳۰ + ۱۲ \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$y = ۴ \times ۳۱ + ۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

حال چون x-امین روز سال جمعه است پس سومین روز سال نیز جمعه می‌باشد پس اولین روز سال چهارشنبه است در نتیجه ۳۱ مرداد نیز چهارشنبه است.

۵۶ روزهای هفته دورهٔ گردش هفت روزه دارند بنابراین اگر $a \overset{۷}{\equiv} b$ آن‌گاه a-امین و b-امین روز سال یکسان هستند اگر اول مهر x-امین و ۷ اسفند y-امین روز سال باشند داریم:

$$x = ۶ \times ۳۱ + ۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$y = ۶ \times ۳۱ + ۵ \times ۳۰ + ۷ \overset{۷}{\equiv} ۷$$

بنابراین x-امین روز سال مانند ۵-امین روز سال و y-امین روز سال همانند هفتمین روز سال است. چون x-امین روز سال یکشنبه است پس پنجمین روز سال نیز یکشنبه است پس هفتمین روز سال سه‌شنبه می‌باشد در نتیجه ۷ اسفند هم سه‌شنبه است.

۵۷

$$(a + b)^n - (a^n + b^n) = \binom{n}{۱} a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} a^{n-۲}b^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱} ab^{n-۱}$$

$$= \sum_{i=۱}^{n-۱} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i$$

$$\rightarrow ab | (a + b)^n - (a^n + b^n) \rightarrow (a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

۵۸ باید ثابت کنیم که $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه a و b در تقسیم بر m هم‌باقی‌مانده‌اند. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a = mq + r & ۰ \leq r < m \\ b = mq' + r' & ۰ \leq r' < m \end{cases}$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m|a-b \to m|mq+r-mq'-r' \to m|r-r'$$

$$\to r-r'=mk \ \ (k\in\mathbb{Z}) \to r=r'+mk \ \ (k\in\mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow[۰\le r'<m]{۰\le r<m} k=۰ \to r=r'$$

۵۹ طبق فرض می‌توان نوشت $a=mq+r$ و $b=mq'+r$ داریم:

$$a-b=mq+r-(mq'+r)=mq-mq'=m(q-q')=mk$$

بنابراین $m|a-b$ در نتیجه $a\overset{m}{\equiv}b$.

۶۰ با توجه به فرض $(m,n)=d$ بنابراین $d|m$ و $d|n$:

$$a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow{d|m} a\overset{d}{\equiv}b \quad (I)$$

$$b\overset{n}{\equiv}c \xrightarrow{d|n} b\overset{d}{\equiv}c \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \begin{cases} a\overset{d}{\equiv}b \\ b\overset{d}{\equiv}c \end{cases} \to a\overset{d}{\equiv}c$$

۶۱

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b$$

$$\text{طبق فرض:}\left.\begin{matrix} m|a-b \\ n|m \end{matrix}\right\} \to n|a-b \to a\overset{n}{\equiv}b$$

۶۲ طبق قضیهٔ تقسیم k را می‌توان به یکی از سه فرم $۳q$، $۳q+۱$ یا $۳q+۲$ نمایش داد.

بنابراین ۳ حالت ممکن زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $k=۳q$، $q\in\mathbb{Z}$:

$$۳|k \to k\overset{۳}{\equiv}۰ \to k\in[۰]_۳$$

حالت دوم: $k=۳q+۱$، $q\in\mathbb{Z}$:

$$۳|۳q+۱-۱ \to ۳|k-۱ \to k\overset{۳}{\equiv}۱ \to k\in[۱]_۳$$

حالت سوم: $k=۳q+۲$، $q\in\mathbb{Z}$:

$$۳|۳q+۲-۲ \to ۳|k-۲ \to k\overset{۳}{\equiv}۲ \to k\in[۲]_۳$$

۶۳

$$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۹+۸ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

بنابراین $۱۳۹۸\in[۳]_۹$.

۶۴

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱}) \Rightarrow m|a^n-b^n \Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

۶۵

$$۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \Rightarrow (۲۷)^۷\overset{۱۳}{\equiv}۱^۷ \Rightarrow (۲۷)^۷+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۱^۷+۱۹=۲۰ \Rightarrow (۲۷)^۷+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۷$$

۶۶

$$۷x+۵y=۱۱ \to ۷x\overset{۵}{\equiv}۱۱\overset{۵}{\equiv}۱۱+۱۰\overset{۵}{\equiv}۲۱ \xrightarrow{(۷,۵)=۱} x\overset{۵}{\equiv}۳ \to x=۵k+۳$$

$$۷(۵k+۳)+۵y=۱۱ \to ۵y=۱۱-۷\times۵k-۲۱ \to ۵y=-۱۰-۷\times۵k \to y=-۲-۷k$$

بنابراین تمام جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $۷x+۵y=۱۱$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} x=۵k+۳ \\ y=-۲-۷k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

۶۷ طبق فرض داریم:

$$۳a-۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۴a-۷ \to ۱۰|(۴a-۷)-(۳a-۵) \to ۱۰|a-۲ \to a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(I)} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۲\times ۹ \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(II)} ۹a+۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۸+۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

۶۸ می‌توان نوشت:

$$۳۲=۲^۵ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \quad , \quad ۲^{۱۱}=(۲^۵)^۲\times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۹^۲ \times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲\times ۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow (۲^{۱۱}+۷)\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} (۱+۷)\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$$

۶۹ می‌توان نوشت $۲۳=۱۱+۱۲$ بنابراین $۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}=(۱۱+۱۲)^{۵۱}-(۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱})$ که با توجه به تمرین قبل $۱۱\times۱۲|(۱۱+۱۲)^{۵۱}-(۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱})$ بنابراین $۱۳۲|۲۳^{۵۱}-(۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱})$.

۷۰

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵}\times ۹+۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow r=۲$$

۷۱

$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \to ۳۸^۲ \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \to ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰,\ ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳۸^{۳۶}+۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

۷۲

$$۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱}+۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۵$$

رقم یکان برابر ۵ است.

۷۳

$$۷^۲=۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴} ۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$$

۷۴

$$۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \to ۱۳^۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \to ۱۳^{۲۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{-۱\overset{۱۷}{\equiv}۱۶} r=۱۶$$

۷۵

$$a\equiv b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b)\Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۷۶ باید همهٔ اعداد صحیح a را بیابیم که در معادلهٔ همنهشتی $۵a+۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ صدق کنند داریم:

$$۵a+۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \to ۵a \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲+(۳\times۱۱) \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \to a=۱۱k+۷\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

۷۷

$$۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$$

$y=۵k+۴$ و $۵x+۲y=۱۸ \to ۵x=۱۸-۲(۵k+۴) \to x=-۲k+۲ \quad (k\in\mathbb{Z})$

۷۸

نکته : $ac \overset{m}{\equiv} bc,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶ \xrightarrow{(۳,۷)=۱} x \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow x=۷k+۲$$

۷۹

الف

با توجه به اینکه $۴۲۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$ و $۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ می‌توان نوشت:

$$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹ \to ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲+۳\times۱۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \to x=۱۱k+۷$$

بنابراین جواب عمومی معادلهٔ همنهشتی $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$ به‌صورت $x=۱۱k+۷$ است.

ب

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ + ۱۲ \times ۳ \overset{۱۲}{\equiv} ۵۶ \xrightarrow{(۸,۱۲)=۴} x \overset{۳}{\equiv} ۷ \overset{۳}{\equiv} ۱ \to x = ۳k + ۱$$

پ

$$۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱ \xrightarrow[۱۱\overset{۶}{\equiv}۵]{۵۱\overset{۶}{\equiv}۳} ۳x \overset{۶}{\equiv} ۵$$

این معادله جواب ندارد زیرا $(۳,۶) = ۳$ ولی $۳ \nmid ۵$.

۸۰

$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴ \times ۵ + ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \xrightarrow{(۷,۴)=۱} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۴k + ۳ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۸۱

$$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k + ۷$$

۸۲ می‌دانیم به‌ازای $n > ۴$، $۱۰|n!$ بنابراین داریم:

$$\forall n \geq ۵ \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad n! \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots ۵۰۰! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

($n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۵$) بنابراین رقم یکان A برابر ۳ می‌باشد.

۸۳ معادلهٔ سیاله $۲x + ۵y = ۲۹$ دارای جواب است، زیرا:

$$\overbrace{(۲,۵)}^{۱}|۲۹$$

$$۲x + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۵k + ۲$$

x را در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲(۵k + ۲) + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۵y = -۱۰k + ۲۵ \Rightarrow y = -۲k + ۵$$

۸۴ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۹y = ۷۳$ را به‌دست آوریم:

$$۷x \overset{۹}{\equiv} ۷۳ \xrightarrow{۷۳\overset{۹}{\equiv}۱} ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳ \times ۹ \overset{۹}{\equiv} ۲۸ \xrightarrow{(۷,۹)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۴ \to x = ۹k + ۴$$

$$۷(۹k + ۴) + ۹y = ۷۳ \to ۹y = ۷۳ - ۷ \times ۹k - ۲۸ \to y = ۵ - ۷k$$

بنابراین صورت کلی جواب معادلهٔ سیالهٔ $۷x + ۹y = ۷۳$ به فرم زیر است:

$$\begin{cases} x = ۹k + ۴ \\ y = ۵ - ۷k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

حال برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۹k + ۴ \geq ۰ \\ ۵ - ۷k \geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k \geq ۰ \\ k \leq ۰ \end{cases}$$

بنابراین تنها به‌ازای $k = ۰$ جواب صحیح و نامنفی برای معادله به‌دست می‌آید بنابراین این شخص فقط به یک طریق توانسته این امتیاز را به‌دست آورد.

۸۵ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $x + y = ۹$ را بیابیم. صورت کلی جواب این معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح عبارت است از:

$$\begin{cases} x = k \\ y = ۹ - k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

چون باید جواب‌های صحیح و نامنفی را بیابیم بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x \geq ۰ \\ x \geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k \geq ۰ \\ ۹ - k \geq ۰ \end{cases} \to \begin{cases} k \geq ۰ \\ k \leq ۹ \end{cases} \to ۰ \leq k \leq ۹$$

پس به‌ازای ۱۰ مقدار از k جواب‌های صحیح و نامنفی برای معادلهٔ سیاله به‌دست می‌آید بنابراین این کار را به ۱۰ طریق می‌توان انجام داد.

۸۶ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۳x + ۵y = ۲۳$ را بیابیم:

$$۳x + ۵y = ۲۳ \to ۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow{(۳,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \to x = ۵k + ۱$$

$$۳(۵k + ۱) + ۵y = ۲۳ \to ۵y = ۲۳ - ۳ \times ۵k - ۳ \to y = ۴ - ۳k$$

بنابراین جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $۳x + ۵y = ۲۳$ به فرم زیر هستند:

$$\begin{cases} x = ۵k + ۱ \\ y = ۴ - ۳k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

برای یافتن جواب‌های صحیح و نامنفی معادله به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=5k+1 \geq 0 \\ y=4-3k \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} k\geq 0 \\ k\leq 1 \end{cases}$$

بنابراین فقط به‌ازای $k=0$ و $k=1$ معادله جواب صحیح و نامنفی دارد پس به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۸۷ باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی $2000x+5000y=29000$ را بیابیم:

$$2000x+5000y=29000 \to 2x+5y=29 \to 2x \overset{5}{\equiv} 29 \overset{5}{\equiv} 29+5 \overset{5}{\equiv} 34$$

$$\xrightarrow{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 17 \overset{5}{\equiv} 2 \to x=5k+2$$

$$2(5k+2)+5y=29 \to 5y=29-2\times 5k-4 \to y=5-2k$$

بنابراین تمام جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ $2000x+5000y=29000$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=5k+2 \\ y=5-2k \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ سیالهٔ مفروض به فرم زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\geq 0 \to 5k+2\geq 0 \to k\geq 0 \\ y\geq 0 \to 5-2k\geq 0 \to k\leq 2 \end{cases}$$

بنابراین به‌ازای $0\leq k\leq 2$ جواب صحیح برای معادله به‌دست می‌آید پس به ۳ طریق می‌توان این کار را انجام داد.

۸۸

$$8x \overset{12}{\equiv} 20 \overset{12}{\equiv} 32 \xrightarrow{(8,12)=4} x \overset{\frac{12}{4}=3}{\equiv} 4 \Rightarrow x=3k+4 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

۸۹ معادله سیاله جواب دارد زیرا: $(2,5)=1\,|\,19$ پس داریم:

$$2x \overset{5}{\equiv} 19 \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{(2,5)=1} x \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow x=5k+2 \xrightarrow{2x+5y=19} 2(5k+2)+5y=19 \Rightarrow y=-2k+3$$

۹۰ معادله سیاله دارای جواب است زیرا $(9,13)=1\,|\,7$

$$13y \overset{9}{\equiv} 7,\ (13 \overset{9}{\equiv} 4,\ 7 \overset{9}{\equiv} 16) \to 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4 \to y=9k+4$$

در نتیجه با جایگذاری $y=9k+4$ در معادلهٔ سیاله $9x+13y=7$ داریم:

$$x=-13k-5$$

۹۱ (۴) (۳) **(۲)** (۱) تذکر:اعداد به فرم 2^n را نمی توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

بنابراین عدد ۶۴ را نمی‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت. برای سایر گزینه‌ها داریم:

$74=17+18+19+20$ و $72=23+24+25$ و $56=5+6+7+8+9+10+11$

۹۲ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

$$a=1 \Rightarrow a^2=a^3$$

۹۳ **(۴)** (۳) (۲) (۱)

دقت کنید مورد گزینه ۲: اصل اقلیدس است (قضیه نیست)

۹۴ (۴) (۳) **(۲)** (۱) راه اول:

$$48P+1=k^2 \Rightarrow 48P=k^2-1=\underbrace{(k-1)(k+1)}_{\text{ضرب ۲ عدد با ۲ واحد اختلاف}}$$

پس $48P$ نیز باید ضرب ۲ عدد با ۲ واحد اختلاف باشد.

$$48\times P \Rightarrow \begin{cases} P=50 & \times \\ P=46 & \times \end{cases}$$

$$24\times 2P \Rightarrow \begin{cases} P=13 & \checkmark \\ P=11 & \checkmark \end{cases}$$

$$12\times 4P \Rightarrow \begin{cases} P=\frac{14}{4} & \times \\ P=\frac{10}{4} & \times \end{cases}$$

بازای سایر مقادیر نیز مقدار قابل قبول دیگری برای P نداریم.

راه دوم:

$$\underbrace{48P+1}_{\text{فرد}} = (2k+1)^2 \Rightarrow 48P+1 = 4k^2+4k+1$$

$$\Rightarrow 48P = 4k^2+4k \xrightarrow{\div 4} 12P = \underbrace{k(k+1)}_{\text{ضرب ۲ عدد متوالی}} \Rightarrow \begin{cases} P=11 \\ \text{یا} \\ P=13 \end{cases}$$

۹۵ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\overline{aabb} = 1000a+100a+10b+b = 1100a+11b = 11(100a+b)$$

از طرفی:

$$\overline{cc} = 10c+c = 11c$$

بنابر فرض سؤال داریم:

$$11(b+100a) = (11c)^2 \Rightarrow b+100a = 11c^2$$

اعدادی که در عبارت فوق صدق می‌کنند برابر است با:

$$a=7, b=4, c=8 \ \rightarrow 704 = 11\times 64$$

در نتیجه: $a-b=3$

۹۶ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\left.\begin{matrix} d|5n-2 \xrightarrow{\times 7} d|35n-14 \\ d|7n+3 \xrightarrow{\times 5} d|35n+15 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|29 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 29$$

طبق فرض تست $d=29$ قبول است.

برای این که حاصل ب.م.م فوق عددی غیر از ۱ شود باید $n-12$ عامل ۲۹ را داشته باشد.

$$n-12 = 29k \Rightarrow n = 29k+12$$

n باید دو رقمی باشد، پس داریم:

$$10 \le 29k+12 \le 100 \Rightarrow \frac{-2}{29} \le k \le \frac{88}{29} \Rightarrow k = 0,1,2,3$$ چهار حالت مختلف

۹۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$627 = 3\times 11\times 19 \quad , \quad 429 = 3\times 11\times 13$$

$$(627,429) = (3\times 11\times 19 \,,\, 3\times 11\times 13) \xlongequal{\text{پایه‌هاي مشترک با توان کمتر}} 3\times 11 = 33$$

$$[(627,429),154] = [33,154] = [3\times 11 \,,\, 2\times 7\times 11] \xlongequal[\text{پایه‌هاي غیرمشترک}]{\text{پایه‌هاي مشترک با توان بیشتر} \times} 2\times 3\times 7\times 11 = 462$$

۹۸ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$d = (5n-2, 12n+7) \Rightarrow \begin{cases} d|5n-2 \\ d|12n+7 \end{cases}$$

می دانیم اگر $d|a$ و $d|b$ در این صورت $d|(ma+nb)$ ، یعنی d هر ترکیب خطی از a و b را نیز عاد می کند، داریم:

$$d|12\times(5n-2)+(-5)(12n+7) \Rightarrow d|-59 \Rightarrow d|59 \Rightarrow d=59 \ \text{ یا } \ d=1$$

با توجه به اینکه $5n-2$ و $12n+7$ ، نسبت به هم اول نیستند، بنابراین ب. م . م آن ها باید ۵۹ باشد.

۹۹ ۴ ۳ **۲** ۱

$$(25n+9, 11n+4) = d \Rightarrow \begin{cases} d|25n+9 \\ d|11n+4 \end{cases} \xrightarrow[\times 25]{\times -11} d|-11(25n+9)+25(11n+4) \Rightarrow d|1 \xrightarrow{\text{فقط}} d=1$$

$$\Rightarrow (11n+4, 25n+9) = 1$$

پس دو عدد $11n+4$ و $25n+9$ همواره نسبت به هم اولند و همه ی اعداد دو رقمی قابل قبولند.

۱۰۰ ۴ ۳ ۲ **۱** عدد ۳ مقسوم‌علیه مشترک $11n+2$ و $7n+5$ است، پس:

$$\begin{cases} 3|\,11n+2 \xrightarrow{\times 7} 3|\,77n+14 \\ 3|\,7n+5 \xrightarrow{\times 11} 3|\,77n+55 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3|41 \quad \text{(تناقض)}$$

پس هیچ عدد طبیعی n وجود ندارد.

۱۰۱ ۴ ۳ **۲** ۱

ابتدا ب.م.م دو عدد را می‌یابیم:

$$(11n-3, 2n+7)=d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d|11n-3 \xrightarrow{\times 2} d|22n-6 \\ d|2n+7 \xrightarrow{\times 11} d|22n+77 \end{cases} \to d|83 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 83$$

اگر $d=83$ باشد، آنگاه:

$$d|2n+7 \Rightarrow 2n+7=83k \xrightarrow{k=1} 2n+7=83 \Rightarrow n=38$$

یعنی به‌ازای $n=38$ ب.م.م دو عدد ۸۳ خواهد بود، بنابراین به ازای $n<38$ دو عدد نسبت به هم اولند، پس به ازای $n \le 37$ ب.م.م دو عدد ۱ خواهد بود، یعنی بیشترین مقدار n_0 عدد ۳۷ خواهد بود.

۱۰۲ **۴** ۳ ۲ ۱ با توجه به تعریف ب‌م‌م داریم:

$$\begin{cases} d|3n^2-2n+6 \\ d|3n+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|3n^2-2n+6 \ \ (1) \\ d|(3n+5)n \Rightarrow d|3n^2+5n \ \ (2) \end{cases}$$

رابطهٔ (۲) و (۱) را از هم کم می‌کنیم؛ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} d|7n-6 \\ d|3n+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|-3(7n-6) \\ d|7(3n+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|-21n+18 \\ d|21n+35 \end{cases} \Rightarrow d|53 \xrightarrow{d\neq 1} d=53$$

۱۰۳ ۴ ۳ **۲** ۱ نکته: اگر عدد A به صورت عوامل اول $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن از رابطهٔ $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ قابل محاسبه است.

$$\underset{x}{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت}} = (m+1)(n+1)$$

$$\frac{x}{40}=\frac{2^m \times 5^n}{2^3 \times 5}=2^{m-3}\times 5^{n-1} \Rightarrow \underset{\frac{x}{40}}{\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت}} : (m-2)\times n$$

پس داریم : $(m+1)(n+1)-n(m-2)=12 \Rightarrow mn+m+n+1-mn+2n=12 \Rightarrow m+3n=11 \quad (n\ge 1 \ , \ m\ge 3)$

$$if\ n=1 \Rightarrow x=2^8\times 5^1=1280$$

$$if\ n=2 \Rightarrow x=2^5\times 5^2=800$$

$$if\ n=3 \Rightarrow x=2^2\times 5^3 \quad \text{غیرقابل قبول} \ (m\ge 3)$$

پس حداقل مقدار x عدد ۸۰۰ است.

۱۰۴ ۴ ۳ **۲** ۱

$$q=r^2$$

$$165=br^2+r \ , \ 0\le r<b$$

$$\begin{cases} r(br+1)=165=5\times 3\times 11 \\ r<b \end{cases}$$

واضح است r مقسوم علیه طبیعی ۱۶۵ می باشد چون $165 = 5 \times 3 \times 11$ پس:

$$r=1 \Rightarrow b\times 1+1=165 \Rightarrow b=164$$

$$r=3 \Rightarrow b\times 3+1=55 \Rightarrow b=18$$

$$r=5 \Rightarrow b\times 5+1=33 \Rightarrow b=\frac{32}{5} \quad \text{غ ق ق}$$

$$r=11 \Rightarrow b\times 11+1=15 \Rightarrow b=\frac{14}{11} \quad \text{غ ق ق}$$

فقط دو مورد قابل قبول است.

۱۰۵ **۴** ۳ ۲ ۱

می دانیم در قضیه تقسیم $a=bq+r$ باید $0 \le r \le b$ باشد. بنابراین:

$$r=q^2-2$$

$a = ۳۷q + q^{۲} - ۲$

$۰ \le r \le b \Rightarrow q^{۲} - ۲ < ۳۷ \Rightarrow q^{۲} < ۳۹$

$\xrightarrow{q \in Z} \max(q) = ۶ \Rightarrow \max(a) = ۳۷ \times ۶ + ۶^{۲} - ۲ = ۲۲۲ + ۳۴ = ۲۵۶ = ۱۶^{۲}$

۱۰۶ ۱ ۲ ۳ ۴

$q = r + ۳$

الگوریتم تقسیم را با توجه به توضیحات مسئله می‌سازیم:

$a = ۱۱(r+۳) + r \Rightarrow a = ۱۲r + ۳۳ \Rightarrow a - ۹ = ۱۲r + ۲۴ \Rightarrow a - ۹ = ۱۲(r+۲)$

می‌دانیم $۰ \le r < b$ یعنی r می‌تواند از صفر تا ۱۰ باشد چرا که $b = ۱۱$ پس برای r درواقع یازده مقدار قابل‌قبول است. $r = ۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۰$ اگر r زوج باشد $r + ۲$ نیز زوج خواهد بود و این یعنی $a - ۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است. پس احتمال بخش‌پذیری $a - ۹$ بر ۲۴ برابر با $\frac{۶}{۱۱}$ است. $(r = ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰)$

۱۰۷ ۱ ۲ ۳ ۴

a مضرب ۱۱ می‌باشد. $\Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$

باقیمانده a بر ۴ برابر ۱ است $\Rightarrow a \overset{۴}{\equiv} ۱$

باقیمانده a بر ۵ برابر ۱ است $\Rightarrow a \overset{۵}{\equiv} ۱$

$\xrightarrow{[۴,۵]=۲۰} a \overset{۲۰}{\equiv} ۱$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲۱ \\ a \overset{۲۰}{\equiv} ۱ \overset{۲۰}{\equiv} ۱۲۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{[۱۱,۲۰]=۲۲۰}{\equiv} ۱۲۱ \Rightarrow a = ۲۲۰K + ۱۲۱$$

a سه رقمی است. $\Rightarrow ۹۹ < ۲۲۰K + ۱۲۱ \le ۹۹۹ \Rightarrow K = \underbrace{۰, ۱, ۲, ۳}_{\text{۴ مقدار}}$

۱۰۸ ۱ ۲ ۳ ۴ دقت: در تقسیم رابطهٔ همنهشتی $ac \overset{m}{\equiv} bc$ بر c، پیمانه بر (m, c) تقسیم می شود.

تذکر: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه: $m|a - b$

$a^{۳} - a^{۲} - a + ۱ \overset{m}{\equiv} a^{۲} - ۱$

$a^{۲}(a-۱) - (a-۱) \overset{m}{\equiv} a^{۲} - ۱$

$(a-۱)(a^{۲}-۱) \overset{m}{\equiv} a^{۲} - ۱\ ,\ (a^{۲} - ۱, m) = ۱ \Rightarrow a - ۱ \overset{m}{\equiv} ۱ \Rightarrow a - ۲ \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow m|a - ۲$

۱۰۹ ۱ ۲ ۳ ۴

$$\begin{array}{l|l} N & ۴۳ \\ \cline{2-2} & q \\ \overline{q} & \end{array}$$

$\Rightarrow N = ۴۳q + q = ۴۴q \xrightarrow{q<۴۳} N < ۴۴ \times ۴۳ = ۱۸۹۲$

$$\left.\begin{array}{l} N \overset{۴۴}{\equiv} \overset{\overset{+۴۴}{\curvearrowright}}{۰} \overset{۴۴}{\equiv} \overset{\overset{+۴۴}{\curvearrowright}}{۴۴} \overset{۴۴}{\equiv} ۸۸ \\ N \overset{۳۱}{\equiv} \overset{\overset{+۳۱}{\curvearrowright}}{۲۶} \overset{۳۱}{\equiv} \overset{\overset{+۳۱}{\curvearrowright}}{۵۷} \overset{۳۱}{\equiv} ۸۸ \end{array}\right\} \Rightarrow N \overset{۱۳۶۴}{\equiv} ۸۸$$

$\Rightarrow N = ۱۳۶۴k + ۸۸$

تذکر: $[۴۴, ۳۱] = ۴۴ \times ۳۱ = ۱۳۶۴$

$\xrightarrow[k=۱]{N<۱۸۹۲} N_{\max} = ۱۳۶۴ + ۸۸ = ۱۴۵۲$

۱۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

تذکر : تقسیم در هم نهشتی

$$\begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (c\ ,\ m) = d \end{cases} \overset{\div c}{\Rightarrow} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

$۳۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۱۹۲ \overset{\div ۱۲}{\rightarrow} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۷}{\equiv} ۲$

$۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \overset{۷}{\equiv} ۹ \overset{\div ۳}{\rightarrow} a \overset{۷}{\equiv} ۳$

$a \overset{۷}{\equiv} ۳ \overset{\times ۲}{\rightarrow} ۲a \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱$

۱۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ روش اول:

نکته: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$، آنگاه $a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

تکالیف گسسته دوازدهم

$$\left.\begin{array}{l} a=۶q+۵\Rightarrow a\overset{۶}{\equiv}۵\overset{۶}{\equiv}۲۹\\ a=۱۱q'+۷\Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}۷\overset{۱۱}{\equiv}۲۹\end{array}\right\}\longrightarrow a\overset{[۶,۱]=۶۶}{\equiv}۲۹$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a=۶q+۵\xrightarrow{\times ۱۱}۱۱a=۶۶q+۵۵\\ a=۱۱q'+۷\xrightarrow{\times ۶}۶a=۶۶q'+۴۲\end{array}\right\}\xrightarrow{-}۵a=۶۶\underbrace{(q-q')}_{q''}+۱۳\Rightarrow ۵a=۶۶q''+۱۳$$

داشتیم $۶a=۶۶q'+۴۲$ پس:

$$\left\{\begin{array}{l} ۵a=۶۶q''+۱۳\\ ۶a=۶۶q'+۴۲\end{array}\right.\xrightarrow{-}a=۶۶\underbrace{(q'-q'')}_{k}+۲۹\Rightarrow a=۶۶k+۲۹$$

روش سوم:

گزینه‌ای درست است که باقی‌ماندهٔ آن بر ۶ عدد ۵ و باقی‌ماندهٔ آن بر ۱۱ عدد ۷ باشد.

۱۱۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

دقت: چون $(m,۷)=۱$ هستند پس m باید ۲۳ باشد.

$$۱۸۵\overset{m}{\equiv}۲۴\overset{-۲۴}{\Rightarrow}۱۶۱\overset{m}{\equiv}۰\Rightarrow ۷\times ۲۳\overset{m}{\equiv}۰\Rightarrow m=۲۳$$

$$۲۳\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow ۲۳^{۲۳}\overset{۷}{\equiv}۲^{۲۳}=(۲^۳)^۷\times ۲^۲\overset{۷}{\equiv}۱^۷\times ۴\overset{۷}{\equiv}۴$$

۱۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴

می‌دانیم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b\\ a\overset{n}{\equiv}b\end{array}\right\}\Rightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲^۴\overset{۵}{\equiv}۱\\ ۲^۶\overset{۲۱}{\equiv}۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۲^{۱۲}\overset{[۵,۲۱]}{\equiv}۱\Rightarrow ۲^{۱۲}\overset{۱۰۵}{\equiv}۱$$

طرفین را به توان k می‌رسانیم:

$$(۲^{۱۲})^k\overset{۱۰۵}{\equiv}۱\Rightarrow ۲^{۱۲k}\overset{۱۰۵}{\equiv}۱\quad (۱)$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$۲^n\overset{۱۰۵}{\equiv}۱\quad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) و (۲) پس n اعداد دورقمی مضرب ۱۲ هستند؛ این اعداد عبارتند از:

۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰, ۷۲, ۸۴, ۹۶

پس ۸ مقدار موجود است.

۱۱۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\begin{array}{l} A\overset{۲۳}{\equiv}۵\\ ۲A\overset{۱۷}{\equiv}۹\overset{۱۷}{\equiv}۲۶\xrightarrow{\div ۲}A\overset{۱۷}{\equiv}۱۳\end{array}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} A\overset{۲۳}{\equiv}۵\xrightarrow{۷\times ۲۳}\overset{۲۳}{\equiv}۱۶۶\\ A\overset{۱۷}{\equiv}۱۳\xrightarrow{۹\times ۱۷}\overset{۱۷}{\equiv}۱۶۶\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow A\overset{۲۳\times ۱۷}{\equiv}۱۶۶\Rightarrow A\overset{۳۹۱}{\equiv}۱۶۶\Rightarrow A=۳۹۱q+۱۶۶\xrightarrow{q=۲}\underbrace{A=۹۴۸}_{\text{بزرگترین مقدار سه رقمی } A}\Rightarrow A=۹۴۸\overset{۱۲}{\equiv}۰$$

۱۱۵ ۱ ۲ **۳** ۴

برای آن که اعداد صحیح به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز شوند باید پیمانه ی همنهشتی عدد کوچک تری باشد.

$$۱۳۲\overset{m}{\equiv}۴۱\overset{-۴۱}{\Rightarrow}۹۱\overset{m}{\equiv}۰\overset{m|۹۱}{\Rightarrow}m|۷\times ۱۳\Rightarrow \min(m)=۷$$

$$a\overset{۷}{\equiv}۴۱\Rightarrow a\overset{۷}{\equiv}۶\Rightarrow a=۷k+۶\overset{k=۱۴}{\Rightarrow}\min(a)=۱۰۴$$

۱۱۶ **۱** ۲ ۳ ۴

$۱۸a\overset{۹}{\equiv}۱۲b\xrightarrow{\div ۶}۳a\overset{۳}{\equiv}۲b$ (گزینه‌ی ۴)

$۲b\overset{۳}{\equiv}۳a\overset{۳}{\equiv}۰\Rightarrow b\overset{۳}{\equiv}۰$ (گزینه‌ی ۲) $\Rightarrow ۲b\overset{۳}{\equiv}۰\Rightarrow ۲b\overset{۳}{\equiv}b\Rightarrow ۳a\overset{۳}{\equiv}۲b\overset{۳}{\equiv}b$ (گزینه‌ی ۳)

۱۱۷ **۱** ۲ ۳ ۴

$$\left\{\begin{array}{l} a\overset{۹}{\equiv}۵\overset{۹}{\equiv}۴\times ۹+۵\overset{۹}{\equiv}۴۱\\ a\overset{۷}{\equiv}۶\overset{۷}{\equiv}۵\times ۷+۶\overset{۷}{\equiv}۴۱\end{array}\right.\Rightarrow a\overset{۶۳}{\equiv}۴۱:\ \text{عدد اول}$$

۱۱۸ ۴ ۳ **۲** ۱ روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{9}{\equiv} 5 \xrightarrow{3|9} a \overset{3}{\equiv} 5 \overset{3}{\equiv} 2 \overset{3}{\equiv} 20 \\ a \overset{13}{\equiv} 6 \quad \Rightarrow \quad a \overset{13}{\equiv} 20 \end{array}\right\} \xrightarrow{[3,13]=39} a \overset{39}{\equiv} 20$$

روش دوم: چون $a \overset{3}{\equiv} 2$ گزینه‌ای صحیح است که باقی‌مانده آن بر ۳ برابر ۲ باشد ← فقط گزینه ۲

۱۱۹ ۴ **۳** ۲ ۱

تقسیم در همنهشتی:

$$\begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \\ (m,c)=d \end{cases} \xrightarrow{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

$$9a \overset{18}{\equiv} 6b \overset{\div 3}{\Rightarrow} 3a \overset{6}{\equiv} 2b$$

تذکر: (لم اقلیدس)

$$\begin{cases} a|bc \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow a|c$$

$$\left.\begin{array}{l} (3,6)=3 \Rightarrow 3|2b \\ (3,2)=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} 3|b \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 0$$

تذکر: شرط وجود جواب در معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ آن است که $(a,m)|b$

$$\left.\begin{array}{l} (2,6)\,|3a \Rightarrow 2|3a \\ (2,3)=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} 2|a \Rightarrow a \overset{2}{\equiv} 0$$

پس گزینه ۳ نادرست است.

۱۲۰ ۴ ۳ ۲ **۱**

نکته:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{5}{\equiv} 2 \overset{5}{\equiv} -3 \\ A \overset{7}{\equiv} 4 \overset{7}{\equiv} -3 \\ A \overset{11}{\equiv} 8 \overset{11}{\equiv} -3 \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{[5,7,11]}{\equiv} -3 \Rightarrow A \overset{385}{\equiv} -3 \Rightarrow A = 385q - 3$$

به‌ازای $q=2$ بزرگ‌ترین مقدار ۳ رقمی A حاصل می‌شود.

$$q=2 \Rightarrow A = 385 \times 2 - 3 = 770 - 3 = 767$$

باقی‌ماندهٔ ۷۶۷ بر ۲۳ برابر ۸ می‌باشد.

۱۲۱ ۴ ۳ ۲ **۱** بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$m = 29n + 17 \quad , \quad n > 17$$

بنابر فرض سؤال m مضرب ۵ است؛ داریم:

$$29n + 17 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow -n + 2 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow n \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow n = 5q + 2 > 17 \Rightarrow q > 3 \quad (1)$$

از طرفی:

$$m = 29(5q+2) + 17 = 145q + 75 < 1000 \xrightarrow{\div 5} 29q + 15 < 200 \Rightarrow q < \frac{185}{29} \simeq 6{,}000 \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$q : 4, 5, 6$$

پس اعداد سه‌رقمی m برابر ۳ تا می‌باشد.

۱۲۲ ۴ ۳ **۲** ۱ بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$a = 430q + q^2 \quad (q^2 < 430)$$

بنابر فرض سؤال از آن‌جایی که a مضرب ۹ است؛ داریم:

$$a \overset{۹}{\equiv} ۰ \to ۴۳۰q + q^۲ \overset{۹}{\equiv} ۰ \to -۲q + q^۲ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

توجه کنید تنها دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

$$q(q-۲) \overset{۹}{\equiv} ۰ \to \begin{cases} ۱) q \overset{۹}{\equiv} ۰ \to q = ۹,۱۸ \\ ۲) q \overset{۹}{\equiv} ۲ \to q = ۲,۱۱,۲۰ \end{cases}$$

پس ۵ عدد پیدا کردیم.

۱۲۳ ۱ ۲ ۳ ۴ درواقع باید $(۱۰-m)!$ بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد $!۱, !۲, \cdots, !۵$ بر ۳۶ بخش‌پذیر نیستند. اولین فاکتوریل بخش‌پذیر بر ۳۶ درواقع $۶! = ۷۲۰$ است

پس $m = ۴$ پس داریم:

$$۴^{۱۲۳} \overset{۱۵}{\equiv} ?$$

می‌دانیم : $۴^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۶۱}} ۴^{۱۲۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۴^{۱۲۳} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$

۱۲۴ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۷^n + ۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷^n \overset{۴۳}{\equiv} -۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۱ \;;\; ۷^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \;,\; ۷^۳ \overset{۴۳}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان۲}} ۷^۶ \overset{۴۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان}k} ۶k \overset{۴۳}{\equiv} ۱ \to n = ۶k$$

و این یعنی به ازای ۸ عدد $n = ۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۰, ۳۶, ۴۲, ۴۸$ عدد $۷^n + ۴۲$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

۱۲۵ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۵^۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\text{توان } n} ۵^{۲n} \overset{۲۳}{\equiv} ۲^n \xrightarrow{\times ۵} ۵^{۲n+۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \times ۲^n$$

$$۵^{۲n+۱} + ۲^{n+۴} + ۲^{n+۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \times ۲^n + ۴^۲ \times ۲^n + ۲ \times ۲^n = ۲۳ \times ۲^n \overset{۲۳}{\equiv} ۰$$

یعنی بازای تمام مقادیر n، عبارت مورد نظر بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۲۶ ۱ ۲ ۳ ۴ کوچک‌ترین عدد ۷ است که در تقسیم بر ۴۳ باقیمانده‌ی ۱ می‌آورد، زیرا:

$$۷^۲ \overset{۴۳}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\times ۷} ۷^۳ \overset{۴۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۴۳}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۷^۶ \overset{۴۳}{\equiv} ۱$$

مطابق فرض داریم:

$$۱۳ \times ۷^{۵۴} + A \overset{۴۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۳ \times (۷^۶)^۹ + A \overset{۴۳}{\equiv} ۱۳ \times ۱ + A \overset{۴۳}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۴۳}{\equiv} -۱۳ \overset{۴۳}{\equiv} \boxed{۳۰} \leftarrow \text{کوچک‌ترین عدد طبیعی}$$

۱۲۷ ۱ ۲ ۳ ۴ قضیه فرما: اگر P اول و $(a,p) = ۱$ آنگاه $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$

برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم این عدد بر ۳۵، باقیمانده تقسیم بر ۵ و ۷ را می یابیم.

قضیه فرما: اگر p اول و $(a,p) = ۱$ آنگاه $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$

$$\begin{matrix} \text{فرما} \; ۳^۶ \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{توان۷}} ۳^{۴۲} \overset{۷}{\equiv} ۱ \\ \text{فرما} \; ۲^۶ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۴۲} \overset{۷}{\equiv} ۱ \end{matrix} \Rightarrow ۳^{۴۲} - ۲^{۴۲} \overset{۷}{\equiv} ۰$$

گزینه ای جواب است که در همنهشتی به پیمانه ۷ در کلاس ۰ قرار داشته باشد (باقی مانده اش بر ۷ برابر صفر باشد)، که فقط گزینه ۱ این شرط را دارد . می توانستیم همین کار را برای همنهشتی به پیمانه ۵ نیز انجام دهیم.

۱۲۸ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۵^۲ \overset{۳۱}{\equiv} -۶ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۳ \overset{۳۱}{\equiv} -۳۰ \overset{۳۱}{\equiv} ۱$$

$$۵^{۶n+۴} + ۵^{۳n+۲} + ۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۵^۴ \times ۵^{۶n} + ۵^۲ \times ۵^{۳n} + ۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۵^۴ \times (۵^۳)^{۲n} + ۵^۲ \times (۵^۳)^n + ۱$$

$$\overset{۳۱}{\equiv} ۵^۴ \times ۱^{۲n} + ۵^۲ \times ۱^n + ۱ \overset{۳۱}{\equiv} (-۶)^۲ + (-۶) + ۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۳۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۰$$

یعنی این عبارت مضرب ۳۱ می‌باشد.

۱۲۹ ۱ ۲ ۳ ۴

قضیه فرما: اگر p اول باشد و $(a,p) = ۱$ آنگاه $a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱$

$$\text{فرما}: ۷^{۱۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xRightarrow{\text{توان ۱۱}} ۷^{۱۹۸} \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \overset{\times ۷^۲}{\Rightarrow} ۷^{۲۰۰} \overset{۱۹}{\equiv} ۴۹ \Rightarrow ۷^{۲۰۰} + a \overset{۱۹}{\equiv} ۴۹ + a \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \min(a) = ۸$$

۱۳۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} ?$$

$$۵^۳ = ۱۲۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۴ \overset{۴۱}{\equiv} ۱۰ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۵ \overset{۴۱}{\equiv} ۵۰ \overset{۴۱}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۱۰} \overset{۴۱}{\equiv} ۸۱ \overset{۴۱}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۵^{۲۰} \overset{۴۱}{\equiv} (-۱)^۲ = ۱$$

۱۳۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۸ ، \xrightarrow{\text{توان دو}} ۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} ۶۴ \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۱۱^۳ = ۱۱ \times ۱۱^۲ \overset{۱۹}{\equiv} -۸ \times ۷ \overset{۱۹}{\equiv} -۵۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow ۱۱^۳ \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان } k} ۱۱^{۳k} \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

بنابراین $n = ۳k$ پس:

$$۹ < n = ۳k \leq ۹۹ \Rightarrow n \text{ مقدار } = [\frac{۹۹}{۳}] - [\frac{۹}{۳}] = ۳۰$$

۱۳۲ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۷^۲ = ۴۹ \overset{۱۷}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\text{توان ۴}} (۷^۲)^۴ \overset{۱۷}{\equiv} (-۲)^۴ \equiv ۱۶ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^۸ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۷^{۱۶} \overset{۱۷}{\equiv} ۱$$

$$۷^{۱۵} + a \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۱۶} + ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱ + ۷a \overset{۱۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷a \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ - ۲ \times ۱۷ = -۳۵$$

$$\xrightarrow[(۷,۱۷)=۱]{\div ۷} -۵ \Rightarrow a = ۱۷q - ۵ \xrightarrow{q=۱} a_{min} = ۱۲$$

۱۳۳ **۱** ۲ ۳ ۴

هم باقیمانده بر ۱۱ یعنی همنهشتی به پیمانه ۱۱

$$\text{قضیه فرما}: (a,P) = ۱ \Rightarrow a^{P-۱} \overset{P}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

۱۳۴ ۱ **۲** ۳ ۴

$$۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \Rightarrow ۱۳^{۴۳} \overset{۱۷}{\equiv} (-۴)^{۴۳}$$

$$۴^۲ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow \left(۴^۲\right)^{۲۱} \overset{۱۷}{\equiv} (-۱)^{۲۱} \Rightarrow ۴^{۴۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow ۴^{۴۳} \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \Rightarrow -(۴)^{۴۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۱۳^{۴۳} \overset{۱۷}{\equiv} ۴$$

۱۳۵ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا باقی‌ماندهٔ $۷^{۱۳}$ را بر ۲۳ می‌یابیم:

$$۷^۲ = ۴۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۷} ۷^۳ \overset{۲۳}{\equiv} ۲۱ \overset{۲۳}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۷^۶ \overset{۲۳}{\equiv} (-۲)^۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۴$$

$$۷^{۱۳} = (۷^۶)^۲ \times ۷ \overset{۲۳}{\equiv} (۴^۲) \times ۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۶ \times ۷ \overset{۲۳}{\equiv} -۷ \times ۷ \overset{+(۲\times ۲۳)}{\overset{۲۳}{\equiv}} -۴۹ \overset{۲۳}{\equiv} -۳$$

$$۷^{۱۳} + a \overset{۲۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow -۳ + a \overset{۲۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow a = ۲۳q + ۳$$

$$\xrightarrow{q=۰} a \text{ کمترین مقدار طبیعی } = ۳$$

۱۳۶ ۱ ۲ **۳** ۴

تذکر: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ آنگاه $a \overset{n}{\equiv} b$ یعنی به جای پیمانه می توان مقسوم علیه های طبیعی و بزرگتر از ۱ را جایگزین کرد. چون پیمانه اول است سعی می کنیم از فرما استفاده می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} (-۶)^{۲۳} \overset{۳۳}{\equiv} x \\ ۱۱|۳۳ \end{array}\right\} \Rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} x$$

$$\left[(-۶)^{۱۰}\right]^۲ (-۶)^۳ \overset{۱۱}{\equiv} x, (-۶)^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \text{ (فرما)} \overset{\times (-۶)^۳}{\Rightarrow} -۲۱۶ \overset{۱۱}{\equiv} x \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

در بین چهار گزینه تنها گزینه ۳ در هم نهشتی به پیمانه ۱۱ برابر ۳ است.

راه حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} (-۶)^{۲۳} = \cancel{((-۶)^{۱۰})^۲}^{۱} \times (-۶)^۳ \overset{۱۱}{\equiv} -۲۱۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۵ \\ (-۶) \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۳}{\equiv} ۰ \overset{۳}{\equiv} ۱۵ \end{array}\right\} \Rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۳۳}{\equiv} ۱۵$$

$$\text{فرما : دقت} \begin{cases} a^{p-۱} \overset{p}{\equiv} ۱ \\ (a,p) = ۱ \end{cases}$$

$$\text{تذکر}: \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

۱۳۷ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$۶^n - ۳^n = ۳^n(۲^n - ۱) \overset{۲۵}{\equiv} ۰ \xrightarrow[\div ۳^n]{(۳,۵)=۱} ۲^n - ۱ \overset{۲۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲^n \overset{۲۵}{\equiv} ۱$$

تذکر: باید کوچک ترین عدد طبیعی n را چنان بیابیم که باقی مانده تقسیم ۲^n بر ۲۵ برابر یک شود، با توجه به گزینه ها $n = ۱۰$ را آزمایش می کنیم.

$$n = ۱۰ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱۰۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} ۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می رسانیم}} ۲^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)^۲ \overset{۲۵}{\equiv} ۱$$

۱۳۸ ۱ ۲ ۳ **۴**

برای یافتن رقم یکان عدد a^n ، n را بر ۴ تقسیم می کنیم اگر باقی مانده تقسیم صفر شد به جای توان ۴ قرار می دهیم و اگر باقی مانده تقسیم، بجز صفر شد، به جای توان، خود باقی مانده را قرار می دهیم.

$$a^{p+۴} \overset{۱۰}{\equiv} a^p \overset{۱۰}{\equiv} ۱۰k + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۷$$

۱۳۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$۲^۵ \overset{۲۱۷}{\equiv} ۳۲ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲^{۱۰} \overset{۲۱۷}{\equiv} ۱۰۲۴ = ۵ \times ۲۱۷ - ۶۱ \overset{۲۱۷}{\equiv} -۶ \xrightarrow{\times ۲^۵} ۲^{۱۵} \overset{۲۱۷}{\equiv} -۶۱ \times ۳۲ = -۱۹۵۲ \overset{۲۱۷}{\equiv} -۱۹۵۲ + ۱۰ \times ۲۱۷ \overset{۲۱۷}{\equiv} ۲۱۸ \overset{۲۱۷}{\equiv} ۱$$

حال طرفین به توان p می‌رسانیم؛ داریم:

$$۲^{۱۵} \overset{۲۱۷}{\equiv} ۱$$

در نیمه با توجه به رابطه $۲^n - ۱ \overset{۲۱۷}{\equiv} ۰$ تمامی مضارب ۱۵ در آن صدق می‌کنند. اعداد دورقمی مضرب ۱۵ برابر است با $۱۵, ۳۰, ۴۵, ۶۰, ۷۵, ۹۰$ که تعداد آن‌ها برابر ۶ است.

۱۴۰ **۱** ۲ ۳ ۴ طبق قضیهٔ فرما، اگر a مضرب ۵ نباشد $a^{۴k} \overset{۵}{\equiv} ۱$ و اگر a مضرب ۷ نباشد $a^{۶k} \overset{۷}{\equiv} ۱$ باتوجه به این که ۶۰ هم بر ۴ و هم بر ۶ بخش‌پذیر است. داریم:

$$\begin{aligned} &۶^{۶۰} + ۳^{۶۰} - ۲^{۶۰} \overset{۵}{\equiv} ۱ + ۱ - ۱ \overset{۵}{\equiv} ۱ \\ &۶^{۶۰} + ۳^{۶۰} - ۲^{۶۰} \overset{۷}{\equiv} ۱ + ۱ - ۱ \overset{۷}{\equiv} ۱ \end{aligned} \quad \Rightarrow ۶^{۶۰} + ۳^{۶۰} - ۲^{۶۰} \overset{[۵,۷]}{\equiv} ۱ \overset{۳۵}{\equiv} ۱$$

۱۴۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$N = (\overline{a۵۱b})_۷ \quad ۰ < a \leq ۶\ ,\ ۰ \leq b \leq ۶$$

$$N = (a۵۱b)_۷ \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow b + ۷ + ۵ \times ۷^۲ + a \times ۷^۳ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow b + (-۲) + ۵ \times (-۲)^۲ + a(-۲)^۳ \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۸a - b \overset{۹}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow ۸a \overset{۹}{\equiv} b \Rightarrow -a \overset{۹}{\equiv} b$$

$$\Rightarrow a + b \overset{۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۶ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۴ \\ b = ۵ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۵ \\ b = ۴ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۶ \\ b = ۳ \end{cases}$$

توجه کنید که $a, b \leq ۶$ می باشند (چون عدد در مبنای ۷ نوشته شده است) و در ضمن $a \neq ۰$ است. (وگرنه $\begin{cases} a = ۰ \\ b = ۰ \end{cases}$ هم یک جواب بود.)

۱۴۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\overline{ababab} = \overline{ab} + ۱۰۰\overline{ab} + ۱۰۰۰۰\overline{ab} = ۱۰۱۰۱\overline{ab} = ۳ \times ۷ \times ۳۷ \times ۱۳\overline{ab}$$

۱۴۳ ۱ **۲** ۳ ۴ عدد $\overline{a۷۰b}$ مضرب ۴۴است، یعنی هم مضرب ۴ است و هم مضرب ۱۱، این عدد مضرب۵۵نیست، با توجه به این که مضرب ۱۱است بنابراین مضرب ۵نباید باشد، داریم:

$$\overline{a۷۰b} \overset{۴}{\equiv} \overline{۰b} \Rightarrow b \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow b = ۰, ۴, ۸ \qquad (I)$$

$$\overline{a۷۰b} \overset{۱۱}{\equiv} b - ۰ + ۷ - a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} b + ۷ \quad (II)$$

$$\overline{a۷۰b} \overset{۵}{\not\equiv} ۰ \Rightarrow b \neq ۰, ۵ \quad (III)$$

با توجه به روابط (I) و (II) ، عدد b یا عدد ۴ است یا عدد ۸ . حال به بررسی شرط (II) می پردازیم:

فرض اول: عدد b برابر ۴ باشد، در این صورت $a \overset{11}{\equiv} 4+7 \Rightarrow a=0$ و چون عدد $\overline{a70b}$ چهاررقمی است، بنابراین قابل قبول نمی باشد.

فرض دوم: عدد b برابر ۸ باشد، در این صورت $a \overset{11}{\equiv} 8+7 \overset{11}{\equiv} 4 \Rightarrow a=4$. بنابراین قابل قبول است و لذا $a+b=12$ می باشد.

۱۴۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$N=\overline{a73b8}\overset{44}{\equiv}0\Rightarrow\begin{cases}1)\,N=\overline{a73b8}\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow\overline{b8}\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow\begin{cases}b=0\\b=2\\b=4\\b=6\\b=8\end{cases}\quad(1)\\[2mm]2)\,N=\overline{a73b8}\overset{11}{\equiv}0\Rightarrow 8-b+3-7+a\overset{11}{\equiv}0\Rightarrow a-b\overset{11}{\equiv}-4\\[2mm]a-b\overset{11}{\equiv}-4\xrightarrow{(1)}\begin{cases}b=0\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}7\rightarrow a=7\\b=2\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}9\rightarrow a=9\\b=4\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}0\rightarrow a=0\ \times\\b=6\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}2\rightarrow a=2\ \checkmark\\b=8\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}4\rightarrow a=4\end{cases}\end{cases}$$

واضح است کمترین مقدار N به‌ازای $a=2$ و $b=6$ حاصل می‌شود.

$$N=\overline{a73b8}=27368$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم N بر ۹ برابر ۸ است.

۱۴۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$N=\overline{5abb6}\qquad 0\le a,b\le 9$$

عددی بر ۹۹ بخش پذیر است که بر ۹ و ۱۱ بخش پذیر باشد. حال قاعده های بخش پذیری ۹ و ۱۱ را بر عدد $\overline{5abb6}$ اعمال می کنیم:

$$6-b+b-a+5\overset{11}{\equiv}0\Rightarrow a\overset{11}{\equiv}0\Rightarrow a=0$$

$$6-b+b+a+5\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow a+2b+11\overset{9}{\equiv}0\xrightarrow{a=0}2b+2\overset{9}{\equiv}0\xrightarrow[(2,9)=1]{\div 2}b+1\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow b=8$$

۱۴۶ **۱** ۲ ۳ ۴ عددی بر ۹ بخشپذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخشپذیر باشد.

عددی بر ۱۱ بخشپذیر است که اگر از سمت راست ارقام را یکی درمیان مثبت و منفی کنیم، حاصل بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

$$\begin{cases}\overline{a63b29}\overset{11}{\equiv}0\Rightarrow 9-2+b-3+6-a\overset{11}{\equiv}0\Rightarrow b\overset{11}{\equiv}a+1\qquad b=a+1\ \text{پس}\ a,b\ \text{دو عدد متوالی هستند پس}\\\overline{a63b29}\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow a+6+3+b+2+9\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow a+b+2\overset{9}{\equiv}0\end{cases}$$

پس $a=3$ و $b=4$ قابل قبول است.

۱۴۷ **۱** ۲ ۳ ۴

$$N=\overline{a746b}\overset{36}{\equiv}\Rightarrow\begin{cases}(1)\quad\overline{a746b}\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow b+10\times6\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow b\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow b=0,4\ \text{یا}\ 8\\(2)\quad\overline{a746b}\overset{9}{\equiv}b+6+4+7+a\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow a+b\overset{9}{\equiv}1\end{cases}$$

$$a+b\overset{9}{\equiv}1\Rightarrow\begin{cases}b=0\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}1\Rightarrow a=1\\b=4\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}-3\overset{9}{\equiv}6\Rightarrow a=6\\b=8\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}-7\overset{9}{\equiv}2\Rightarrow a=2\end{cases}$$

به ازای $a=6$ و $b=4$ بزرگترین مقدار N حاصل می‌شود.

$$N_{\max}=67464\Rightarrow N\overset{11}{\equiv}4-6+4-7+6\overset{11}{\equiv}1$$

۱۴۸ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\overline{a35b2}\overset{36}{\equiv}0\xrightarrow[9|36]{4|36}\begin{cases}\overline{a35b2}\overset{4}{\equiv}0\Rightarrow\overline{b2}\overset{4}{\equiv}0\xrightarrow{0\le b\le 9}b=1,3,5,7,9\\\overline{a35b2}\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow 2+b+5+3+a\overset{9}{\equiv}0\Rightarrow a+b\overset{9}{\equiv}8\end{cases}$$

$$a+b\overset{9}{\equiv}8\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}b=1\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}7\xrightarrow{1\le a\le 9}a=7\Rightarrow\overline{a35b2}=73512\\ b=3\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}5\xrightarrow{1\le a\le 9}a=5\Rightarrow\overline{a35b2}=53532\\ b=5\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}3\xrightarrow{1\le a\le 9}a=3\Rightarrow\overline{a35b2}=33552\\ b=7\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}1\xrightarrow{1\le a\le 9}a=1\Rightarrow\overline{a35b2}=13572\\ b=9\Rightarrow a\overset{9}{\equiv}-1\overset{9}{\equiv}8\Rightarrow a=8\Rightarrow\overline{a35b2}=83592\end{array}\right\}\text{ ۵ عدد}$$

۱۴۹ (۱) (۲) **(۳)** (۴) عددی بر ۱۲ بخش‌پذیر است که بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد. پس a یک رقم زوج غیرصفر است. (عدد سه رقمی است.) در ضمن b به گونه‌ای باید انتخاب شود که مجموع ارقام بر ۳ بخش‌پذیر باشد $b\neq 2$.

۲۵۲ : کوچکترین عدد ۸۸۸ : بزرگترین عدد

$$\bar{x}=\frac{252+888}{2}=\frac{1140}{2}=570$$

۱۵۰ (۱) **(۲)** (۳) (۴) اگر (ب.م.م) این دو عدد را d بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}d\,|\,9n+2\\ d\,|\,11n+7\end{cases}\Rightarrow d\,|\,9(11n+7)-11(9n+2)\Rightarrow d\,|\,41$$

و چون $d\neq 1$ است، پس $d=41$. بنابراین:

$$9n+2\overset{41}{\equiv}0\Rightarrow 9n\overset{41}{\equiv}-2\overset{41}{\equiv}39\Rightarrow 3n\overset{41}{\equiv}13\overset{41}{\equiv}54\Rightarrow n\overset{41}{\equiv}18$$

بنابراین $n=41k+18$ است و کوچکترین مقدار n برابر ۱۸ می‌باشد که مضرب ۶ است.

۱۵۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

نکته: اگر $a,b,c\in\mathbb{Z}$ آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l}a|b\\ a|c\end{array}\right\}\to a|mb+nc\quad m,n\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l}\alpha|13n+3\\ \alpha|7n+4\end{array}\xrightarrow[\times(+13)]{\times(-7)}\alpha|-7(13n+3)+13(7n+4)\Rightarrow\alpha|31\xrightarrow{\alpha\neq 1}\alpha=\pm 31,-1$$

$$\alpha=31\text{ فرض }\xrightarrow{\alpha|7n+4}31|7n+4\Rightarrow 7n+4\overset{31}{\equiv}0\Rightarrow 7n\overset{31}{\equiv}-4\overset{31}{\equiv}-35$$

$$\xrightarrow[(7,31)=1]{\div 7}n\overset{31}{\equiv}-5\Rightarrow n=31q-5\xrightarrow{q=1}\underbrace{n}_{\text{کمترین مقدار طبیعی}}=26\Rightarrow\text{جمع ارقام}=2+6=8$$

۱۵۲ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$2x^2-x-6\overset{53}{\equiv}0\Rightarrow(x-2)(2x+3)\overset{53}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2\overset{53}{\equiv}0\Rightarrow x\overset{53}{\equiv}2\Rightarrow x=53k+2\Rightarrow x=956,903,\cdots\\ 2x+3\overset{53}{\equiv}0\Rightarrow 2x\overset{53}{\equiv}-3\overset{53}{\equiv}50\xrightarrow[(2,53)=1]{\div 2}x\overset{53}{\equiv}25\Rightarrow x=53k+25\Rightarrow x=979,926,\cdots\end{cases}$$

واضح است بزرگترین عدد سه رقمی در بین مقادیر فوق ۹۷۹ بوده و یکان آن ۹ می‌باشد.

۱۵۳ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$a=bq+r\Rightarrow a=b\times 25+17\qquad 0\le r<b\Rightarrow 17<b\quad(1)$$

از طرفی a مضرب ۶ است، پس:

$$a\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow 25b+17\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow b-1\overset{6}{\equiv}0\Rightarrow b\overset{6}{\equiv}1\Rightarrow b=6k+1$$

$$(1):17<b\xrightarrow{b=6k+1}\begin{cases}k_{min}=3\\ b_{min}=19\end{cases}$$

$$a=25b+17\xrightarrow{b=19}a_{min}=25\times 19+17=492$$

۱۵۴ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$$2n+1\overset{5}{\equiv}0\Rightarrow 2n\overset{5}{\equiv}-1\overset{5}{\equiv}4\xrightarrow[(2,5)=1]{\div 2}n\overset{5}{\equiv}2\xrightarrow{\times 7}7n\overset{5}{\equiv}14\xrightarrow{+6}7n+6\overset{5}{\equiv}20\overset{5}{\equiv}0$$

$$۱۴n^۲+۱۹n+۶=(۲n+۱)(۷n+۶)=۵k\times۵k'=۲۵kk'\overset{۲۵}{\equiv}۰$$

یعنی باقی‌مانده $۱۴n^۲+۱۹n+۶$ بر ۲۵ برابر صفر است.

۱۵۵ — ① **②** ③ ④

$$\begin{matrix}\alpha|۱۱n+۳\\ \alpha|۵n+۴\end{matrix}\xrightarrow[\times۱۱]{\times-۵}\alpha|-۵(۱۱n+۳)+۱۱(۵n+۴)\Rightarrow\alpha|-۵۵n-۱۵+۵۵n+۴۴$$

$$\Rightarrow\alpha|۲۹\to\alpha=\pm۱\ \text{یا}\ \pm۲۹\xrightarrow{\text{بافرض: }\alpha\neq۱}\alpha=۲۹$$

چون $\alpha|۵n+۴$ داریم:

$$۲۹|۵n+۴\Rightarrow۵n+۴\overset{۲۹}{\equiv}۰\Rightarrow۵n\overset{۲۹}{\equiv}-۴\overset{۲۹}{\equiv}۲۵$$

(+۲۹)

$$\Rightarrow۵n\overset{۲۹}{\equiv}۲۵\xrightarrow[(۵,۲۹)=۱]{\div۵}n\overset{۲۹}{\equiv}۵\to n=۲۹k+۵$$

به‌ازای $k=۱,۲,۳$ برای n مقادیر دورقمی حاصل می‌شود.

۱۵۶ — **①** ② ③ ④

(−۶۲) (−۳۱)

$$۷۲x\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow۱۰x\overset{۳۱}{\equiv}۱\Rightarrow۱۰x\overset{۳۱}{\equiv}-۳۰\Rightarrow x\overset{۳۱}{\equiv}-۳$$

$$x=۳۱k-۳\Rightarrow۱۰۰\leq۳۱k-۳<۱۰۰۰\Rightarrow۱۰۳\leq۳۱k<۱۰۰۳$$

$$۳/۰۰۰\leq k<۳۲/۰۰۰\Rightarrow۴\leq k\leq۳۲\Rightarrow\text{تعداد}=۳۲-۴+۱=۲۹$$

۱۵۷ — **①** ② ③ ④ ب.م.م دو عدد $۵n+۴$ و $۱۳n-۳$ را $d\neq۱$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$(۵n+۴\ ,\ ۱۳n-۳)=d\Rightarrow\begin{cases}d|۵n+۴\xrightarrow{\times۱۳}d|۶۵n+۵۲\\ \quad(۱)\\ d|۱۳n-۳\xrightarrow{\times۵}d|۶۵n-۱۵\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}d|۶۷\xrightarrow{d\neq۱}d=۶۷$$

$$d=۶۷\xrightarrow{(۱)}۶۷|۵n+۴\to۵n+۴\overset{۶۷}{\equiv}۰\to۵n\overset{۶۷}{\equiv}-۴\overset{۶۷}{\equiv}-۲۰۵\xrightarrow[(۵,۶۷)=۱]{\div۵}n\overset{۶۷}{\equiv}-۴۱\to n=۶۷k-۴۱\xrightarrow{n\text{ دورقمی است}}\begin{cases}k=۱\to n=۲۶\\k=۲\to n=۹۳\end{cases}$$

(−۳×۶۷)

دو مقدار طبیعی دو رقمی برای n وجود دارد.

۱۵۸ — ① **②** ③ ④

$$a=۲۱b+۳۷\ ,\ r<b\Rightarrow۳۷<b\ ;\ a\overset{۵}{\equiv}۰\Rightarrow۲۱b+۳۷\overset{۵}{\equiv}۰\Rightarrow b\overset{۵}{\equiv}-۲\to b=۵k-۲$$

$$۳۷<b\Rightarrow\left|\begin{matrix}k=۸\\b=۳۸\end{matrix}\right.\Rightarrow a=۸۳۵\ \text{و}\ \left|\begin{matrix}k=۹\\b=۴۳\end{matrix}\right.\Rightarrow a=۹۴۰$$

۱۵۹ — ① ② ③ **④**

$$۳۵۷x+۶۲۹y=(۳۵۷,۶۲۹)=(۱۷\times۲۱,۱۷\times۳۷)=۱۷\overset{\div۱۷}{\Rightarrow}۲۱x+۳۷y=۱$$

$$\Rightarrow\underbrace{۲۱x}_{۰}+۳۷y\overset{۲۱}{\equiv}۱\xrightarrow{۳۷\overset{۲۱}{\equiv}-۵}-۵y\overset{۲۱}{\equiv}۱\overset{۲۱}{\equiv}-۲۰\overset{\div۵}{\Rightarrow}y\overset{۲۱}{\equiv}۴$$

مضارب پیمانه را طوری به طرف دوم (یعنی عدد ۱ اضافه کردیم که بر ۲۱ بخش پذیر شود.)

$$\Rightarrow\begin{cases}y=۲۱k+۴\\x=-۳۷k-۷\end{cases}\Longrightarrow x+y=-۱۶k-۳\xrightarrow{x+y>۰}\min(x+y)=۱۳$$

۱۶۰ — ① ② **③** ④

$x:$ تعداد خرید از کالای ۲۲۰ تومانی

$y:$ تعداد خرید از کالای ۱۴۰ تومانی

$$۲۲۰x+۱۴۰y=۱۹۰۰۰ \xrightarrow{\div ۲۰} ۱۱x+۷y=۹۵۰ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow ۱۱x=-۷y+۹۵۰ \Rightarrow ۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۹۵۰ \xrightarrow{۹۵۰\overset{۷}{\equiv}۵} ۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۵ \overset{+(۴\times ۷)}{\overset{۷}{\equiv}} ۳۳$$

$$\xrightarrow[(۱۱,۷)=۱]{\div ۱۱} x \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۷k+۳$$

حال در معادلهٔ (۱) مقدار $x=۷k+۳$ را صدق می‌دهیم:

$$۱۱(۷k+۳)+۷y=۹۵۰ \Rightarrow ۷y=-۱۱\times ۷k+۹۱۷ \xrightarrow{\div ۷} y=-۱۱k+۱۳۱$$

حال باید تعداد جواب‌های حسابی را یافته و اشتراک بگیریم:

$$۰\leq x \Rightarrow ۰\leq ۷k+۳ \Rightarrow -۳\leq ۷k \Rightarrow -\frac{۳}{۷}\leq k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} ۰\leq k \quad (I)$$

$$۰\leq y \Rightarrow ۰\leq -۱۱k+۱۳۱ \Rightarrow ۱۱k\leq ۱۳۱ \Rightarrow k\leq \frac{۱۳۱}{۱۱}=۱۱/\cdots \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\leq ۱۱ \quad (II)$$

$(I)\cap(II): ۰\leq k\leq ۱۱ \longrightarrow$ ۱۲ مقدار

چون برای k دوازده مقدار محاسبه شد پس مسئله ۱۲ جواب دارد.

۱۶۱ ۴ ۳ **۲** ۱

$$۲۲۱x+۳۵۷y=(۲۲۱,۳۵۷)$$

ابتدا ب.م.م دو عدد ۲۲۱ و ۳۵۷ را می‌یابیم.

$$(۲۳۱,۳۵۷)=(۲۲۱,۱۳۶)=(۸۵,۱۳۶)=۱۷$$
$$۲۲۱x+۳۵۷y=۱۷ \xrightarrow{\div ۱۷} ۱۳x+۲۱y=۱$$

چون x را می‌خواهد از طرفین به پیمانه ضریب y هم نهشتی می‌گیریم:

$$۱۳x+۲۱y \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳x \overset{۲۱}{\equiv} \overset{+۳\times ۲۱}{۱} \rightarrow -۸x \overset{۲۱}{\equiv} ۶۴ \xrightarrow[(-۸,۲۱)=۱]{\div(-۸)} x \overset{۲۱}{\equiv} -۸$$

$$\Rightarrow x=۲۱k-۸ \xrightarrow{۱\leq k\leq ۵} x=\underbrace{۱۳,۳۴,۵۵,۷۶,۹۷}_{\text{۵ مقدار}}$$

۱۶۲ ۴ ۳ **۲** ۱ از طرفین به پیمانه ضریب کوچکتر یعنی ۱۲ همنهشتی می گیریم.

$$۲۵x+۱۲y \overset{۱۲}{\equiv} ۱۱۱۰ \Rightarrow x \overset{۱۲}{\equiv} ۱۱۱۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \Rightarrow x=۱۲k+۶$$
$$۲۵x+۱۲y=۱۱۱۰ \Rightarrow ۲۵(۱۲k+۶)+۱۲y=۱۱۱۰ \Rightarrow ۱۲y=۹۶۰-۲۵\times ۱۲k \Rightarrow y=۸۰-۲۵k$$
$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \Rightarrow ۱۲k+۶>۰ \Rightarrow k>-۰/۵ \\ y>۰ \Rightarrow ۸۰-۲۵k>۰ \Rightarrow ۲۵k<۸۰ \Rightarrow k<۳/۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -۰/۵<k<۳/۲ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=۰,۱,۲,۳ \quad \text{۴ جواب}$$

۱۶۳ **۴** ۳ ۲ ۱

$$۹x+۱۳y=۷۲۵ \Rightarrow ۱۳y=-۹x+۷۲۵ \Rightarrow ۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷۲۵$$

$$\xrightarrow{۷۲۵\overset{۹}{\equiv}۵} ۴y \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} -۴ \xrightarrow[(۴,۹)=۱]{\div ۴} y \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow y=۹k-۱$$

$y=۹k-۱$ را در معادله صدق داده و مقدار x را می‌یابیم:

$$۹x+۱۳(۹k-۱)=۷۲۵ \Rightarrow ۹x=-۱۳\times ۹k+۷۳۸ \xrightarrow{\div ۹} x=-۱۳k+۸۲$$

چون x, y باید طبیعی باشند:

$$۱\leq x \Rightarrow ۱\leq -۱۳k+۸۲ \Rightarrow ۱۳k\leq ۸۱ \Rightarrow k\leq \frac{۸۱}{۱۳}\simeq ۶/۲۳ \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\leq ۶ \quad (۱)$$

$$۱ \leq y \Rightarrow ۱ \leq ۹k - ۱ \Rightarrow ۲ \leq ۹k \Rightarrow \frac{۲}{۹} \leq k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} ۱ \leq k \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{\cap} ۱ \leq k \leq ۶$$

چون برای k، ۶ مقدار حاصل شد پس معادلهٔ سیاله دارای ۶ جواب طبیعی است.

۱۶۴ ۴ ۳ ۲ **۱** پیمانه را ۲۹ می‌گیریم:

$$+ 2 \times 29$$

$$۱۹x = ۲۹y + ۱۱۴ \Rightarrow ۱۹x \overset{۲۹}{\equiv} ۱۱۴ \Rightarrow -۱۰x \overset{۲۹}{\equiv} -۲ \Rightarrow \qquad 10x \overset{29}{\equiv} 2 \overset{29}{\equiv} 60$$

$$\xrightarrow[(۱۰,۲۹)=۱]{\div ۱۰} x \overset{۲۹}{\equiv} ۶ \Rightarrow x = ۲۹k + ۶$$

کوچکترین عدد سه‌رقمی x به ازای $k = ۴$ حاصل می‌شود که برابر ۱۲۲ است و جمع ارقام آن ۵ می‌باشد.

۱۶۵ ۴ **۳** ۲ ۱ $۱۵۰x + ۲۵۰y = ۳۷۰۰ \xrightarrow{\div ۵۰} ۳x + ۵y = ۷۴$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{پیمانه را ۳}} ۳x + ۵y \overset{۳}{\equiv} ۷۴ \to ۰ + (-y) \overset{۳}{\equiv} ۲ \to y \overset{۳}{\equiv} -۲ \to y = ۳k - ۲$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله صدق می‌دهیم}} ۳x + ۵(۳k - ۲) = ۷۴ \to ۳x = -۵ \times ۳k + ۸۴$$

$$\xrightarrow{\div ۳} x = -۵k + ۲۸$$

$$\left.\begin{array}{l} x \geq ۰ \to -۵k + ۲۸ \geq ۰ \to k \leq \dfrac{۲۸}{۵} \simeq ۵/۰۰۰ \to k \leq ۵ \\ y \geq ۰ \to ۳k - ۲ \geq \to k \geq \dfrac{۲}{۳} \to k \geq ۱ \end{array}\right\} \to ۱ \leq k \leq ۵ \to \text{۵ مقدار}$$

پاسخ‌نامه کلیدی

۹۱	۲	۱۱۰	۲	۱۲۹	۴	۱۴۸	۲
۹۲	۴	۱۱۱	۱	۱۳۰	۱	۱۴۹	۳
۹۳	۴	۱۱۲	۴	۱۳۱	۴	۱۵۰	۲
۹۴	۲	۱۱۳	۳	۱۳۲	۴	۱۵۱	۲
۹۵	۲	۱۱۴	۱	۱۳۳	۱	۱۵۲	۴
۹۶	۲	۱۱۵	۳	۱۳۴	۲	۱۵۳	۴
۹۷	۱	۱۱۶	۱	۱۳۵	۲	۱۵۴	۴
۹۸	۱	۱۱۷	۱	۱۳۶	۳	۱۵۵	۲
۹۹	۲	۱۱۸	۲	۱۳۷	۴	۱۵۶	۱
۱۰۰	۱	۱۱۹	۳	۱۳۸	۴	۱۵۷	۱
۱۰۱	۲	۱۲۰	۱	۱۳۹	۳	۱۵۸	۲
۱۰۲	۴	۱۲۱	۱	۱۴۰	۱	۱۵۹	۴
۱۰۳	۲	۱۲۲	۲	۱۴۱	۴	۱۶۰	۳
۱۰۴	۲	۱۲۳	۳	۱۴۲	۳	۱۶۱	۲
۱۰۵	۴	۱۲۴	۳	۱۴۳	۲	۱۶۲	۲
۱۰۶	۲	۱۲۵	۱	۱۴۴	۴	۱۶۳	۴
۱۰۷	۲	۱۲۶	۴	۱۴۵	۴	۱۶۴	۱
۱۰۸	۱	۱۲۷	۱	۱۴۶	۱	۱۶۵	۳
۱۰۹	۱	۱۲۸	۴	۱۴۷	۱		