



بنام آفریدگار زیبایی:

درس: ریاضیات گسسته

مبحث: نظریه

تهیه و تنظیم: استاد کرد



پدرام کرد

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۱) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

الف) اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۲) ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۳) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۴) ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ .

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۵) هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

الف) برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $2^n + 1$  اول است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

۶) عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.





سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

**الف** حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

**ب** اگر برای دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  داشته باشیم  $a|b$ ، برای هر  $m \in \mathbb{Z}$  داریم:  $(a|mb, ma|b)$ .

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

**پ** اگر  $a|b$  آنگاه ب.م.م دو عدد  $a$  و  $b$  برابر با  $(a, |a|)$  است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۱

**ت** اگر  $ac \equiv bc$  و  $(c, m) = d$  آنگاه رابطه  $a \equiv b$  و  $a \equiv \frac{m}{d} b$  برقرار خواهد بود.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

**۷** درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

**الف** برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ ، داریم:  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

**ب** اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$  آنگاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

**پ** اگر  $a, b \in \mathbb{R}$  داریم:  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ .

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

**ت** حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

**۸** درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

**الف** حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.





سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

ب) هیچ عدد صحیحی مانند  $x$  و  $y$  وجود ندارد که رابطه  $x^2 + y^2 = (x + y)^2$  برقرار باشد.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۹) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

۱۰) گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۹

ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

۱۱) درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

الف) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

ب) برای اعداد صحیح  $a, b$  و  $c$  که  $a \neq 0$  اگر  $a|b + c$  آنگاه  $a|b$  یا  $a|c$ .

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۲

پ) اگر داشته باشیم  $(a, b) = 1$  آنگاه می‌گوییم؛  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول‌اند.

۱۲) ثابت کنید اگر  $p \geq 5$  عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت  $p = 4k + 1$  یا  $p = 4k + 3$  نوشته می‌شود.

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۴۰۰

سوالات امتحانی داخل کشور - ۱۳۹۸

۱۳) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha + 2\beta$  گنگ است.



۱۴) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\alpha - \beta$  گنگ است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۱۵) به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر  $a$  عدد صحیح فرد باشد و  $2 + a|b$ ، آنگاه  $b$  نیز عددی فرد است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۱۶) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha - \beta$  گنگ است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۱۷)  $a_1, a_2, a_3$  اعدادی صحیح هستند و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۱۸) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید: سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

الف) اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد،  $\frac{1}{x}$  نیز عددی گنگ است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

ب) اگر  $a|b + c$  یا  $a|c$  سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر  $a$  و  $b$  به شرط آنکه  $a + b \neq 0$  تساوی  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  برقرار است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۱۹) درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

ب) حاصل  $(3m + 1, 3m + 2)$  برابر ۱ می‌باشد. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲



۲۰) به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آنها است. سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۱) برای هر سه عدد حقیقی  $x, y, z$  ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۲۲) ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۲۳) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

$$(x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \text{ برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم:})$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۲۴) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۲۵) اگر  $x, y$  و  $z$  سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:  $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$

۲۶) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

$$(y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \text{ برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم:})$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۲۷) ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

$$28) \text{ اگر } x \text{ و } y \text{ دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

$$29) \text{ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر } a > 0 \text{ آن‌گاه } a + \frac{1}{a} \geq 2.$$



سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

۳۰) اگر  $a > 1$  و  $a|9k + 4$  و  $a|5k + 3$  ثابت کنید  $a$  عددی اول است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۱) اگر عددی مانند  $k$  در  $\mathbb{Z}$  باشد به طوری که  $7|2k + 1$ ، ثابت کنید:

$$49|4k^2 - 10k - 6$$

۳۲) باقی مانده تقسیم  $a$  بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است، باقی مانده تقسیم  $a$  بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

۳۳) اگر  $a|2m + 3$  و  $a|m + 7$ ، در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای  $a$  وجود دارد؟

۳۴) اگر  $a \neq 0$  عددی صحیح و دو عدد  $(5m + 4)$  و  $(6m + 5)$  بر  $a$  بخش پذیر باشند، ثابت کنید  $a = \pm 1$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۵) اگر عددی مانند  $k$  در  $\mathbb{Z}$  باشد، به طوری که  $5|4k + 1$ ، ثابت کنید  $25|16k^2 + 28k + 6$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

۳۶) اگر عدد طبیعی  $a$ ، دو عدد  $(5k + 9)$  و  $(8k + 13)$  را عا د کند، ثابت کنید:  $a = 1$  یا  $a = 7$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۳۷) اگر  $a > 1$ ،  $a|9k + 4$  و  $a|5k + 3$ ، ثابت کنید  $a$  عددی اول است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۳۸) فرض کنیم  $a$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند به طوری که  $a|3n + 4$  و  $a|2n + 3$ . نشان دهید  $a = 1$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

۳۹) اگر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $n|9k + 7$  و  $n|7k + 6$ ، ثابت کنید  $n = 1$  یا  $n = 5$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

۴۰) گزاره های درست را مشخص کرده و برای گزاره های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.



سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**الف** برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**ب** برای دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$ ، اگر  $a|b$  آنگاه  $[a, b] = |b|$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**۴۱** جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**الف**  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح و  $a$  مخالف صفر است. اگر  $a|b$ ، آن‌گاه عدد ..... شمارنده عدد ..... است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**ب**  $m$  عددی صحیح است. حاصل  $(2m, 6m^3)$  برابر با ..... است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**۴۲** درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**الف** اگر  $a|b$  و  $n$  و  $m$  دو عدد طبیعی باشند که  $m \leq n$ ، آنگاه  $a^m|b^n$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**ب** اگر  $a|b$  آنگاه  $(a, b) = a$

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

**۴۳** درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

**الف** اگر  $a|b$  و  $b \neq 0$ ، در این صورت  $|a| > |b|$ .





**ب** برای دو عدد صحیح و ناصفر  $a$  و  $b$  اگر  $(a|c, b|c)$  و  $(\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m)$  آن گاه  $[a, b] = c$ .

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

**پ** بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و -۲ برابر ۲- است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۱

**۴۴** فرض کنید  $a$  عددی طبیعی باشد، حاصل  $[21a^2, 35a]$  را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۹

**۴۵** جاهای خالی را پر کنید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸

$[a, b] = c$  اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۳۹۸ **الف**

۱)  $a|c, b|c$  ۲)  $\forall m > 0, \dots\dots\dots$

**۴۶** اگر  $a$  عددی طبیعی باشد، حاصل  $(5a + 4, 2a + 3)$  را به دست آورید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۰

**۴۷** در جاهای خالی عبارتهای مناسب بنویسید.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

**الف** حاصل  $([m^2, m], m^5)$  برابر با ..... است.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲

**ب** اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر  $a$  و  $b$  داشته باشیم  $(a, b) = 1$  می‌گوییم  $a$  و  $b$  ..... هستند.

سوالات امتحانی داخل کشور- ۱۴۰۲