

پاسخنامه تشریحی

۱

درست

الف

$$k = n(n+1) \Rightarrow k = n^2 + n \Rightarrow 4k = 4n^2 + 4n \Rightarrow 4k + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow 4k + 1 = (2n+1)^2$$

ب

درست

فرض کنیم $(a, a+1) = d, a \in \mathbb{Z}$ در نتیجه داریم:

$$\frac{d|a}{d|a+1} \rightarrow d|(a+1) - a \rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

۲

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4k^2 + 4k + 1}_{(k+1)^2} = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1 \Rightarrow r = 1$$

ضرب دو عدد صحیح متوالی

۳

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$$

۴

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۵

الف

نادرست، مثال نقض $n=3$

درست، اثبات:

ب

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

۶

الف گنگ

ب $a|mb$

پ $|a|$

ت $\frac{m}{a} \equiv b$

۷

نادرست، برای مثال $x=3$ و $y=6$ را در نظر بگیرید:

الف

$$3 = \sqrt{6+3} \neq \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

ب درست

نادرست، برای مثال:

پ

$$-2 < -1 \not\equiv 4 = (-2)^2 \not\equiv (-1)^2 = 1$$

نادرست برای مثال:

ت

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c \Rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

۸

الف درست

ب نادرست (برای مثال $x=0$ و $y=2$ را در نظر بگیرید).

۹

الف گزاره درست است زیرا دو عدد فرد a و a' را در نظر می‌گیریم؛ داریم:

$$a = 2k + 1, a' = 2k' + 1 \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$



$$a + a' = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1) = 2k'' \Rightarrow \text{عدد زوج است.}$$

(ب) گزاره نادرست است.

از مثال نقض استفاده می‌کنیم. اگر $n = 4$ قرار دهیم؛ داریم:

$$2^n - 1 \stackrel{n=4}{=} 2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5 \Rightarrow \text{اول نیست.}$$

۱۰

نادرست

الف

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c$$

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^c$$

ب

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$$

درست

۱۱

الف نادرست

ب نادرست

پ درست

۱۲

باقی‌مانده هر عدد بر ۴ به یکی از صورت‌های زیر است:

$$p = 4k \quad (1), \quad p = 4k + 1 \quad (2), \quad p = 4k + 2 \quad (3), \quad p = 4k + 3 \quad (4)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

$$(13) \text{ اگر } \alpha + 2\beta \text{ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.}$$

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.

$$\text{می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: } (\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$$

اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

$$(14) \text{ از برهان خلف استفاده می‌کنیم.}$$

فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = m \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta = n \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \text{ (تناقض با فرض)}$$

۱۵

$$b = 2k, \quad b|a+2 \Rightarrow a+2 = bq \Rightarrow a = 2t$$

که با فرض سوال در تناقض است.

$$(16) \text{ فرض خلف: فرض کنیم } \alpha - \beta \text{ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس } (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q} \text{ یعنی } 2\alpha \in \mathbb{Q} \text{؛ در نتیجه } \alpha \in \mathbb{Q} \text{ و این با}$$

فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

$$(17) \text{ اگر } (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) \text{ زوج نباشند (فرض خلف)، پس عددی فرد است،}$$

پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند،

در نتیجه مجموع آنها باید فرد باشد،

اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است،

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

۱۸

الف درست

ب نادرست

پ نادرست

۱۹

الف درست

ب

درست



۲۰

$$xy \leq \frac{x^r + y^r}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^r + y^r \Leftrightarrow x^r + y^r - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^r \geq 0.$$

گزاره همواره درست است.

۲۱

$$x^r + y^r + z^r \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^r + 2y^r + 2z^r \geq 2xy + 2yz + 2xz \\ \Leftrightarrow (x^r + y^r - 2xy) + (y^r + z^r - 2yz) + (x^r + z^r - 2xz) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^r + (y - z)^r + (x - z)^r \geq 0.$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{اگر دو عدد نامنفی باشند حکم چنین خواهد بود:} \quad (22)$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$
 گزاره همیشه درست است.

۲۳

$$2x^r + 2y^r + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (x^r - 2x + 1) + (y^r - 2y + 1) + (x^r - 2xy + y^r) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^r + (y-1)^r + (x-y)^r \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^r \geq 0, \quad (y-1)^r \geq 0, \quad (x-y)^r \geq 0.$$

۲۴

$$2x^r + 2xy + y^r \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^r + 2xy + y^r + x^r - 4x + 4 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^r + (x-2)^r \geq 0.$$

۲۵

$$x^r + y^r + 1 \geq 2xy - z^r \Leftrightarrow x^r + y^r - 2xy + z^r + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^r + z^r + 1 \geq 0.$$
 همواره بدیهی است.

۲۶

$$y^r + 1 \geq -2x(y+x+1) \Leftrightarrow x^r + y^r + 2xy + x^r + 2x + 1 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^r + (x+y)^r \geq 0 \Rightarrow \text{این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است}$$

۲۷

فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r+x-r \in Q$ یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۲۸

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0.$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسأله درست است.

۲۹

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0.$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.

نکته: ۳۰

۱) اگر عدد a عدد b را عاد کند، آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز می‌شمارد.

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|mb \pm nc \quad (r)$$

$$\begin{aligned} a|9k+4 &\Rightarrow a|45k+20 \Rightarrow a|5 \rightarrow a = \pm 1 \text{ یا } \pm 5 \xrightarrow{a>1} a=5 \\ a|5k+3 &\Rightarrow a|45k+27 \end{aligned}$$

$$5|2k+1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^r+4k+1 \\ 49|14k+7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^r-10k-6$$

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_r + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_r + 15 \\ \hline \rightarrow a = 20q' - 1 \rightarrow a = 20q^n + 19 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a|2m+3 \\ a|m+7 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a|2m+3 \\ a|2m+14 \end{cases} \rightarrow a|11 \rightarrow a=1, a=11$$

$$\begin{aligned} a|6(\delta m + 4) &\rightarrow a|\delta(6m + 5) - 6(\delta m + 4) \rightarrow a|1 \rightarrow a = \pm 1 \\ a|\delta(6m + 5) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta|4k+1 &\Rightarrow 2\delta|16k^2 + 8k + 1 \xrightarrow{+} 2\delta|16k^2 + 28k + 6 \\ \delta|4k+1 &\Rightarrow 2\delta|20k + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a|\delta k + 9 \\ a|8k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|40k + 72 \\ a|40k + 65 \end{cases} \Rightarrow a|7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7$$

$$\begin{aligned} a|9(\delta k + 3) - 8(9k + 4) &\Rightarrow a|27 - 20 \\ \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a = 7 \in P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a|3n + 4 \\ a|2n + 3 \end{aligned} \Rightarrow a| -2(3n + 4) + 3(2n + 3) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1$$

$$\left. \begin{aligned} n|9k + 7 &\times (-7) \\ n|7k + 6 &\times 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n| -63k - 49 + 63k + 54 \Rightarrow n|5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } 5$$

الف

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$$

- ۳۳
 - ۳۴
 - ۳۵
 - ۳۶
 - ۳۷
 - ۳۸
 - ۳۹
 - ۴۰
- نادرست

ب درست

۴۱

الف عدد a شمارنده عدد b است.

ب $2m$

۴۲

الف درست

ب نادرست

۴۳

الف نادرست

ب درست

پ نادرست

۴۴

۴۵

$$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2, B = 35a^2 = 5 \times 7 \times a^2 \Rightarrow [A, B] = 105a^2$$

الف

$$\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$$

$$\begin{aligned} (\delta a + 4, 2a + 3) = d &\Rightarrow \left. \begin{aligned} d|2a + 3 \\ d|\delta a + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d| -2(\delta a + 4) + \delta(2a + 3) \\ \Rightarrow d|7 &\Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7 \end{aligned}$$

الف

m^2

۴۷

