



۱- اگر n عددی طبیعی باشد، از روابط $a \mid 4n^2 + 6$ ، $a \mid 6n^2 + 1$ چند مقدار طبیعی برای a موجود است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۵

۲- چه تعداد از گزاره‌های زیر را می‌توان به روش مستقیم اثبات کرد؟

الف) اگر مجموع دو عدد زوج باشد، حاصل ضرب آنها نیز زوج است.

ب) اگر مجموع دو عدد فرد باشد، حاصل ضرب آنها نیز فرد است.

ج) اگر مربع عددی فرد را بر ۸ تقسیم کنیم، باقی‌مانده مساوی ۱ می‌شود.

د) اگر حاصل ضرب دو عدد زوج باشد، تفاضل آنها نیز زوج است.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳- در اثبات درستی رابطه $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$ به کمک اثبات بازگشتی به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟ (a و b دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

- ① $(a+b)^2 \geq 0$ ② $(a-b)^2 \geq 0$ ③ $(a-2b)^2 \geq 0$ ④ $(2a-b)^2 \geq 0$

۴- چند نقطه با مختصات صحیح روی نمودار تابع $y = \frac{4x+1}{x-2}$ در ربع دوم دستگاه مختصات قرار دارد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۵- اگر $5 \mid 2n+1$ عبارت $14n^2 + 19n + 6$ همواره بر کدام عدد زیر بخش پذیر است؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- ① ۱۰ ② ۲۵ ③ ۱۵ ④ ۳۰

۶- کدام گزینه جمله زیر را کامل می‌کند؟

برای درستی گزاره $n^2 + 9n + 5$ به ازای هر عدد طبیعی n عددی فرد است می‌توان از روش استفاده کرد.

① رد - مثال نقض ② رد - برهان خلف

③ اثبات - برهان خلف ④ اثبات - در نظر گرفتن همه حالات

۷- به ازای چند عدد طبیعی a ، $[a, 180] = 900$ برقرار است؟ ($[a, b]$ ک.م.م a و b است.)

- ① ۵ ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۲

۸- روی منحنی $y = \frac{x+2}{3x+1}$ چند نقطه با مختصات طبیعی وجود دارد؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ صفر

۹- درستی کدام یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

① میانگین پنج عدد طبیعی متوالی عدد وسطی است.

② اگر $3p + 2$ اول باشد، p نیز اول است.

③ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای برابر ۱ دارد.

④ اگر x گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

۱۰- اگر $5a + 11b$ بر $3a + 4b$ بخش پذیر باشد، کدام یک از اعداد زیر همواره مضرب $3a + 4b$ است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

① ۱۵ ② ۲۶ ③ ۱۲ ④ ۲۸

۱۱- به ازای چند زوج مرتب (x, y) در بازه $[-10, 10]$ رابطه $-x^3 + y^3 = (y - x)^3$ برقرار است؟ ($x, y \in \mathbb{Z}$)

① ۵۹ ② ۶۰ ③ ۶۱ ④ ۴۰

۱۲- اگر $11|5a + 4b + 3$ و $11|a + 3b + k$ ، آنگاه کم‌ترین مقدار طبیعی k کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

① ۵ ② ۶ ③ ۷ ④ ۸

۱۳- a_1 و a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1 و b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. آنگاه $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = \dots\dots\dots$

① همواره زوج است. ② همواره فرد است.

③ فقط در حالتی که a_1 و a_2 و a_3 زوج باشند، زوج است. ④ اگر a_1 و a_2 و a_3 فرد باشند، فرد است.

۱۴- اگر α و β دو عدد $\dots\dots\dots$ و $\alpha + \beta \dots\dots\dots$ باشد، آنگاه $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ هر دو گنگ هستند.

① گنگ-گنگ ② گویا-گنگ ③ گنگ-گویا ④ گویا-گویا

۱۵- حاصل $((a - 2)^2, a - 3)$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

① ۱ ② ۲ یا ۱ ③ ۲ ④ ۴ یا ۲ یا ۱

۱۶- کدام عدد، کلیت حکم «اگر x عددی گنگ باشد، $14x + 53 - x^2$ نیز عددی گنگ است»، را نقض می‌کند؟

① $\sqrt{15}$ ② $\sqrt{15} + 6$ ③ $\sqrt{11} + 6$ ④ $\sqrt{11} + 7$

۱۷- اگر $3a + 7b = 25$ باشد، کدام رابطه را نمی‌توان نتیجه گرفت؟

① $(a, b) = 5$ ② $(a, b) = 25$ ③ $(a, b) = 1$ ④ $(a, b) = 15$

۱۸- به ازای چند عدد صحیح n ، رابطه‌های $24|n$ و $4800|n$ برقرار است؟

① ۱۵ ② ۱۲ ③ ۳۰ ④ ۲۴

۱۹- چند زوج مرتب (x, y) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد، به طوری که به ترتیب روابط $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ و $x^r + y^r = (x+y)^r$ برقرار باشند؟

- ① هیچ - هیچ ② هیچ - بی شمار ③ یک - یک ④ یک - بی شمار

۲۰- اگر $72 = (a^r - a, a^r - a)$ باشد، حاصل $a^r - a$ کدام است؟

- ① ۷۲ ② ۸۰ ③ ۹۰ ④ ۱۲

۲۱- اگر $x^r | x + y$ کدام نتیجه گیری لزوماً درست نیست؟ $(x, y \in \mathbb{Z})$

- ① $x^r | y^r - x^r$ ② $x^r | x^r + y^r$ ③ $x^r | y^r - x^r$ ④ $x^r | 2x^r + 2y^r$

۲۲- اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a^5 | b^7$ ، آنگاه کدام گزینه نمی تواند همواره صحیح باشد؟ $(a \neq 0)$

- ① $a^4 | b^6$ ② $a^8 | b^{11}$ ③ $a^{10} | b^{15}$ ④ $a^2 | b^3$

۲۳- برای ۳ عدد طبیعی a, b و c ، اگر $abc | ab + ac$ ، آنگاه کدام گزاره همواره نمی تواند درست باشد؟

- ① $b | 3c$ ② $c | 2b$ ③ $a | b + c$ ④ $bc | b + c$

۲۴- اگر $a < 300$ ، آن گاه اعداد $4a + 5$ و $9a + 11$ به ازای چند عدد طبیعی نسبت به هم اول هستند؟

- ① ۳۰۰ ② ۱۰۰ ③ ۲۹۹ ④ ۹۹

۲۵- کدام گزینه درست است؟

- ① $(a+b)|(a+b)^2 - 2ab$ ② $(a+b)|(a+b)^2 - 3a^2b - 3ab^2$
③ $(a+b)|(a-b)^2 + 3a^2b - 3ab^2$ ④ $(a+b)|(a-b)^2 + 2ab$

۲۶- در تقسیم عدد اول p بر 6 ، باقیمانده چند مقدار متمایز می تواند داشته باشد؟ $(p > 3)$

- ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۵

۲۷- اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، باقیمانده تقسیم $5a + 2$ بر ۸ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۸- اگر m زوج باشد و $5 | m$ ، باقیمانده تقسیم $1 - m^2 + n^2$ بر ۴ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۰

۲۹- اگر $a^r | a + b$ ، آن گاه کدام نتیجه گیری لزوماً درست نیست؟ $(a, b \in \mathbb{N})$

- ① $a^r | b^r - a^r$ ② $a^r | b^r - a^r$ ③ $a^r | b^r + a^r$ ④ $a^r | b^r + a^r$

۳۰- اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۸ و ۹ به ترتیب ۵ و ۷ باشد باقیمانده a بر ۱۲ کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۳۱- باقیمانده تقسیم a بر ۱۵ برابر ۷ است. اگر ۴۰ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه تغییر نکند، باقیمانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کنند؟

- (۱) خارج قسمت ۳ واحد افزایش و باقیمانده ۵ واحد افزایش
(۲) خارج قسمت ۳ واحد افزایش و باقیمانده ۵ واحد کاهش
(۳) خارج قسمت ۳ واحد کاهش و باقیمانده ۵ واحد افزایش
(۴) خارج قسمت ۳ واحد کاهش و باقیمانده ۵ واحد کاهش

۳۲- کدام یک از گزاره‌های زیر در حالت کلی درست نیست؟

- (۱) $a|b \Rightarrow a^r|b^r$ (۲) $a^5|b^5 \Rightarrow a^2|b^2$ (۳) $a|b \Rightarrow a|5a+7b$ (۴) $a|5a+7b \Rightarrow a|b$

۳۳- به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $\frac{n^2+2n}{10}$ و $\frac{n+3}{5}$ اعدادی صحیح هستند؟

- (۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

۳۴- در یک تقسیم، مقسوم ۷ برابر باقیمانده است و باقیمانده حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد، مجموع ارقام مقسوم کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۳۵- اگر $15 = (n^2 - n, n^2 - 1)$ ، آن‌گاه حاصل $[n+2, 2n]$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$)

- (۱) $2n^2 + 2n$ (۲) $2n(n+2)$ (۳) $2n$ (۴) $6n$

۳۶- اگر خارج قسمت تقسیم $1 - 19!$ بر 19 را A و خارج قسمت تقسیم $43 + 20!$ بر 20 را B بنامیم، آن‌گاه کدام رابطه برقرار است؟

- (۱) $B = 19A + 20$ (۲) $B = 19A + 3$ (۳) $B = 19A + 21$ (۴) $B = 10A + 20$

۳۷- رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه رقمی a که به ازای آن دو عدد $4a + 9$ و $4a - 5$ نسبت به هم اول نباشند، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۱ (۴) ۵

۳۸- کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $b+c|a \Rightarrow b|a \vee c|a$ (۲) $bc|a \Rightarrow b|a \wedge c|a$ (۳) $a|b \xrightarrow{m \leq n} a^n|b^m$ (۴) $a^r|b^r \Rightarrow a^5|b^5$

۳۹- اگر a عددی صحیح باشد، باقیمانده تقسیم $1 + a^2$ بر ۵ کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۰- حاصل $(54! + 1, 53! + 1)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵۲ (۳) ۱۰۷ (۴) ۱۰۳

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۱

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a \mid 4n^2 + 6 \\ a \mid 6n^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid 12n^2 + 18 \\ a \mid 12n^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow a \mid 16$$

بنابراین $a \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$ ولی با توجه به اینکه $6n^2 + 1$ عددی فرد و $4n^2 + 6$ عددی زوج است، تنها مقدار قابل قبول برابر است با $a = 1$.

۲ - گزینه ۱ الف) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

ب) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

ج) گزاره همیشه درست است و با استدلال استنتاجی (اثبات مستقیم) ثابت می‌شود.

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$$

د) مثال نقض دارد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

۳ - گزینه ۲

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq a + b \xrightarrow{(ab) > 0} a^2 + b^2 \geq ab(a + b)$$

$$\rightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \xrightarrow{+(a+b)} a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \leftarrow \text{همواره صحیح}$$

۴ - گزینه ۲

$$y = \frac{4x+1}{x-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{باید} : x - 2 \mid 4x + 1 \xrightarrow{x-2 \mid x-2} x - 2 \mid 4x + 1 - 4(x-2)$$

$$\Rightarrow x - 2 \mid 9 \Rightarrow x - 2 \in \{-9, -3, -1, 1, 3, 9\} \xrightarrow{+2} x \in \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$$

چون قرار است نقطه مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x < 0$ و $y > 0$ باشد.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{4x+1}{x-2} = 1 \rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

$$x = -7 \rightarrow y = \frac{4x+1}{x-2} = \frac{-27}{-9} = 3 \rightarrow \text{در ربع دوم است.}$$

۵ - گزینه ۲ ابتدا عبارت $14n^2 + 19n + 6$ را تجزیه کنیم.

$$14n^2 + 19n + 6 = (2n+1)(7n+6)$$

طبق فرض می‌دانیم که $2n+1$ مضرب ۵ می‌باشد از طرفی داریم:

$$\begin{cases} 5 \mid 2n+1 \\ 5 \mid 7n+6 \end{cases} \Rightarrow 5 \mid 7n+6 \Rightarrow 7n+6 = 5q'$$

بنابراین:

$$13n^2 + 19n + 6 = (2n + 1)(7n + 6) = 5q \times 5q' = 25qq' = 25q''$$

۶ - گزینه ۴

نکته: در بعضی از موارد برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن بررسی شود. به این روش، اثبات با در نظر گرفتن همه حالات می‌گوییم.

$$\begin{cases} n = 2k = 2 \Rightarrow n^2 + 9n + 5 = (2k)^2 + 9(2k) + 5 = 4k^2 + 18k + 4 + 1 \\ = 2(\underbrace{2k^2 + 9k + 2}_{k'}) + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد} \\ \text{یا} \\ n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 + 9n + 5 = (2k + 1)^2 + 9(2k + 1) + 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 18k + 9 + 5 \\ = 4k^2 + 22k + 14 + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 11k + 7}_{k''}) + 1 = 2k'' + 1 = \text{فرد} \end{cases}$$

یعنی به ازای هر مقدار دلخواهی از n عدد موردنظر همواره فرد است.

۷ - گزینه ۳

$$[a, 2^x \times 3^y \times 5^z] = 2^x \times 3^y \times 5^z$$

چون در ک.م.م پایه‌های مشترک با توان بزرگ‌تر و پایه‌های غیرمشترک به صورت کامل ظاهر می‌شوند، لذا a باید 5^z را حتما داشته باشد، ولی می‌تواند توان‌های ۲ و ۳ را داشته باشد، بنابراین a به صورت زیر است:

$$a = 2^x \times 3^y \times 5^z, \quad x = 0, 1, 2, \quad y = 0, 1, 2$$

حال طبق اصل ضرب a کلاً $3 \times 3 = 9$ حالت می‌تواند داشته باشد.

۸ - گزینه ۴

$$\begin{aligned} 3x + 1 | x + 2 &\xrightarrow{\times 3} \left\{ \begin{array}{l} 3(3x + 1) | 3(x + 2) \\ 9x + 3 | 3x + 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3x + 1 | 5 \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ 3x + 1 = -5 \Rightarrow x = -2 \\ 3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 3x + 1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

بنابراین هیچ مقدار طبیعی برای x وجود ندارد.

۹ - گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: اولین عدد را x می‌نامیم:

$$\frac{x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4)}{5} = \frac{5x + 10}{5} = x + 2 \rightarrow \checkmark \text{ عدد وسطی}$$

گزینه ۲: مثال نقض می‌زنیم، اگر $p = 1$ باشد، آن‌گاه $3 \times 1 + 2 = 5$ اول است، اما p اول نیست.

گزینه ۳:

$$\begin{cases} 3k \rightarrow \text{اول نیست.} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3k + 1 \\ 3k + 2 \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{بزرگتر از ۳}]{\text{همه اعداد اول}} \left\{ \begin{array}{l} p = 3k + 1 \rightarrow p^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k' + 1 \\ p = 3k + 2 \rightarrow p^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k' + 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

یعنی باقیمانده تقسیم مربع همه اعداد اول بزرگ‌تر از ۳ بر ۳، برابر یک است.

گزینه ۴: حاصل ضرب هر عدد گویای غیر صفر در عدد گنگ برابر با عددی گنگ است. پس اگر x گنگ باشد و $\frac{1}{x}$ بخواند گویا باشد حاصل ضرب x در $\frac{1}{x}$ عددی گنگ می‌شود. در حالی که می‌دانیم حاصل ضرب عددی گویا است (یک عددی گویا است) پس $\frac{1}{x}$ باید گنگ باشد.

۱۰ - گزینه ۲ (۱)

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b \mid 5a + 11b \xrightarrow{\times 2} 3a + 4b \mid 10a + 22b \\ 3a + 4b \mid 3a + 4b \xrightarrow{\times 5} 3a + 4b \mid 15a + 20b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a + 4b \mid 13b$$

(۲)

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b \mid 5a + 11b \xrightarrow{\times 4} 3a + 4b \mid 20a + 44b \\ 3a + 4b \mid 3a + 4b \xrightarrow{\times 11} 3a + 4b \mid 33a + 44b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 3a + 4b \mid 13a$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3a + 4b \mid 13(a, b)$$

پس $3a + 4b$ باید مضرب ۱۳ باشد.

۱۱ - گزینه ۳

$$-x^r + y^r = (y - x)^r \Rightarrow -x^r + y^r = y^r - x^r - r y^{r-1} x + r x^{r-1} y$$

$$\Rightarrow r x^{r-1} y - r x y^{r-1} = 0 \Rightarrow r x y (x - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{۲۱ مقدار میپذیرد.} \\ y = 0 \Rightarrow \text{۲۱ مقدار میپذیرد.} \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{۳۰ حالت داشته باشند.} \end{cases}$$

البته حالت $(0, 0)$ دوبار شمرده شده است.

$$(21 + 21) - 1 + 20 = 61$$

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

۱۲ - گزینه ۱ ابتدا یکی از دو متغیر a یا b را حذف می‌کنیم:

$$11 \mid 5a + 4b + 3 \xrightarrow{\times -1} 11 \mid -5a - 4b - 3 \xrightarrow{\times 5} 11 \mid 11b + 5k - 3$$

$$11 \mid 11b \xrightarrow{\text{عدگذاری}} 11 \mid 5k - 3 \xrightarrow{\text{عدگذاری}} k_{\min} = 5$$

۱۳ - گزینه ۱ اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ فرد باشد، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$ باید عددی فرد باشد، اما مجموع این ۳ عبارت صفر است زیرا $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ است. پس عبارت همواره زوج است.

۱۴ - گزینه ۳ می‌دانیم مجموع و تفاضل دو عدد گویا و گنگ همواره عددی گنگ است.

بنابراین:

$$\underbrace{(\alpha + 2\beta)}_{\text{گنگ}} - \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{گنگ}} = \underbrace{\beta}_{\text{گنگ}}$$

$$\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{گنگ}} - \underbrace{\beta}_{\text{گنگ}} = \underbrace{\alpha}_{\text{گنگ}}$$

تذکر: دقت کنید که اگر α و β گنگ و $\alpha + \beta$ نیز گنگ باشد، ممکن است $\alpha - \beta$ گویا باشد، مانند حالت $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.

۱۵ - گزینه ۱ مقسوم علیه مشترک $3 - a$ و $(a - 2)^2$ را d می‌نامیم و دنبال ک.م.م. a و a^2 می‌گردیم.

$$\begin{aligned} d|a - 3 &\xrightarrow{\times a} d|a^2 - 3a \\ d|(a - 2)^2 &\rightarrow d|a^2 - 4a + 4 \end{aligned} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشیدار است.}} d|a - 4 \Rightarrow \begin{cases} d|a - 4 \\ d|a - 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشیدار است.}} d|1 \rightarrow d = 1$$

۱۶ - گزینه ۴ ابتدا عبارت $x^2 - 14x + 53$ را مربع کامل می‌کنیم:

$$x^2 - 14x + 53 = (x - 7)^2 - 49 + 53 = (x - 7)^2 + 4$$

با توجه به گزینه‌ها، اگر $x = \sqrt{11} + 7$ در نظر بگیریم، x عددی گنگ است.

$$(x - 7)^2 + 4 = (\sqrt{11} + 7 - 7)^2 + 4 = 11 + 4 = 15 \text{ گویا}$$

۱۷ - گزینه ۴ فرض کنید $(a, b) = d$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} d|a \\ d|b \end{cases} \rightarrow d|3a + 7b \rightarrow d|25$$

بنابراین گزینه (۴) درست نیست.

۱۸ - گزینه ۴

تذکره: اگر $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots$ آنگاه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی و صحیح N از دستور زیر حاصل می‌شود:

$$N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی:}$$

$$N' = 2N \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح:}$$

$$24|n \Rightarrow n = 24q; \quad q \in \mathbb{Z}$$

$$n|4800 \Rightarrow 24q|4800 \xrightarrow{\div 24} q|200$$

یعنی q مقسوم‌علیه‌های صحیح ۲۰۰ است. پس با تجزیه ی ۲۰۰، تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح آن را تعیین می‌کنیم:

$$200 = 2^3 \times 5^2$$

$$\text{تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح} = 2(3 + 1)(2 + 1) = 24$$

۱۹ - گزینه ۱

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{xy} \xrightarrow{\text{طرفین بسط}} xy = (x+y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 0 \Rightarrow (x+y)^2 + x^2 + y^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (x, y) با شرایط مسأله برقرار نیست.

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow xy = 0$$

رابطه اخیر نیز به ازای اعداد صحیح و ناصفر برقرار نیست.

۲۰ - گزینه ۱ $a^2 - a$ و $a^2 - a$ به طور دیگر می‌نویسیم:

$$(a^2 - a) = a(a - 1)(a^2 + a + 1), a^2 - a = a(a - 1)(a + 1)$$

عبارت $a(a - 1)$ مشترک است. حال بررسی می‌کنیم که $a^2 + a + 1$ و $a + 1$ نسبت به هم اول هستند:

$$(a^2 + a + 1, a + 1) = (a^2, a + 1) = (a^2 - (a - 1)(a + 1), a + 1) = (a^2 - (a^2 - 1), a + 1) = (1, a + 1) = 1$$

پس وقتی $(a^2 + a + 1)$ و $(a + 1)$ نسبت به هم اول هستند، عوامل تجزیه ۷۲ را فقط a و $a - 1$ می‌سازند یعنی:

$$a(a - 1) = 72 \rightarrow a^2 - a - 72 = 0 \rightarrow (a - 9)(a + 8) = 0$$

با توجه به اینکه a طبیعی است فقط می‌توانیم $a = 9$ را انتخاب می‌کنیم. در نتیجه: $a^2 - a = 81 - 9 = 72$.

$$\left. \begin{matrix} x^2 | x + y \\ x | x^2 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \left. \begin{matrix} x | x + y \\ x | x \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \left. \begin{matrix} x | y - x \\ x | x \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} x | y - x \\ x^2 | xy \end{matrix} \right\}$$

گزینه "۱":

$$\left. \begin{array}{l} x \mid y - x \\ x^2 \mid y^2 + x^2 + xy \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} x^2 \mid (y - x)(y^2 + x^2 - xy) \Rightarrow x^2 \mid y^3 - x^3$$

گزینه "۳":

$$\left. \begin{array}{l} x \mid y - x \\ x^2 \mid x + y \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ضرب}} x^2 \mid y^2 - x^2$$

گزینه "۴":

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \mid x + y \\ x + y \mid x^2 + y^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} x^2 \mid x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 \mid 2(x^2 + y^2)$$

۲۲ - گزینه ۲

$$a^5 \mid b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۶}} a^{30} \mid b^{42} \rightarrow a^{28} \mid b^{42} \xrightarrow{\text{به توان } \frac{1}{7}} a^4 \mid b^6 \rightarrow a^2 \mid b^3 \rightarrow \text{پس گزینه اول همواره درست است}$$

$$a^5 \mid b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^{10} \mid b^{14} \xrightarrow{\times 5} a^{50} \mid b^{70} \rightarrow a^{10} \mid b^{15} \rightarrow \text{پس گزینه سوم همواره درست است}$$

$$a^5 \mid b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} a^{15} \mid b^{21} \rightarrow a^{14} \mid b^{21} \xrightarrow{\text{به توان } \frac{1}{7}} a^2 \mid b^3 \rightarrow \text{پس گزینه چهارم همواره درست است}$$

$$a^5 \mid b^7 \xrightarrow{\text{به توان ۱۱}} a^{55} \mid b^{77} \xrightarrow{\text{به توان } \frac{1}{11}} a^5 \mid b^7 < 8 \rightarrow \text{پس الزاماً گزینه دوم همواره درست نیست}$$

۲۳ - گزینه ۳

$$abc \mid ab + ac \Rightarrow abc \mid a(b + c) \xrightarrow{\div a} bc \mid b + c \Rightarrow \begin{cases} b \mid b + c \Rightarrow b \mid c \Rightarrow b \mid 3c \\ c \mid b + c \Rightarrow c \mid b \Rightarrow c \mid 2b \end{cases}$$

۲۴ - گزینه ۳ سعی می‌کنیم $5a$ و $11a$ را به ک.م.م.شان برسانیم. مقسوم علیه مشترک $4 + 5a + 9 + 11a$ را با d نشان می‌دهیم:

$$d \mid 5a + 4 \xrightarrow{\times 11} d \mid 55a + 44 \quad \text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشیدنی است} \xrightarrow{-} d \mid 1$$

$$d \mid 11a + 9 \xrightarrow{\times 5} d \mid 55a + 45$$

بنابراین d فقط می‌تواند یک باشد و دو عدد به صورت $4 + 5a + 9 + 11a$ همیشه نسبت به هم اول هستند لذا آزاد هستیم هر یک از 299 عدد طبیعی کوچک‌تر از 300 را انتخاب کنیم.

۲۵ - گزینه ۲

$$(a + b)^2 - 3a^2b - 3ab^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a + b \mid a^2 + b^2$$

$$a + b \mid a^n + b^n \quad ; \quad n \text{ های طبیعی و فرد}$$

۲۶ - گزینه ۱ می‌دانیم در تقسیم هر عدد بر 6 یکی از حالت‌های $6k$ و $6k + 1$ و $6k + 2$ و $6k + 3$ و $6k + 4$ و $6k + 5$ را داریم. اعداد $6k$ ، $6k + 2$ و $6k + 4$ زوج هستند و عدد

$6k + 3$ مضرب است؛ پس در این میان $6k + 1$ و $6k + 5$ می‌توانند اول باشند. در نتیجه باقی‌مانده تقسیم p بر 6 ، یکی از دو عدد 1 یا 5 است.

۲۷ - گزینه ۳ طبق قضیه تقسیم داریم:

$$a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 2} 2a = 8q + 6 \xrightarrow{+5} 2a + 5 = 8q + 11 = 8(q + 1) + 3 \Rightarrow 2a = 8k + 3 \Rightarrow r = 3$$

۲۸ - گزینه ۴ زوج است، پس $m + 5$ فرد و در نتیجه n نیز حتماً فرد می‌باشد. همچنین می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $4q + 1$ ($q \in \mathbb{Z}$) است. بنابراین:

$$m^2 + n^2 - 1 = (4k)^2 + 4q + 1 - 1 = 4k^2 + 4q = 4(\underbrace{k^2 + q}_{k'}) = 4k'$$

بنابراین باقیمانده تقسیم $1 + m^2 + n^2$ بر 4 ، برابر صفر است.

۲۹ - گزینه ۴

تذکره: اگر $a^n | b$ آنگاه $a | b$

تذکره: اگر $a | b$ و $c | d$ آنگاه $ac | bd$

تذکره: اگر $a | b$ و $a | c$ آنگاه $a | mb + nc$
 $m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^r | a + b \Rightarrow a | a + b \xrightarrow{a/a} \left\{ \begin{array}{l} a | b \\ a | a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a | b - a \\ a | a \end{array} \right\} \xrightarrow{\times} a^r | b^r - a^r$$

$$a | b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^r | b^r \\ a^r | a^r \end{array} \right\} \Rightarrow a^r | b^r \mp a^r$$

اگر $a = 2, b = 6$ را در نظر بگیریم مثال نقضی برای گزینه ۴ می باشد. زیرا $2^2 | 6 + 6$ ولی $2^2 \nmid 6^2 - 2^2$

۳۰ - گزینه ۱

$$a = 8q + 5 = 8q + 4 + 1 = 4(2q + 1) + 1 = 4k + 1 \Rightarrow a - 1 = 4k \quad (1)$$

$$a = 9q' + 7 = 9q' + 6 + 1 = 3(3q' + 2) + 1 = 3k' + 1 \Rightarrow a - 1 = 3k' \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a - 1 = 12k'' \Rightarrow a = 12k'' + 1$$

تذکره: عددی که بر ۳ و ۴ بخش پذیر باشد، بر ۱۲ بخش پذیر است.

۳۱ - گزینه ۲

$$a = 15q + 7 \xrightarrow[\text{طرفین اضافه می کنیم}]{\text{۴ واحد به}} a + 4 = 15q + 11 \Rightarrow a + 4 = 15(q + 3) + 2 \Rightarrow a + 4 = 15q' + 2$$

خارج قسمت ۳ واحد افزایش و باقیمانده ۵ واحد کاهش یافته است.

۳۲ - گزینه ۴ برای گزینه ۴ مثال نقض $a = 7$ و $b = 2$ وجود دارد.

۳۳ - گزینه ۱

$a b \Rightarrow \begin{cases} a^n b^n & n \in \mathbb{N} \\ a b^n & k \in \mathbb{Z} \\ a kb \end{cases}$	نکته: اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ باشد داریم:
$\left. \begin{array}{l} a b \\ a c \end{array} \right\} \Rightarrow a mb + nc$	نکته: اگر $a b$ و $m a$ آنگاه: $m b$ نکته: اگر $m, n \in \mathbb{Z}$ باشد داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 5 | n + 3 \xrightarrow[n \times 3]{\text{سمت راست}} 5 | 3n + 9 \\ 10 | n^2 + 2n \xrightarrow{\div 10} 5 | n^2 + 2n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5 | 3n^2 - 2n$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 | n + 3 \xrightarrow{\times 2n} 5 | 2n^2 + 6n \\ 5 | 3n^2 - 2n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5 | 11n$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 | n + 3 \xrightarrow{\times 11} 5 | 11n + 33 \\ 5 | 11n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 5 | 33$$

رابطه آخر امکان پذیر نیست بنابراین چنین مقداری برای n وجود ندارد.

۳۴ - گزینه ۲ طبق قضیه تقسیم و مفروضات سؤال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} a = bq + r \\ a = 7r \\ r = b - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 7(b - 1) = bq + b - 1 \Rightarrow 7b - 7 = bq + b - 1 \Rightarrow 6b - 6 = bq \\ 7(b - 1) = bq \Rightarrow \frac{b - 1}{b} = \frac{q}{6} \\ b = 6 \Rightarrow r = 5 \Rightarrow a = 7 \times 5 = 35 \end{cases}$$

$$a = 35 \rightarrow \text{مجموع ارقام} = 3 + 5 = 8$$

۳۵ - گزینه ۴ داریم:

$$n^r - n = n(n^r - 1) \quad n^r - 1 = (n^r - 1)(n^r + 1)$$

$$(n^r - n, n^r - 1) = ((n^r - 1)n, (n^r - 1)(n^r + 1)) = (n^r - 1) \cdot (n, n^r + 1)$$

ولی $(n, n^r + 1) = 1$ زیرا اگر $d = (n, n^r + 1)$ آن گاه:

$$\begin{cases} d|n \\ d|n^r + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|n^r \\ d|n^r + 1 \end{cases} \Rightarrow d|1 \Rightarrow d = 1$$

لذا:

$$(n^r - n, n^r - 1) = n^r - 1 = 15 \rightarrow n^r = 16 \rightarrow n = 4$$

$$[n + 2, 2n] = [6, 8] = 24 = 6n$$

۳۶ - گزینه ۳

خارج قسمت تقسیم $19!$ بر 19 برابر $18!$ است، پس $A = 18! - 1$

خارج قسمت تقسیم $20!$ بر 20 برابر $19!$ است، پس $B = 19! + 2$

بنابراین داریم:

$$B = 19! + 2 = 19 \times 18! + 2 = 19 \times 18! - 19 + 19 + 2 = 19(18! - 1) + 21 = 19A + 21$$

۳۷ - گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} d|9a + 4 \xrightarrow{\times 4} d|36a + 16 \\ d|4a - 5 \xrightarrow{\times 9} d|36a - 45 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|16 + 45 \Rightarrow d|61$$

پس: $d \in \{1, 61\}$

دو عددی که نسبت به هم اول نیستند یعنی ب.م.م آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. پس $d = 61$ حال می‌خواهیم a را پیدا کنیم:

$$\begin{array}{l} d|9a + 4 \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|5a + 9 \\ d|4a - 5 \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|4a - 5 \end{array} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|a + 14$$

پس $a + 14 \equiv 0 \pmod{61}$ دنبال کوچک‌ترین عدد سه رقمی هستیم پس 61 را ضربدر دو می‌کنیم که عددی سه رقمی بسازیم:

$$2 \times 61 = 122 = a + 14 \rightarrow a = 122 - 14 = 108 \rightarrow \text{رقم یکانش } 8 \text{ است.}$$

۳۸ - گزینه ۲ مثال نقض گزینه‌های "۱"، "۳"، "۴" و "۵" به صورت زیر است:

گزینه "۱": $a=5, b=2, c=3$

گزینه "۳": $a=2, b=2, m=3, n=4$

گزینه "۴": $a=16, b=8$

۳۹ - گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم a بر 5 یکی از اعداد $1, 2, 3, 4$ است. بنابراین داریم:

$$a = 5k \Rightarrow a^r = 5^r k^r = 5(5k^r) = 5q \Rightarrow a^r + 1 = 5q + 1 \Rightarrow r = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 5k + 1 \\ a = 5k + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 5k \pm 1 \Rightarrow a^r = 5^r k^r \pm 1 \cdot 0k + 1 = 5(5k^r \pm 2k) + 1 \Rightarrow a^r = 5q + 1 \Rightarrow a^r + 1 = 5q + 2 \Rightarrow r = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 5k + 2 \\ a = 5k + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 5k \pm 2 \Rightarrow a^r = 2 \cdot 5k^r \pm 2 \cdot 0 \cdot k + 2 = 5(5k^r \pm 2k + 1) - 1 \Rightarrow a^r = 5q - 1 \Rightarrow a^r + 1 = 5q \Rightarrow r = 0$$

همانطور که می بینید در همه حالات باقی مانده ۰ یا ۱ یا ۲ می باشد.

۳۰ - گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} d | 54! + 1 \\ d | 53! + 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times (-1) \\ \times (54) \end{array} \Rightarrow d | 53 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 53$$

معلوم است که $d \neq 53$ چون $d | 53! + 1$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۱
۲ - ۱
۳ - ۲
۴ - ۲
۵ - ۲
۶ - ۴

۷ - ۳
۸ - ۴
۹ - ۲
۱۰ - ۲
۱۱ - ۳
۱۲ - ۱

۱۳ - ۱
۱۴ - ۳
۱۵ - ۱
۱۶ - ۴
۱۷ - ۴
۱۸ - ۴

۱۹ - ۱
۲۰ - ۱
۲۱ - ۲
۲۲ - ۲
۲۳ - ۲
۲۴ - ۳

۲۵ - ۲
۲۶ - ۱
۲۷ - ۳
۲۸ - ۴
۲۹ - ۴
۳۰ - ۱

۳۱ - ۲
۳۲ - ۴
۳۳ - ۱
۳۴ - ۲
۳۵ - ۴
۳۶ - ۳

۳۷ - ۲
۳۸ - ۲
۳۹ - ۳
۴۰ - ۱