دنبالهٔ عددی منظم

اگر فاصلهٔ اعداد با هم یکسان باشد، به دنبالهٔ عددی، تصاعد حسابی می‌گوییم.

$$5 \overset{+3}{,} 8 \overset{+3}{,} 11 \overset{+3}{,} 14 \,,\, \cdots \,,\, 119$$

در این رشته‌های عددی، می‌توان با استفاده از رابطه‌های زیر، تعداد اعداد، میانگین اعداد و جمع اعداد را محاسبه کرد:

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{کوچک‌ترین عدد} - \text{بزرگ‌ترین عدد}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{119-5}{3} + 1 = \frac{114}{3} + 1 = 38 + 1 = 39$$

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{\text{کوچک‌ترین عدد} + \text{بزرگ‌ترین عدد}}{2} = \frac{119+5}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

$$\text{جمع اعداد} = \text{تعداد} \times \text{میانگین} = 39 \times 62 = 2418$$

مثال ۱ **حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.**

$$(7-11)+(9-13)+(11-15)+\cdots+(83-87) =$$

حاصل هر پرانتز برابر با ۴- است. کافی است، تعداد پرانتزها را از روی اعداد اوّل هر پرانتز حساب کنیم.

$$7 \overset{+2}{,} 9, 11, \cdots, 83 \Rightarrow \text{تعداد} = \frac{83-7}{2} + 1 = 38 + 1 = 39$$

بنابراین ۳۹ پرانتز داریم که حاصل همهٔ آن‌ها ۴- است.

$$-4 \times 39 = -156$$

نوشتن کسر بین دو کسر: برای نوشتن کسر، بین دو کسر، از دو روش می‌توان استفاده کرد:

الف) جمع صورت‌ها با هم و جمع مخرج‌ها با هم: این کار را چندین بار می‌توانیم انجام دهیم؛ مانند:

$$\frac{3}{7} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{3}{7} \quad \frac{10}{19} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{11}{17} \quad \frac{4}{5}$$

ب) مخرج مشترک گرفتن بین دو عدد: پس از مخرج‌مشترک گرفتن، کسرهایی را می‌نویسیم که صورت آن‌ها بین صورت کسرهای اوّلیه باشد.

$$\frac{3}{7} \quad \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{15}{35} \quad \frac{28}{35} \Rightarrow \frac{15}{35} \quad \frac{16}{35}, \frac{17}{35}, \frac{18}{35}, \cdots, \frac{27}{35} \quad \frac{28}{35}$$

تذکر:

اگر پس از مخرج‌مشترک گرفتن، فاصلهٔ بین صورت کسرها کم بود، کسرها را در عدد دلخواه (حداقل یکی بیش‌تر از تعداد کسری که می‌خواهیم بنویسیم) ضرب می‌کنیم.

مثال ۲ **بین دو کسر $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ هفت کسر بنویسید.**

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} \frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \xrightarrow{\times 8} \frac{24}{48} \quad \frac{32}{48} \Rightarrow \frac{24}{48}, \frac{25}{48}, \frac{26}{48}, \cdots, \frac{31}{48}, \frac{32}{48}$$

کسر تحویل‌ناپذیر: کسری است که دیگر ساده نمی‌شود؛ مانند: $\frac{8}{9}$

مثال ۳ **کسری مساوی $\frac{56}{42}$ بنویسید که مجموع صورت و مخرج آن ۳۴۳ شود.**

ابتدا کسر را به کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل می‌کنیم، سپس با استفاده از تناسب، کسر موردنظر را می‌نویسیم.

$$\frac{56}{42} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 196 \\ \hline 3 & 147 \\ \hline 7 & 343 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \frac{196}{147}$$

$\times 49$

قانون «دور در دور - نزدیک در نزدیک»: گاهی تقسیم کسرها را به‌صورت نوشتن دو کسر روی هم نشان می‌دهند. در این حالت، بالاترین و پایین‌ترین عدد را در هم ضرب می‌کنیم و در صورت کسر می‌نویسیم و دو عدد وسط را هم در هم ضرب می‌کنیم و در مخرج کسر می‌نویسیم؛ مانند:

$$\frac{5}{8} \quad \frac{15}{16} \qquad \frac{5 \times 16}{8 \times 15} = \frac{20}{3}$$

مثال ۴ **حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.**

$$\frac{\frac{\frac{۸}{۵}}{\frac{۱۲}{۶}}}{\frac{۴}{۹}} =$$

صورت و مخرج کسر اصلی (بزرگ‌ترین کسر) را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{حاصل صورت:} \ \frac{\frac{۸}{۵}}{\frac{۱۲}{۱}} = \frac{۸\times۱}{۵\times۱۲} = \frac{۸}{۶۰} = \frac{۲}{۱۵} \\ \text{حاصل مخرج:} \ \frac{\frac{۶}{۱}}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۶\times۹}{۴} = \frac{۲۷}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۱۵}}{\frac{۲۷}{۲}} = \frac{۲\times۲}{۱۵\times۲۷} = \frac{۴}{۴۰۵}$$

کسر تلسکوپی

هرگاه در مخرج یک کسر، دو عدد در هم ضرب شده باشند و جمع یا تفریق آن دو عدد در صورت کسر نوشته شده باشد، به آن کسر، کسر تلسکوپی می‌گویند؛ مانند:

الف) $\frac{۸}{۳\times۵}$ $\quad (۳+۵=۸)$ $\qquad$ ب) $\frac{۵}{۴\times۹}$ $\quad (۹-۴=۵)$

کسرهای تلسکوپی را می‌توان به‌صورت جمع یا تفریق دو کسر نوشت که صورت هر دوی آن‌ها، عدد یک است و مخرج آن‌ها، اعدادی هستند که در مخرج کسر اصلی در هم ضرب شده‌اند؛ مانند:

الف) $\frac{۸}{۳\times۵} \xrightarrow{۳+۵=۸} \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}$ $\qquad$ ب) $\frac{۱۲}{۵\times۷} \xrightarrow{۱۲=۵+۷} \frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}$

ج) $\frac{۵}{۴\times۹} \xrightarrow{۵=۹-۴} \frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۹}$ $\qquad$ د) $\frac{۱۱}{۹\times۲۰} \xrightarrow{۱۱=۲۰-۹} \frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۲۰}$

با استفاده از کسرهای تلسکوپی، می‌توان برخی مسئله‌ها را ساده‌تر حل کرد.

مثال ۵ **حاصل عبارت مقابل را بنویسید.**

$$\frac{۳}{۴\times۷}+\frac{۴}{۷\times۱۱}+\frac{۳}{۱۱\times۱۴}+\frac{۵}{۱۴\times۱۹}+\frac{۱۳}{۱۹\times۳۲} =$$

هر کسر تلسکوپی را به‌صورت تفریق دو کسر می‌نویسیم و کسرهای قرینه را حذف می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{\cancel{۷}}+\frac{۱}{\cancel{۷}}-\frac{۱}{\cancel{۱۱}}+\frac{۱}{\cancel{۱۱}}-\frac{۱}{\cancel{۱۴}}+\frac{۱}{\cancel{۱۴}}-\frac{۱}{\cancel{۱۹}}+\frac{۱}{\cancel{۱۹}}-\frac{۱}{۳۲} = \frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳۲} = \frac{۸-۱}{۳۲} = \frac{۷}{۳۲}$$

CamScanner

کسر مسلسل

کسری مانند کسر زیر را که به‌صورت پلکانی به سمت پایین حرکت می‌کند، کسر مسلسل می‌گوییم. در این نوع کسرها، باید عبارت را از انتها به ابتدا حل کنیم.

$$۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴-\cfrac{۲}{۳}}} \Rightarrow ۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{\underbrace{۴-\frac{۲}{۳}}_{۳\frac{۱}{۳}=\frac{۱۰}{۳}}}} = ۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{\underbrace{\frac{۱۰}{۳}}_{\frac{۳}{۱۰}}}} = ۲+\cfrac{۱}{۳+\frac{۳}{۱۰}} = ۲+\cfrac{۱}{\frac{۳۳}{۱۰}} = ۲+\frac{۱۰}{۳۳} = ۲\frac{۱۰}{۳۳}$$

نکته

گاهی در یک مسئله رابطه‌ای بین اعداد تعریف می‌شود که باید بتوانیم اعداد را در آن جایگذاری کنیم. (مثل عددگذاری در عبارت‌های جبری)

مثال ۶ اگر $a * b = ab - b$ باشد، حاصل $-\frac{۲}{۳} * \frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید.

مطابق رابطهٔ تعریف‌شده، باید دو عدد را در هم ضرب کنیم و از حاصل به‌دست‌آمده، عدد دوم را کم کنیم.

$$\underbrace{-\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۲}}_{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۲}{۶} - \frac{۳}{۶} = -\frac{۵}{۶}$$

نکته

هر گاه بخواهیم قرینهٔ عدد A را نسبت به عدد B به‌دست آوریم، از رابطهٔ $۲\times B - A$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۷ قرینهٔ -۷ را نسبت به $+۱۳$ محاسبه کنید.

$$۲\times(+۱۳) - (-۷) = +۲۶ - (-۷) = ۲۶ + ۷ = ۳۳$$

آزمون خودسنجی
فصل: اول

نام: کلاس:

نام خانوادگی: نام دبیر: تاریخ امتحان: ----------

۱ حاصل ضرب عدد $\frac{۲}{۸}$ و قرینه‌اش، برابر است با:

الف) -۱ ب) $-\frac{۱}{۳۲}$ ج) $-\frac{۱}{۶۴}$ د) $-\frac{۱}{۱۶}$

۲ به‌جای تقسیم یک عدد بر $(\frac{-۲}{-۸})$، کافی است آن را در ..... ضرب کنیم.

الف) ۴ ب) ۱۶ ج) -۴ د) -۱۶

۳ حاصل $۸ \div (-۳) \times ۲ - ۲$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۱۶ ج) ۴ د) ۴۶

۴ کدام‌یک عدد طبیعی نیست؟

الف) $\sqrt{۶۴}$ ب) $-۱۰۰^{۳}$ ج) $\frac{-\sqrt{۱۴۴}}{-\sqrt{۴}}$ د) $(۵, ۷)$

۵ مقدار a را در تساوی $\frac{a}{-۵۶} = \frac{-۲۸}{-۴۹}$ تعیین کنید.

الف) -۴ ب) -۱۶ ج) -۳۲ د) -۶۴

۶ اختلاف ۵ برابرعدد نیم و ۴ برابر عدد $\frac{۳}{۴}$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

الف) -۱ ب) $-۰/۵$ ج) $-۰/۲۵$ د) $-۰/۷۵$

۷ حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $-۱ - \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ?$

الف) $-۱\frac{۲}{۳}$ ب) -۳ ج) -۴ د) $-۱\frac{۱}{۲}$

۸ فاصلهٔ نقاط $۱\frac{۲}{۳}$ و $-۲\frac{۵}{۶}$ روی محور اعداد کدام است؟

الف) $۱\frac{۱}{۲}$ ب) $۲\frac{۱}{۲}$ ج) $۳\frac{۱}{۲}$ د) $۴\frac{۱}{۲}$

۹ کدام عدد در محدودهٔ $-۷\frac{۱}{۲} < X < -۴$ نمی‌باشد؟

الف) -۶ ب) $-۳\frac{۹}{۱۰}$ ج) $-۵\frac{۹}{۱۰}$ د) $-۷\frac{۱}{۸}$

۱۰ حاصل عبارت مقابل، در کدام محدوده قرار دارد؟ $-۴ \div (-۳\frac{۱}{۵} \div ۱\frac{۱}{۱۵}) =$

الف) $۰ < x < ۱$ ب) $۱ < x < ۲$ ج) $-۱ < x < ۰$ د) $-۲ < x < -۱$