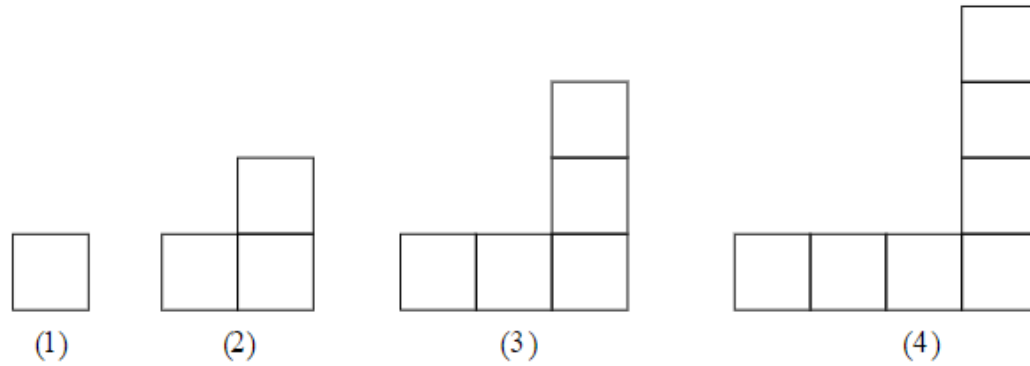


جبر و معادله

کامران زمان پور

الگوی عددی

در شکل مقابل اگر دنباله‌ی شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، در شکل n ام تعداد مربع‌های کوچک چند تا است؟



برای پاسخ به این سوال ابتدا تعداد مربع‌ها را در هر شکل می‌نویسیم :

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع‌ها	۱	۳	۵	۷	...	
رابطه الگو	$۲ \times ۱ - ۱$	$۲ \times ۲ - ۱$	$۲ \times ۳ - ۱$	$۲ \times ۴ - ۱$	$۲ \times n - ۱$	

می‌باشد. و در شکل بیستم برابر است با:


پس تعداد مربع‌های کوچک در شکل n ام برابر با

اگر هر ضلع مربع کوچک یک چوب کبریت باشد در شکل n ام چند چوب کبریت بکار رفته است؟
 با کمی دقت می‌بینیم که شکل اول از ۴ چوب کبریت، شکل دوم از ۱۰ چوب کبریت و شکل سوم از ۱۶ و شکل چهارم از ۲۲ چوب کبریت تشکیل شده است.

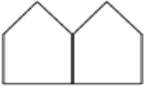
۱	۲	۳	۴	, ...,	n
↓	↓	↓	↓		↓
۴	۱۰	۱۶	۲۲		
↓	↓	↓	↓		↓

پس تعداد چوب کبریت‌ها در شکل n ام برابر $۶n - ۲$ می‌باشد و در شکل بیستم برابر است با:

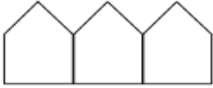
مثال : تعیین کنید در دنباله‌ی شکل زیر شکل n ام از چند چوب کبریت تشکیل شده است؟



(1)




(2)



(3)


....

۱ , ۳ , ۵ , ۷ , , ...

مثال  : در دنباله‌ی مقابل، n امین جمله از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پاسخ :

۷ , ۱۰ , ۱۳ , ۱۶

مثال  : در دنباله‌ی مقابل، n امین جمله از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟


پاسخ:

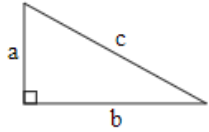


مثال : در دنباله اعداد زیر، چهلمین عدد چند است؟

$-17, -12, -7, -2, \dots$

اگر اندازه ضلع مربعی برابر با a باشد. محیط آن $a \times 4$ و مساحتش برابر با $a \times a$ خواهد بود. در این حالت a می‌تواند هر عددی با توجه به اطلاعات مسئله باشد. به a یک متغیر می‌گوییم و در مسائل مختلف برای نمایش مقادیر غیرمشخص از آن استفاده می‌کنیم.

مثال : محیط و مساحت مثلث زیر را بنویسید.



پاسخ:

نکته 

روابط زیر بین متغیرها برقرار است.

$$۱) a + b = b + a$$

$$۲) a \times b = b \times a$$

$$۳) a \times ۱ = a$$

$$۴) a \times ۰ = ۰$$

$$۵) a + ۰ = a$$

$$۶) a + a + a = ۳a$$

عبارات جبری

یک عبارت جبری، شامل یک یا چند عدد، متغیر و عمل‌هایی مانند جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم است.

در عبارت جبری با قرار دادن مقدار عددی به جای x به عبارتهای عددی متفاوتی می‌رسیم. برای مثال اگر به جای x در $x + 5$ عدد ۳ را قرار دهیم داریم:

$$3 + 5 = 8$$

در عبارتی مانند $3x$ بین ۳ و x علامت ضرب قرار دارد. یعنی $3 \times x$ در این عبارات به ۳ ضریب عددی و به x قسمت حرفی می‌گوییم.



نکته

ضریب عددی ۱ را معمولاً نمی‌نویسند یعنی :

$$a = 1a$$

همانگونه که $5 + 5 + 5 = 3 \times 5$ یا $2 + 2 + 2 + 2 = 4 \times 2$ در عبارتهای جبری نیز $a + a + a = 3a$

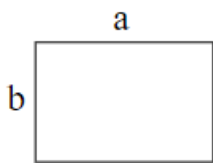
استفاده از عبارت های جبری در ریاضیات

ما در بسیاری از مواقع و برای نمایش محاسبات خود از عبارت های جبری استفاده می کنیم.
الف) در بانکی مبلغی پول می گذارید پس از یک سال بانک سه برابر پول شما به علاوه اصل پول شما را به عنوان وام در اختیارتان قرار می دهد. اگر پول اولیه شما x تومان باشد بانک $3x + x$ تومان به عنوان وام در اختیار شما می گذارد.

ب) دستگاه های الکترونیکی مقدار ولتاژ ورودی به دستگاه را ۵ برابر می کنند. اگر ولتاژ ورودی را y بگیریم مقدار ولتاژ خروجی $5y$ می باشد.

ج) محیط مستطیل برابر است با ۲ برابر طول به علاوه ی ۲ برابر عرض یا ۲ برابر (طول + عرض)

$$2a + 2b \text{ یا } 2 \times (a + b) = \text{محیط}$$



$$a \times b = ab$$

مساحت مستطیل برابر است با طول \times عرض. پس:

ساده کردن عبارت های جبری

به عبارت مقابل دقت کنید:

۳ چاقو + ۹ چنگال = ۱ چاقو + ۵ چنگال + ۲ چاقو + ۴ چنگال

اگر چنگال را x در نظر بگیریم و چاقو را نیز با y نمایش دهیم داریم: $۳x + ۲y + ۵x + ۱y = ۹x + ۳y$



- به هر یک از عبارت های a ، xz ، $-y$ ، $۳x$ و ... یک جمله می گویند.

- به جملاتی مانند $۳x$ ، $۵x$ ، x ، $\frac{۱}{۲}x$ و ... که قسمت حرفی آنها عیناً مانند هم می باشد و ضریب عددی آنها متفاوت است جملات مشابه گفته می شود.

- در ساده کردن عبارت جبری هر عبارت با علامت پشت خود شناخته می شود. و تنها جملات متشابه را می توان با یکدیگر جمع و یا تفریق کرد، و علامت نهایی را به عنوان علامت حاصل تک جمله ای در نظر گرفت.

مثال  به مثال‌های زیر دقت کنید.


الف) $a - 5a + 2a =$

ب) $5x - 2y - 3x + x - 7y =$

ج) $x + x + (-5x) + 2y + 1 =$

نکته 

عبارتی مانند $5x$ و $-5x$ یا a و $-a$ قرینه‌ی یکدیگرند
در ساده کردن عبارات جبری می‌توان دو جمله‌ی قرینه را خط زد، زیرا مجموع آن‌ها برابر با ۰ می‌شود.

 **مثال** : ساده کنید

$$۷x - ۲y - ۷x$$


پاسخ :

دقت کنید عبارت xy با عبارت جبری $۲x$ یا با عبارت جبری y مشابه نیست و بنابراین این عبارات با هم ساده نمی‌شوند.

 **مثال** : ساده کنید

$$۷xy - ۲x + ۵y - ۴x$$

پاسخ :


مثال  : با دقت در مثال‌های زیر می‌بینید که عبارتهای زیر را ساده کرده ایم :

الف) $\underline{5a} + \underline{\underline{3b}} - \underline{7a} + \underline{\underline{2b}} =$

ب) $\underline{-9x} + \underline{\underline{3y}} - \underline{2x} + \underline{\underline{4y}} =$

پ) $\underline{3x^2} + \underline{5x^2} - \underline{\underline{4xy}} + \underline{7x^2} + \underline{\underline{3xy}} =$

ت) $\underline{4a} - \underline{7a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{b}} =$

مثال  : عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف) $-5d + 3d - 2d =$

ب) $9b - 3b =$

پ) $-5a + 3a - 2a =$

نحوه ضرب کردن یک عدد در یک عبارت جبری به صورت زیر است:

$$3(2a - 5b)$$


$$= 6a - 15b$$

عبارت پشت پرانتز را در تک تک جمله‌ها ضرب می‌کنیم.

$$-(b - 3a + \frac{1}{2}a) =$$

$$(b - \frac{5}{2}a)$$

$$= \underbrace{-b}_{-1 \times b} + \underbrace{\frac{5}{2}a}_{-1 \times -\frac{5}{2}a}$$

 **مثال:** عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{1}{2}(2x - 5y + 5x) - 8(1 + 3xy + y)$$

پاسخ:

مقدار عددی یک عبارت جبری

می‌توان با قرار دادن عدد به جای متغیرها در یک عبارت جبری مقدار عددی برای آن عبارت جبری را پیدا کرد.

$$x = 10 \Rightarrow 3x - 5 = 3 \times 10 - 5 = 30 - 5 = 25$$

$$x = 2 \Rightarrow 3x - 5 = 3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 3x - 5 = 3 \times 0 - 5 = 0 - 5 = -5$$

$$x = -4 \Rightarrow 3x - 5 = 3 \times (-4) - 5 = -12 - 5 = -17$$

 **مثال:** جدول زیر را کامل کنید.

a	1	2	0
$4a + 3$	$4 \times 1 + 3 = 7$	$4 \times 2 + 3 = 11$	$4 \times 0 + 3 = 3$

در حقیقت مقدار $4a + 3$ را به ازای a های 0 و 1 و 2 پیدا کرده‌ایم.



نکته

اگر a و b دو عدد متفاوت باشند:

$$\frac{b-a}{a-b} = -1 \quad \text{یا} \quad \frac{a-b}{b-a} = -1$$


است بنابراین $b-a$ قرینه $a-b$

و حاصل -1 هیچ ارتباطی به مقدار a, b ندارد. مثلا با فرض $a = 4, b = 7$ داریم:

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{4-7}{7-4} = \frac{-3}{3} = -1$$

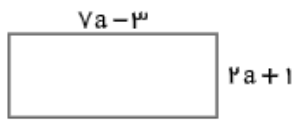


مثال: مقدار عددی عبارت $\frac{c+2}{4-c}$ را به ازای $c = -1$ به دست آورید.

مثال:  اگر طول یک مستطیل $7a - 3$ و عرض آن $2a + 1$ باشد. محیط مستطیل را به صورت عبارت جبری بنویسید. اگر


$a = 3$ باشد، مقدار محیط را به دست آورید.

پاسخ:

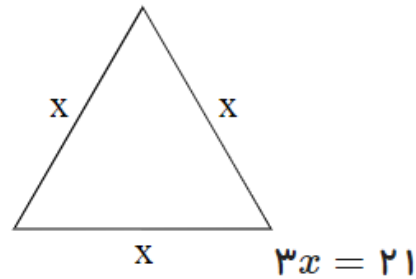


معادله

معادله یک تساوی جبری است که به ازای یک یا چند مقدار مجهول (مثلاً x) برقرار می‌باشد. به مثال زیر دقت کنید :

مثال  : محیط مثلث متساوی الاضلاعی ۲۱ سانتی‌متر است. ضلع آن چقدر است؟

پاسخ :



می‌دانیم در مثلث متساوی الاضلاع سه ضلع برابرند پس سه برابر یک ضلع برابر ۲۱ شده است، این تساوی یک معادله است و تنها یک مقدار برای x این تساوی را برقرار می‌کند که همان عدد ۷ است.
بنابراین معادله حل شده و $x = 7$ پاسخ معادله است.

روش سریع حل معادله


برای حل معادلات با یک مجهول:

- مجهول را در یک سمت تساوی و عددها را در سمت دیگر می‌بریم. دقت کنید که با جابه جایی یک عدد یا متغیر بین دو سمت تساوی علامت آن قرینه می‌شود.

- سپس بعد از ساده کردن جملات متشابه طرفین تساوی را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم. (تا مجهول تنها شود) به مثال زیر دقت کنید:

$$2x - 3 = 8$$

$$2x = 8 + 3 \rightarrow 2x = 11 \rightarrow x = \frac{11}{2}$$

 **مثال :** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $-3x = 8 + 1$

$$\text{ب) } x - \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ج) } 3a - 7 = 4a - 5$$

در معادله قسمت (ج) عبارت مجهول دار یعنی $3a$ و $4a$ را به سمت چپ معادله بردیم و چون $4a$ را از سمت راست به چپ بردیم آن را قرینه کردیم و اعداد یعنی -5 و -7 را به سمت راست تساوی آوردیم و چون (-7) از سمت چپ به راست می آمد، آن را قرینه کردیم و در آخر طرفین را بر ضریب a تقسیم کردیم.

مثال  : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2(x - 4) = 3x + 5$

$-x = 13$

ب) $2y - 7 = -1$:

ج) $5b - 10 = 35$

د) $a + 3 = 9$

حل مساله با کمک معادله

۱ - سه برابر عددی به علاوه ۷ برابر با ۱۹ است آن عدد چیست؟

x : عدد

۲ - اگر دو برابر عددی را از ۲۳ کم کنیم حاصل ۱۳ می شود آن عدد چیست؟

۳ - علی برای خرید ۱۰ مداد ۱۵۰۰ تومان به فروشنده داد و ۲۰۰ تومان پس گرفت قیمت هر مداد چقدر است؟

۴ - مریم کتاب داستانی را در ۷ ساعت مطالعه کرد و ۲۳ صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۱۰۰ صفحه داشته باشد او به طور متوسط در هر ساعت چند صفحه از کتاب را مطالعه کرده است؟

x : مطالعه صفحات در هر ساعت

نکته 

در معادلاتی که از تساوی دو کسر تشکیل شده اند طرفین وسطین معادله می‌تواند راهی مناسب جهت ساده‌سازی معادله باشد.

مثال :

معادله را حل کنید.

$$\frac{x+5}{3} = \frac{2x-1}{2} \Rightarrow 2 \times (x+5) = 3 \times (2x-1) \Rightarrow 2x+10 = 6x-3$$

$$2x-6x = -3-10 \Rightarrow -4x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{4}$$

