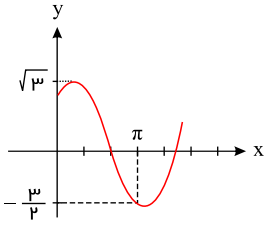


## مثلات

دوره تناوب و کاربرد آن تابع متناوب

1- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$  است.  $b$  کدام است؟



(۷)  $\frac{3}{2}$

(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) ۲

(۳)  $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه 3 می‌دانیم در تابع  $y = a \sin bx + c$  بیشترین مقدار تابع، برابر  $|a| + c$  است.

چون شکل فرمت خود سینوس است،  $b > 0$  است.

$$\text{Max} = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \rightarrow b + a = \sqrt{3}$$

صدق در تابع  $\frac{\pi}{3}$

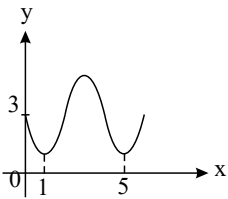
$$-\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

$$\rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

2- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  است. مقدار  $y$  در نقطه‌ی  $x = \frac{25}{3}$  کدام است؟



(۷) ۲٫۵

(۱) ۲

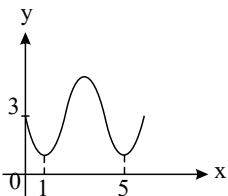
(۴) ۳٫۵

(۳) ۳

پاسخ: گزینه 2

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره‌ی تناوب اصلی تابع  $y = a + \sin(b\pi x)$  برابر

$T = 4$  می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی:  $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$



توجه کنید دوره‌ی تناوب تابع  $y = \sin kx$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|k|}$  است.

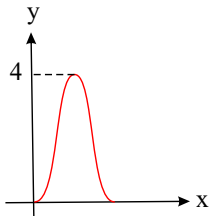
$$y = a + \sin(\underbrace{b\pi x}_k) \Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای  $x > 0$  ، تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار  $b$  منفی می‌باشد، یعنی  $b = -\frac{1}{2}$  است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

3- شکل زیر نمودار تابع  $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  در بازه  $(0, 4)$  است.  $b$  کدام است؟



۱) -۲

۲) ۲

۳) ۱

۴) -۱

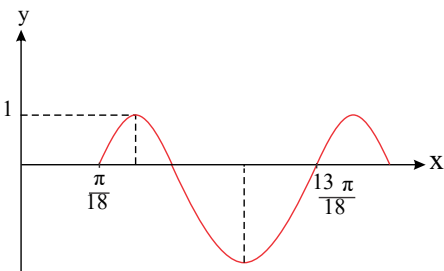
پاسخ: گزینه 1 با توجه به شکل، منحنی از  $(0, 0)$  و  $(2, 4)$  عبور می‌کند پس:

$$(0, 0) \xrightarrow{\text{تابع}} 0 = a + b \cos(0) \Rightarrow \boxed{a + b = 0}$$

$$(2, 4) \xrightarrow{\text{تابع}} 4 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}(2)\right) = a + b \cdot \cos \pi = a - b$$

$$\Rightarrow \boxed{a - b = 4} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

4- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$  است.  $a + b$  کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) 1/2

۴) 3/2

پاسخ: گزینه 4

$$f(x) = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

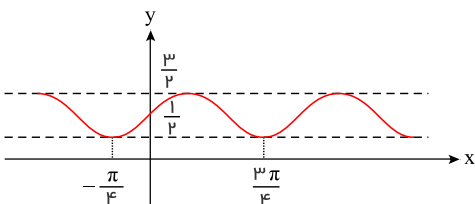
$$f(x) = a + 2 \sin bx$$

$$T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3 \rightarrow b = 3 \text{ ق. ق.}$$

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0 \rightarrow a + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ق. ق.} \\ \rightarrow a + b = -1 + 3 = 2 \end{array} \right\}$$

5- شکل روبه‌رو، نمودار تابع  $y = 1 + a \sin bx \cos bx$  است.  $a + b$  کدام است؟



۱) ۱

۲) 3/2

۳) ۲

۴) 3

پاسخ: گزینه 3

$$y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

می‌دانیم:



$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

چون فاصله دو مینیمم متوالی دوره تناوب اصلی منحنی است پس:

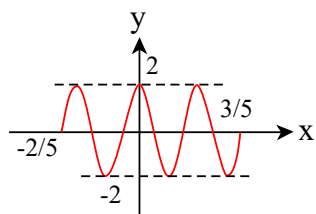
$$T = \frac{2\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{b} \Rightarrow \frac{\pi}{b} = \pi \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2x \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = 2$$



6- شکل رو به رو، قسمتی از نمودار تابع  $y = a \sin \pi\left(\frac{1}{2} + bx\right)$  است.  $a \cdot b$  کدام است؟

۲٫۵ (۷)

۲ (۱)

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

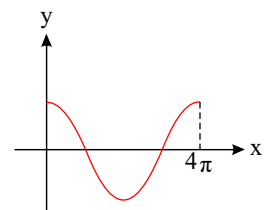
پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم که دوره تناوب تابع  $y = k \cdot \cos ax$  برابر  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  است.

چون برد تابع  $[-2, 2]$  است و برد تابع سینوس  $[-1, 1]$  است پس  $a = 2$  است. ( $a > 0$  است زیرا نمودار  $\sin u$  نسبت به محور  $x$  قرینه نشده است.)

$$y = 2 \sin \pi\left(\frac{1}{2} + bx\right) \Rightarrow y = 2 \cos \pi bx$$

از طرفی طبق شکل دوره تناوب 2 است و داریم:  $T = \frac{2\pi}{\pi b} = 2 \Rightarrow b = 1$  پس  $ab = 2$  می‌باشد.

7- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع  $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$  است. مقدار تابع در نقطه‌ی  $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟



$\frac{1}{2}$  (۷)

$-\frac{1}{2}$  (۱)

صفر (۴)

۱ (۳)

پاسخ: گزینه 1 می‌دانیم:  $y = \cos ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$

با توجه به شکل دوره‌ی تناوب تابع  $4\pi$  است.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{9\pi - \pi}{3}\right)$$



$$= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

8- اگر تابع  $f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right)$  به ازای  $x = \frac{1}{2}$  ماکسیمم شود، طول نقطه مینیمم آن، کدام می‌تواند باشد؟ (c، عدد ثابت است.)

- ①  $-\frac{5}{6}$       ②  $\frac{7}{6}$       ③  $\frac{11}{6}$       ④  $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه 2 دوره تناوب تابع  $f(x) = a \sin bx + c$  برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$  است.

$$f(x) = 5 \sin 3\left(\frac{\pi}{2}x - c\right) = 5 \sin\left(\frac{3\pi}{2}x - 3c\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{3\pi}{2}\right|} = \frac{4}{3}$$

فاصله طولی نقاط ماکسیمم و مینیمم متوالی برابر  $\frac{T}{2}$  است پس اگر از  $x = \frac{1}{2}$  به اندازه  $\frac{T}{2}$  به سمت راست یا چپ برویم به نقطه مینیمم می‌رسیم.

$$x_{Min} = x_{Max} + \frac{T}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

9- به ازای چند مقدار صحیح a، دوره تناوب دو تابع  $y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3$  و  $y_2 = -3 \cos 3ax - 2$  یکسان است؟

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4

پاسخ: گزینه 4

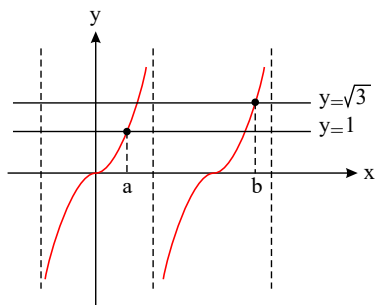
$$y_1 = -2 \sin((a^2 + 2)x) + 3 : T_1 = \frac{2\pi}{|a^2 + 2|}$$

$$y_2 = -3 \cos 3ax - 2 : T_2 = \frac{2\pi}{|3a|}$$

$$\xrightarrow{T_1=T_2} |a^2 + 2| = |3a| \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2 = 3a \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \\ a^2 + 2 = -3a \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(a-2) = 0 \\ (a+1)(a+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1, 1, -2, 2$$

10- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = \tan x$  را نشان می‌دهد. حاصل  $b - a$  کدام است؟



- ①  $\frac{\pi}{12}$       ②  $\frac{5\pi}{12}$       ③  $\frac{7\pi}{12}$       ④  $\frac{13\pi}{12}$

پاسخ: گزینه 4 با توجه به نمودار تابع  $\tan x$ ، باید  $\tan a = 1$  و  $a$  در ربع اول باشد بنابراین  $a = \frac{\pi}{4}$  است و  $\tan b = \sqrt{3}$  و  $b$

$$\text{در } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ است، پس } b = \frac{4\pi}{3} \text{ بنابراین } b - a = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$$



11- اگر  $f(x) = \sin x - \cos x$  و  $g(x) = \sin x + \cos x$ ، آنگاه دوره تناوب تابع  $f \cdot g$  کدام است؟

- ①  $2\pi$       ②  $\pi$       ③  $\frac{\pi}{2}$       ④ تابع متناوب نیست.

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم که  $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$  است.

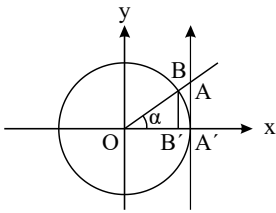
تابع  $f \cdot g$  را تشکیل می‌دهیم:

$$(f \cdot g)(x) = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

می‌دانیم دوره تناوب تابع  $f(x) = a \cos bx$  برابر  $\frac{2\pi}{|b|}$  است. بنابراین:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

12- با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر  $AA' = \frac{\sqrt{3}}{3}$  باشد، مقدار  $OB'$  کدام است؟



- ①  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ④  $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه 1

$$\tan \alpha = AA' \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{0 < \alpha < 90^\circ} \alpha = 30^\circ$$

$$OB' = \cos \alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

13- اگر کمترین مقدار تابع  $y = |a| + 3a \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$  برابر  $-4$  باشد، دوره تناوب آن کدام است؟

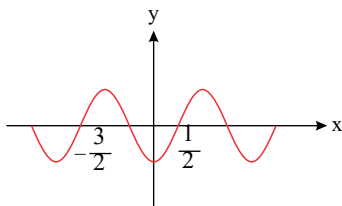
- ①  $\frac{1}{4}$       ② 1      ③  $\frac{1}{2}$       ④ 2

پاسخ: گزینه 2 در توابع مثلثاتی به فرم  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$ ، کمترین مقدار تابع برابر  $c - |a|$  می‌باشد.

بنابراین در این سؤال داریم:

$$y_{\min} = |a| - 3|a| = -2|a| = -4 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow \text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{|a\pi|} = \frac{2}{|a|} \xrightarrow{|a|=2} T = 1$$

14- قسمتی از نمودار تابع  $y = \sin\left((ax + 3)\frac{\pi}{2}\right)$  به صورت شکل زیر است، مقدار مثبت  $a$  کدام است؟



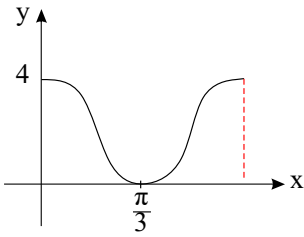
- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4

پاسخ: گزینه 2 ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \sin\left(\frac{\pi ax}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi ax}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi ax}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi ax}{2}\right)$$

با توجه به نمودار، دوره تناوب تابع برابر  $2 = \frac{1}{2} - (-\frac{3}{2})$  است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{|\frac{\pi a}{2}|} = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}|a|} = 2 \Rightarrow \frac{4}{|a|} = 2 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$$



15- اگر نمودار تابع  $f(x) = a + b \cos 3x$  به صورت زیر باشد، در این صورت  $\sqrt{ab}$  کدام است؟

- ۱ (۳)       ۲ (۷)       ۳ (۴)       ۴ (۱)  
 ۵ (۲)       ۶ (۳)       ۷ (۴)       ۸ (۱)

پاسخ: گزینه 2 با کمی دقت از روی نمودار معلوم است که:  $f(0) = 4$ ،  $f(\frac{\pi}{3}) = 0$  می باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow a + b = 4 \\ f(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{2 \times 2} = 2$$

16- اگر دوره تناوب تابع  $f(x) = 2 - 3a \cos(\frac{\pi}{a}x + 1)$  برابر 4 باشد، مقدار ماکزیم آن کدام است؟

- ۱۰ (۱)       ۸ (۷)       ۶ (۳)       ۴ (۴)

پاسخ: گزینه 2 دوره تناوب تابع  $f$  برابر  $2|a| = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}}$  است. پس:

$$2|a| = 4 \Rightarrow |a| = 2$$

از طرفی مقدار ماکزیم تابع  $f$  برابر  $2 + 3|a|$  است، بنابراین داریم:

$$f_{\max} = 2 + 3(2) = 8$$

17- تابع  $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{4})$  با دامنه  $(2, a)$  اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

- ۳ (۱)       ۴ (۷)       ۶ (۳)       ۸ (۴)

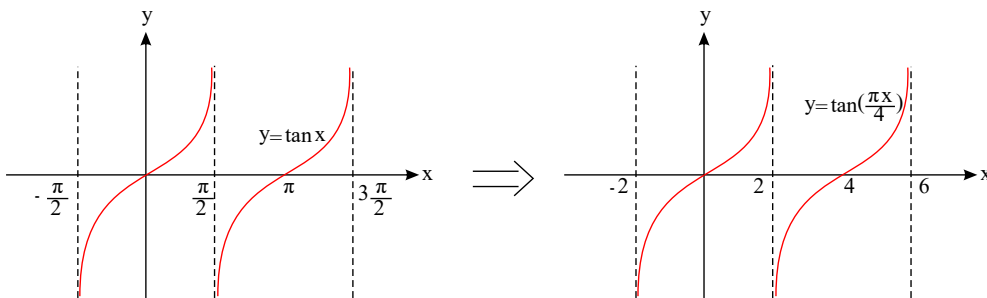
پاسخ: گزینه 3

برای رسم  $f(x) = \tan(\frac{\pi}{4}x)$  از

روی نمودار  $y = \tan x$  باید در

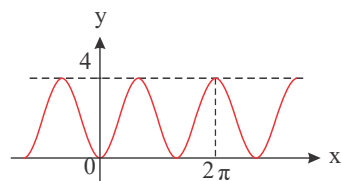
نمودار  $y = \tan x$ ، طول نقاط را بر

$\frac{\pi}{4}$  تقسیم کنیم. که داریم:



پس حداکثر مقدار  $a$  برای اینکه تابع  $f$  روی دامنه اش یعنی بازه  $(2, a)$  اکیداً صعودی باشد، برابر 6 است.

18- شکل زیر مربوط به کدام ضابطه می تواند باشد؟



۲ (۷)  $y = -2 \sin(\frac{3}{2}x) + 2$

۱ (۱)  $y = 2 \cos(\frac{2}{3}x) - 2$

۴ (۴)  $y = 4 \sin(\frac{2}{3}x)$

۳ (۳)  $y = -2 \cos(\frac{3}{2}x) + 2$



پاسخ: گزینه 3 ضابطه مورد نظر به صورت  $y = a \cos bx + c$  است که  $a < 0$  می باشد و توجه کنید در این تابع  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  و  $Max = |a| + c$  و  $Min = -|a| + c$  است.

$$T + \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{3T}{2} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} Max = 4 \Rightarrow |a| + c = 4 \\ Min = 0 \Rightarrow -|a| + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

$$y = -2 \cos\left(\pm \frac{3}{2}x\right) + 2 = -2 \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2$$

19- اگر  $\tan \alpha = 2m - 3$  و  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟ ( $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ )

$\mathbb{R} - [1, 2]$  (۴)

$(2, +\infty)$  (۳)

$(-\infty, 1)$  (۲)

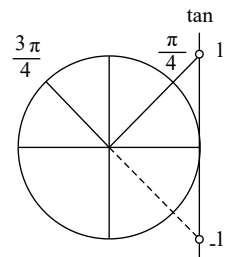
$(1, 2)$  (۱)

پاسخ: گزینه 4 دایره مثلثاتی مقابل را در نظر بگیرید. اگر  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ ، مقدار  $\tan x$  کوچکتر از  $-1$  یا بزرگتر از  $1$  است

یعنی:

$$\tan \alpha < -1 \text{ یا } \tan \alpha > 1$$

$$2m - 3 < -1 \text{ یا } 2m - 3 > 1 \Rightarrow m < 1 \text{ یا } m > 2 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - [1, 2]$$



20- برد تابع  $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{4}x\right)$  با شرط  $|x| < 1$  شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟ ( $x \neq 0$ )

بی شمار (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

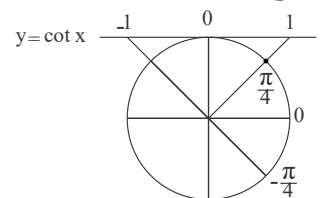
۱ (۱)

پاسخ: گزینه 3 باتوجه به نمودار  $y = \cot x$ ، داریم:

$$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}x < \frac{\pi}{4} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{4}x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4}x\right) > 1 \\ -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}x < 0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4}x\right) < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = (\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$



پس برد تابع شامل سه عدد صحیح  $\{0, \pm 1\}$  نمی باشد.

21- تابع  $y = a \cos(bx) + c$  در سه نقطه از بازه  $(0, 2\pi)$  بر محور  $x$  ها مماس است. حداکثر مقدار  $b$  کدام است؟

۳ (۴)

۴,۵ (۳)

۳,۵ (۲)

۴ (۱)

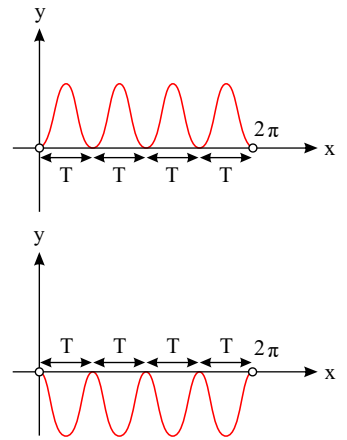


پاسخ: گزینه 1 در تابع  $y = a \cos(bx) + c$  هرچه قدر  $b$  بزرگتر باشد یعنی دوره تناوب کوچکتر شده و نمودار تابع در بازه  $(0, 2\pi)$  تعداد دفعات بیشتری تکرار می شود. باتوجه به این نکته در شکل های زیر دو نمودار چنان رسم شده اند که در بازه  $(0, 2\pi)$  بیشترین تکرار را داشته و در 3 نقطه بر محور  $x$  ها مماس باشند.

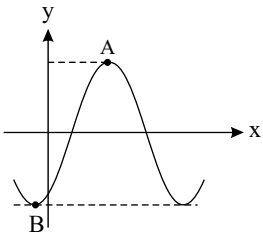
$$4T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4$$

$$\Rightarrow b \text{ حداکثر} = 4$$



22- اگر قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \sin(\frac{3\pi}{2} - x)$  به صورت زیر باشد، شیب خط گذرنده از نقاط  $A$  و  $B$  کدام است؟



$$\frac{1}{\pi} \text{ (2)}$$

$$\frac{3}{\pi} \text{ (4)}$$

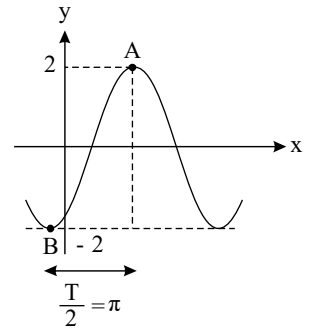
$$\frac{2}{\pi} \text{ (1)}$$

$$\frac{4}{\pi} \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه 3 ابتدا توجه کنید که ضابطه تابع  $f$  به صورت زیر است.

$$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left( \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{می دانیم: } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$



بنابراین بیشترین مقدار تابع برابر 2، کمترین مقدار آن برابر -2 و دوره تناوب آن برابر  $2\pi$  است. پس شیب پاره خط  $AB$  برابر است با:

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - (-2)}{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

23- دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{\cos 2x}{-\sin x + \cos x}$  کدام است؟

$$\frac{\pi}{4} \text{ (4)}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ (3)}$$

$$\pi \text{ (2)}$$

$$2\pi \text{ (1)}$$

پاسخ: گزینه 1

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

می دانیم:

می دانیم: دوره تناوب دو تابع  $y = \sin ax$  و  $y = \cos ax$  برابر  $\frac{2\pi}{|a|}$  است.

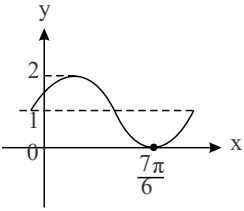




توجه: در عبارتهای مثلثاتی اگر با ساده کردن به دوره‌ی تناوب کوچکتری می‌رسیم باید ساده کنیم:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)}$$

$$f(x) = \cos x + \sin x \rightarrow T = 2\pi$$



24- ضابطه‌ی تابع نشان داده شده در شکل، برابر با کدام گزینه زیر می‌تواند باشد؟

$$y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1 \quad \text{Ⓐ}$$

$$y = \sin(x - \frac{\pi}{3}) - 1 \quad \text{Ⓐ}$$

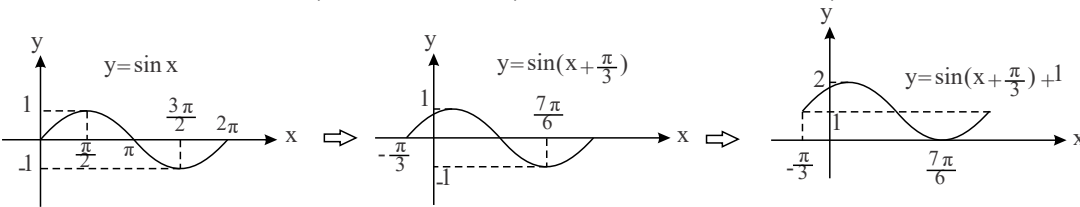
$$y = -\sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1 \quad \text{Ⓓ}$$

$$y = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + 1 \quad \text{Ⓒ}$$

پاسخ: گزینه 3 توجه کنید:  $\frac{7\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ ، پس برای رسم نمودار فوق نمودار  $f(x) = \sin x$  را به اندازه  $\frac{\pi}{3}$  به سمت چپ

منتقل کرده و سپس یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم، پس داریم:

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{3})$$



25- اگر  $f$  تابع متناوب با دامنه  $R$  و دوره تناوب اصلی 3 باشد، آنگاه دوره تناوب تابع  $y = 2f(\frac{3x}{4} + 1) - 3$  کدام خواهد بود؟

$$12 \quad \text{Ⓓ}$$

$$7 \quad \text{Ⓒ}$$

$$4 \quad \text{Ⓐ}$$

$$3 \quad \text{Ⓒ}$$

پاسخ: گزینه 2 می‌دانیم تابع  $f$  متناوب است هرگاه عدد حقیقی مخالف صفر مانند  $T$  موجود باشد، به طوری که  $f(x + T) = f(x)$  بنابراین  $f(x + 3) = f(x)$ ، پس در این تابع به جای  $x$  جمله  $x + T$  قرار می‌دهیم داریم:

$$2f(\frac{3(x+T)}{4} + 1) - 3 = 2f(\frac{3x}{4} + 1) - 3$$

$$\Rightarrow f(\frac{3(x+T)}{4} + 1) = f(\frac{3x}{4} + 1) \Rightarrow f(\frac{3x}{4} + \frac{3T}{4} + 1) = f(\frac{3x}{4} + 1)$$

↓  
دوره تناوب

$$\Rightarrow \frac{3T}{4} = 3 \Rightarrow T = 4$$

26- فاصله بین نقاط دارای مقادیر ماکزیمم و مینیمم در تابع  $f(x) = 2 \cos x$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

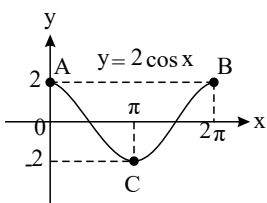
$$\sqrt{\pi^2 + 16} \quad \text{Ⓓ}$$

$$\sqrt{\pi^2 + 4} \quad \text{Ⓒ}$$

$$\pi + 2 \quad \text{Ⓐ}$$

$$2\pi \quad \text{Ⓒ}$$

پاسخ: گزینه 4 در نقطه ماکزیمم،  $2 \cos x = 2$  و در نقطه مینیمم،  $2 \cos x = -2$  است.



$$2 \cos x = 2 \Rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (0, 2) \\ B = (2\pi, 2) \end{cases}$$

$$2 \cos x = -2 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi \Rightarrow C = (\pi, -2)$$

حال طول پارمخت  $AC$  یا  $BC$  را به دست می‌آوریم:

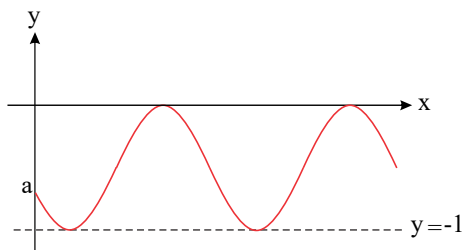


$$AC = \sqrt{(0 - \pi)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{\pi^2 + 16}$$

$$BC = \sqrt{(2\pi - \pi)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{\pi^2 + 16}$$

پس در هر صورت فاصله مطلوب برابر با  $\sqrt{\pi^2 + 16}$  می‌باشد.

27- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $y = a - a \sin(a\pi x)$  می‌باشد. دوره تناوب این تابع برابر کدام گزینه است؟



- ①  $\frac{1}{2}$   
 ② 1  
 ③ 2  
 ④ 4

پاسخ: گزینه 4

می‌دانیم:

$$y = k \cdot \sin(ax + b) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

به نمودار دقت کنید. چون  $f(0) = a$  می‌باشد. یعنی  $a < 0$  است.

$$-1 \leq \sin(a\pi x) \leq 1 \xrightarrow{\times(-a)} a < -a \sin(a\pi x) < -a$$

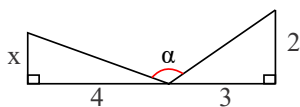
$$\xrightarrow{+a} 2a \leq a - a \sin(a\pi x) \leq 0$$

کمترین مقدار تابع  $2a$  است که با توجه به شکل برابر  $-1$  می‌باشد.

$$2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{\pi}{2}\right|} = 4$$

28- در شکل زیر اگر  $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟



④  $\frac{19}{13}$

③  $\frac{21}{17}$

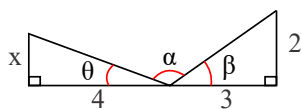
②  $\frac{27}{13}$

①  $\frac{24}{17}$

پاسخ: گزینه 1

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - (\beta + \theta)$$

$$\tan \alpha = \tan(180^\circ - (\beta + \theta)) \Rightarrow \tan \alpha = -\tan(\beta + \theta) \Rightarrow -\frac{4}{3} = -\frac{\tan \beta + \tan \theta}{1 - \tan \beta \tan \theta}$$



از طرف دیگر با توجه به شکل  $\tan \beta = \frac{2}{3}$  و  $\tan \theta = \frac{x}{4}$  است.

$$\Rightarrow -\frac{4}{3} = -\frac{\frac{2}{3} + \frac{x}{4}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4}\right)} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{8 + 3x}{12 - 2x} \Rightarrow x = \frac{24}{17}$$



29- اگر دوره تناوب، ماکزیم و مینیم تابع  $f(x) = (\sin \pi x + \cos \pi x)^2$  را به ترتیب با  $M, T$  و  $m$  نشان دهیم، حاصل  $M + m - T$  کدام است؟

- ① صفر      ② ۲      ③ -۱      ④ ۱

پاسخ: گزینه 4 ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

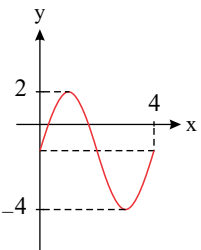
$$f(x) = \underbrace{\sin^2 \pi x + \cos^2 \pi x}_1 + \underbrace{2 \sin \pi x \cos \pi x}_{\sin 2\pi x} \Rightarrow f(x) = 1 + \sin 2\pi x$$

دوره تناوب این تابع برابر است با:  $T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$

می‌دانیم ماکزیم و مینیم تابع  $y = a + b \sin cx$  به ترتیب  $a + |b|$  و  $a - |b|$  است. پس مینیم و ماکزیم تابع  $y = 1 + \sin 2\pi x$  به ترتیب برابر است با:  $m = 1 - |1| = 0$  و  $M = 1 + |1| = 2$ .

$\Rightarrow M + m - T = 2 + 0 - 1 = 1$

30- اگر نمودار تابع  $f(x) = a + b \sin cx$  به صورت شکل زیر باشد، مقدار  $f\left(\frac{31}{3}\right)$  کدام است؟



- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $-\frac{5}{4}$       ③  $-\frac{3}{2}$       ④  $-\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه 4

$\max(f) = 2 \Rightarrow a + |b| = 2$  (1)

$\min(f) = -4 \Rightarrow a - |b| = -4$  (2)

(1),(2)  $\rightarrow |b| = 3, a = -1$

دوره تناوب تابع برابر 4 است، پس داریم:

$\frac{2\pi}{|c|} = 4 \Rightarrow |c| = \frac{\pi}{2}$

با توجه به نمودار باید  $bc > 0$  باشد، پس هر دو حالت  $\begin{cases} b = 3 \\ c = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  یا  $\begin{cases} b = -3 \\ c = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$  قابل قبول است. بنابراین ضابطه  $f$  به صورت

$f(x) = -1 + 3 \sin \frac{\pi x}{2}$  است و داریم:

$f\left(\frac{31}{3}\right) = -1 + 3 \sin \frac{31\pi}{6} = -1 + 3 \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -1 - 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$

31- تابع  $f(x) = 3 - 2 \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  روی کدام یک از بازه‌های زیر یکنواست؟

- ①  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right)$       ②  $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$       ③  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$       ④  $\left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$

پاسخ: گزینه 4 تابع  $y = \tan x$  روی بازه‌هایی به صورت  $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  که  $k \in \mathbb{Z}$  باشد، یکنواست (اکیداً صعودی است).

پس تابع  $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  در صورتی یکنواست که داشته باشیم:



$$k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < 2x < k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \Rightarrow (4k-1)\frac{\pi}{8} < x < (4k+3)\frac{\pi}{8}$$

پس این تابع روی بازه‌های زیر یکنواست.

$$k = 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow x \in \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$k = -1 \Rightarrow x \in \left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right)$$

⋮

توجه کنید که اگر تابع  $y = g(x)$  روی بازه‌ای یکنوا باشد، تابع  $y = 3 - 2g(x)$  نیز روی همان بازه یکنواست.

32- معادله  $(1 + \sqrt{x}) \cot x = 1$  چند جواب در بازه  $(0, \pi/2)$  دارد؟

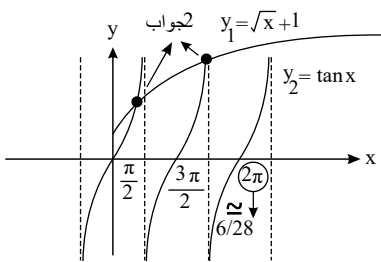
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:  $x \neq k\pi$  و  $1 + \sqrt{x} = \frac{1}{\cot x} = \tan x$  دو تابع  $y_1 = \sqrt{x} + 1$  و  $y_2 = \tan x$  را با لحاظ کردن دامنه رسم می‌کنیم؛ شکل زیر را در نظر بگیرید: با توجه به شکل ۲ جواب در بازه  $(0, \pi/2)$  دارد.



33- اگر  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$  و  $\tan x = 2m - 1$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟

$m \leq 0$  یا  $m \geq 1$  (۴)

$0 \leq m \leq 1$  (۳)

$m \geq 0$  (۲)

$m \leq 1$  (۱)

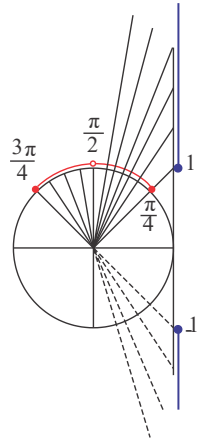
پاسخ: گزینه ۴ در دایره مثلثاتی زیر اگر  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$  باشد، آنگاه حدود  $\tan x$  به صورت مقابل است:



$$\tan x \leq -1 \text{ یا } \tan x \geq 1$$

$$2m - 1 \leq -1 \text{ یا } 2m - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow m \leq 0 \text{ یا } m \geq 1$$



34- اگر  $\tan 3\alpha = 5k - 1$  و  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{18})$  باشد،  $k$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه 1

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{18}) \Rightarrow 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{18} \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3\alpha < \frac{\pi}{6}$$

تابع  $y = \tan x$  در ناحیه اول اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$0 \leq 3\alpha < \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tan 0 \leq \tan 3\alpha < \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \leq 5k - 1 < \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 1 \leq 5k < \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 5k < \frac{\sqrt{3} + 3}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} \leq k < \frac{\sqrt{3} + 3}{15}$$

در بازه فوق عدد صحیحی وجود ندارد.

35- اگر  $\tan \alpha = 2$  باشد،  $\tan(3\alpha)$  کدام است؟

$-\frac{4}{3}$  (۴)

$\frac{5}{11}$  (۳)

$\frac{2}{11}$  (۲)

$-\frac{4}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه 2

$$\tan \alpha = 2 \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan \alpha} = \frac{-\frac{4}{3} + 2}{1 - (-\frac{4}{3}) \times 2} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{8}{3}} = \frac{2}{3 + 8} = \frac{2}{11}$$

36- دوره تناوب تابع  $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}$  کدام است؟

$\frac{\pi}{3}$  (۴)

$2\pi$  (۳)

$\pi$  (۲)

$\frac{\pi}{2}$  (۱)

پاسخ: گزینه 2

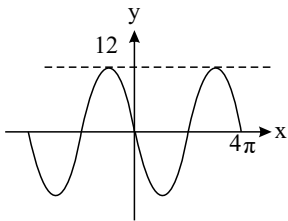
$$f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x}, \quad \left. \begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$



$$D_f = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x + x)}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

$$f(x) = \frac{2 \sin 4x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin 2(2x)}{\sin 2x} = \frac{2 \times 2 \sin 2x \cos 2x}{\sin 2x} = 4 \cos 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

37- قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - ax\right)$  به صورت شکل زیر است. کمترین مقدار  $a + b$  کدام است؟



$$\frac{25}{2} \text{ (2)}$$

$$-\frac{23}{2} \text{ (1)}$$

$$-\frac{25}{2} \text{ (4)}$$

$$\frac{23}{2} \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه 1

نکته:  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

$$f(x) = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) = b \sin ax$$

با توجه به شکل مشخص است که  $b < 0$  و  $a > 0$  است. از طرفی طبق نمودار دوره تناوب تابع  $4\pi$  و ماکزیم آن 12 است، پس داریم:

$$\frac{2\pi}{a} = 4\pi \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad \max f = |b| = 12 \xrightarrow{b < 0} b = -12$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{2} - 12 = -\frac{23}{2}$$

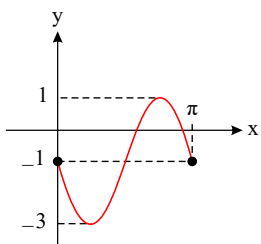
البته می‌تواند  $a < 0$  و  $b > 0$  نیز باشد، که داریم:

$$\frac{2\pi}{|a|} = 4\pi \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{2}, \quad |b| = 12 \xrightarrow{b > 0} b = 12$$

$$a + b = -\frac{1}{2} + 12 = \frac{23}{2}$$

پس کمترین مقدار  $a + b$  برابر  $-\frac{23}{2}$  است.

38- شکل زیر نمودار  $f(x) = a \sin(bx) + c$  را در یک دوره تناوب آن نمایش می‌دهد. حاصل  $abc$  کدام است؟



$$6 \text{ (2)}$$

$$-4 \text{ (1)}$$

$$4 \text{ (4)}$$

$$-3 \text{ (3)}$$

پاسخ: گزینه 4 با توجه به نمودار،  $b$  مثبت و  $a$  منفی است و داریم:



$$f(x) = a \sin(bx) + c$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \max f = |a| + c = 1 \\ \min f = -|a| + c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2$$

$$a < 0 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -2 \sin(2x) - 1 \Rightarrow abc = -2 \times 2 \times (-1) = 4$$

39- اگر  $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = f(x) + f(x+1)$  کدام است؟

$\mathbb{R} - \mathbb{N}$  (۲)

$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$  (۱)

$\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2k, k \in \mathbb{Z}\}$  (۴)

$\left\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$  (۳)

پاسخ: گزینه 1 با تشکیل تابع  $g(x)$  داریم:

$$g(x) = f(x) + f(x+1) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) \Rightarrow g(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

با توجه به این که مخرج نباید صفر شود، داریم:

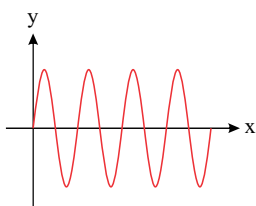
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{2} \neq k\pi \Rightarrow x \neq 2k, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

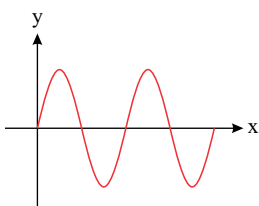
با توجه به (1) و (2) دامنه تابع  $g$  هر عدد حقیقی به جز اعداد صحیح است، پس داریم:

$$D_g = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

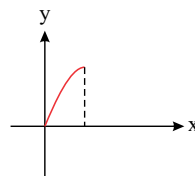
40- نمودار تابع  $y = \sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x$  در بازه  $[0, \pi]$  کدام است؟



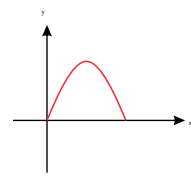
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

پاسخ: گزینه 3

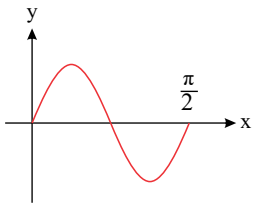
نکته:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$y = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin 4x \right) \Rightarrow y = \frac{1}{4} \sin 4x$$

دوره تناوب این تابع  $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  است. پس نمودار آن در بازه  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  به صورت زیر است.



از آنجا که بازه  $[0, \pi]$  شامل ۲ دوره تناوب تابع است. نمودار گزینه «۳» پاسخ صحیح است.

41- برای  $x \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$  اگر  $\tan(2x) = \frac{2}{m-3}$  باشد، حدود  $m$  کدام است؟

- ①  $(1, 5) - \{3\}$       ②  $(3, 5)$       ③  $(5, +\infty)$       ④  $\mathbb{R} - [1, 5]$

پاسخ: گزینه 1

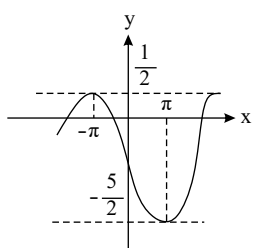
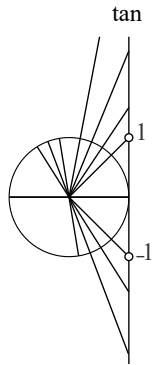
$$\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}, x \neq \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{4} < 2x < \frac{3\pi}{4}, 2x \neq \frac{\pi}{2}$$

با در نظر گرفتن محدوده  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$  در دایره مثلثاتی مشخص است که  $\tan 2x > 1$  یا  $\tan 2x < -1$ . پس داریم:

$$\frac{2}{m-3} < -1 \text{ یا } \frac{2}{m-3} > 1 \Rightarrow \left| \frac{2}{m-3} \right| > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|m-3|} > 1 \xrightarrow{m \neq 3} \frac{|m-3|}{2} < 1 \Rightarrow |m-3| < 2$$

$$\Rightarrow -2 < m-3 < 2 \Rightarrow 1 < m < 5, m \neq 3 \Rightarrow m \in (1, 5) - \{3\}$$



42- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \sin bx + c$  را نشان می‌دهد، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  کدام است؟

①  $-\frac{5}{4}$

②  $-\frac{1}{4}$

③  $-\frac{9}{4}$

④  $-\frac{7}{4}$

پاسخ: گزینه 3 در توابعی به فرم  $y = a \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$ ، فاصله افقی دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی اش برابر نصف دوره تناوب تابع است. بنابراین در این سؤال  $\frac{T}{2} = 2\pi$  است.

$$\Rightarrow T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \Rightarrow c = \frac{\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)}{2} = -1$$

همچنین داریم:

از طرفی برای به دست آوردن  $a$  نیز می‌توانیم بنویسیم:





$$y_{\max} = |a| + c = |a| - 1 \xrightarrow{y_{\max} = \frac{1}{2}} |a| = \frac{3}{2}$$

حال با توجه به اینکه در همسایگی  $x = 0$ ، تابع  $f$  نزولی است، باید  $ab$  مقداری منفی داشته باشد. بنابراین ضابطه تابع  $f$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = -\frac{3}{2} \sin \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{6} - 1 = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$$