پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۱

۱- آسان

$f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$

$a=۲$ در دامنهٔ تابع نیست و **f** در آن تعریف نشده است. اما در اطراف $a=۲$ داریم:

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

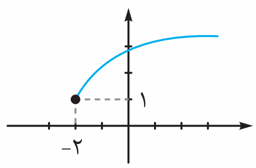
x	۱/۸۰	۱/۹	۱/۹۹	۲	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۰۲
f	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\boxed{?}$	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۰۲
			→		←		

توی جدول مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ۲ رو نگاه کن! هر چقدر به عدد ۲ نزدیک می‌شیم، مقدار **f** به ۴ نزدیک میشه پس:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$$

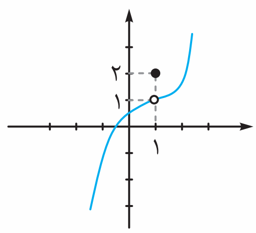
۲- آسان

آ)



در همسایگی راست عدد ۲- نمودار وجود دارد اما در سمت چپ ۲- نموداری نداریم.

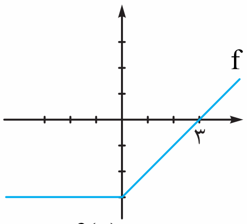
ب)



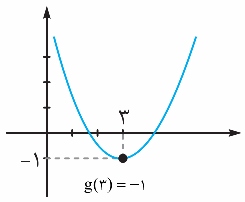
$\lim_{x\to ۱} f(x)=۱$

$f(۱)=۲$ $\qquad ۱\neq ۲$

۳- آسان

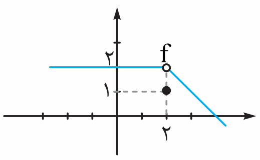


$f(۳)=۰$



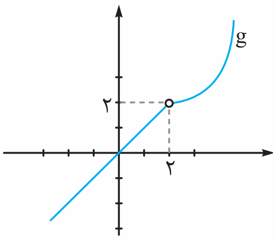
$g(۳)=-۱$

۴- آسان



$\lim_{x\to ۲} f(x)=۲$

$f(۲)=۱$



$\lim_{x\to ۲} g(x)=۲$

$g(۲)=$ وجود ندارد

۵- متوسط

$D_f=(-\infty,۳]$

با توجه به دامنهٔ تابع، تابع **f** در همسایگی چپِ ۳ تعریف شده و در همسایگی راست آن تعریف نشده است. پس حد کلی ندارد.

$$\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۳-x}=\sqrt{۳-۳}=۰$$

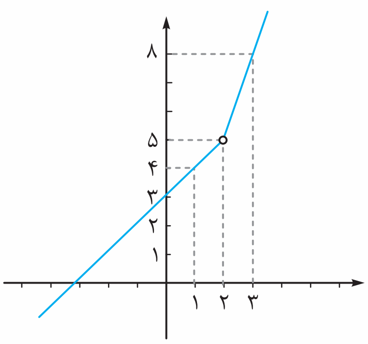
اما حد چپ آن در ۳ برابر ۰ است و وجود دارد.

۶- آسان

آ) تابع **f** در $x=۲$ تعریف نشده است زیرا هیچ‌یک از زیر بازه‌ها شامل عدد ۲ نمی‌شوند (هیچ‌کدام مساوی ندارند).

ب)

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x>۲ \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & ۲ & ۳\\ \hline ۳x-۱ & ۵ & ۸\end{array}\\[2ex] x+۳ & x<۲ \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & ۱ & ۲\\ \hline x+۳ & ۴ & ۵\end{array}\end{cases}$$



همانطور که از روی نمودار پیداست، حد تابع **f** در $x=۲$ برابر ۵ است پس:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۵$$

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینه «۴» — آسان

$D_f=[-۳,۰]$

$\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)=۰$

$\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)=$ وجود ندارد

همونطوری که از روی نمودار پیداست، تابع در همسایگی چپ ۳- تعریف نشده (نمودار نداریم) و بنابراین حد چپ وجود ندارد و حد تابع نیز وجود ندارد.

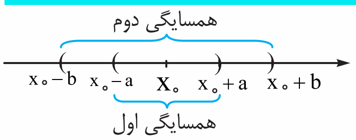
۲- گزینه «۳» — آسان

سطر بالای جدول رو ببین! عددها چه از سمت چپ و چه از سمت راست به عدد ۳ نزدیک میشن. پس $a=۳$.

حالا به سطر پایین جدول نگاه کن! عددها از هر دو طرف چپ و راست به عدد ۱ نزدیک میشن. پس $L=۱$.

$a+L=۳+۱=۴$

۳- گزینه «۲» — آسان



اگر اجتماع دو همسایگی متقارن از یک عدد، یک همسایگی باز همان عدد باشه، همونطور که از شکل پیداست، یکی از همسایگی‌ها زیرمجموعه دیگری است و بنابراین اشتراک آن‌ها برابر با یکی از آن‌هاست.

۴- گزینه «۱» — متوسط

اگر این بازه همسایگی متقارن **a** هست پس **a** وسط بازه قرار می‌گیره و چون شروع بازه $(a-۱)$ هست پس شعاع همسایگی ۱ واحد هست. در مسأله گفته شعاع **b** است بنابراین $b=۱$.

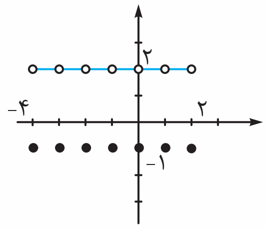
از طرف انتخاب بازه هم باید به فاصله ۱ واحد بیشتر از **a** باشد یعنی:

$b-۳=a+۱ \xrightarrow{b=۱} -۲=a+۱ \Rightarrow a=-۳$

$۲a+b=-۶+۱=-۵$

۷- آسان

آ)



ب) $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} g(x)=۲$

۸- متوسط

آ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}$ ، $\sqrt{۱-x^{۲}} \to ۱-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq x^{۲} \Rightarrow ۱\geq |x| \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$ ، $x\to x\neq ۰$

$\Rightarrow D_f=[-۱,۱]-\{۰\}$

ب) دامنهٔ **f** شامل همسایگی محذوف ۰ است.

پ) بله دامنه این تابع شامل عدد ۰/۹ است و بنابراین در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است.

ت) بله تابع **f** در همسایگی چپ $x=۱$ تعریف شده است زیرا سمت چپ $x=۱$ در دامنه وجود دارد اما در همسایگی راست آن تعریف نشده است زیرا دامنهٔ **f** شامل عددی بعد از ۱ نمی‌شود.

۹- آسان

اگر بازهٔ $(x-۱,۲x+۳)$ یک همسایگی برای ۲ باشد به این معناست که نقطهٔ ۲ یک نقطهٔ درون این بازه است و بنابراین:

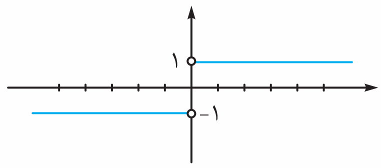
$$\left.\begin{array}{l} x-۱<۲ \Rightarrow x<۳ \\ \text{و} \\ ۲x+۳>۲ \Rightarrow ۲x>-۱ \Rightarrow x>-\frac{۱}{۲}\end{array}\right. \xrightarrow{\cap} -\frac{۱}{۲}<x<۳$$

دقت کن که در نوشتن نامعادلات بالا مساوی نداریم زیرا اگر ابتدا یا انتهای بازه برابر ۲ نشود دیگر عدد ۲ نقطهٔ درون دامنه نمی‌شود.

۱۰- دشوار

اول بیا **f** رو به صورت دو ضابطه‌ای بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & x>۰\\ \dfrac{-x}{x} & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)= \text{وجود ندارد}$$

۵- گزینه «۱» آسان

یک همسایگی باز متقارن به مرکز **a** و شعاع **R** به صورت زیر است:

$$|x-a|<R$$

$$\Rightarrow |x-\frac{۵}{۲}|<۷ \Rightarrow -۷<x-\frac{۵}{۲}<۷$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}-۷<x<۷+\frac{۵}{۲} \Rightarrow -۴/۵<x<۹/۵$$

صحیح $x=-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,\dots,۹$

۶- گزینه «۱» دشوار

$$|\frac{x-۳}{۲x-۱}|>۱ \Rightarrow \frac{x-۳}{۲x-۱}>۱ \Rightarrow \frac{x-۳-۲x+۱}{۲x-۱}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x-۲}{۲x-۱}>۰ \Rightarrow -۲<x<\frac{۱}{۲}$$

یا

$$\frac{x-۳}{۲x-۱}<-۱ \Rightarrow \frac{x-۳+۲x-۱}{۲x-۱}<۰ \Rightarrow \frac{۳x-۴}{۲x-۱}<۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}<x<\frac{۴}{۳}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۳ و ۴ غلط هستند زیرا نقطهٔ $\frac{۱}{۲}$ درون هیچ‌یک از بازه‌ها نیست و $\frac{۱۱}{۶}$ خارج از بازه‌هاست.

از بین گزینه‌های ۱ و ۲، گزینهٔ اول درست است زیرا:

$$-\frac{۷}{۶}<-\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow R=\frac{۵}{۶}$$

$$-۲<-\frac{۳}{۴}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow R=\frac{۵}{۴}$$

و در تست گفته شده بیشترین تعداد ممکن برای شعاع.

۷- گزینه «۴» متوسط

بیا یه فرمول بهت یاد بدم: اگر بازهٔ (h,k) بازهٔ مربوط به یک همسایگی متقارن با مرکز **a** و شعاع **R** باشد آن‌گاه:

$$a=\frac{h+k}{۲}\,,\ R=\frac{k-h}{۲}$$

بنابراین داریم:

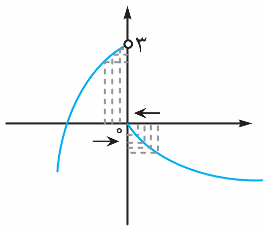
$$\text{مرکز تقارن}=۳ \Rightarrow \frac{۳a-۷+a+۵}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow ۴a-۲=۶ \Rightarrow ۴a=۸ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow \text{بازه}=(-۱,۷)-\{۳\} \Rightarrow \underset{\text{شعاع همسایگی}}{R}=\frac{۷-(-۱)}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

۸- گزینه «۴» آسان

هرچه از سمت راست به صفر نزدیک می‌شویم مقدار تابع نیز به صفر نزدیک میشه پس: $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$



هر چقدر با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شیم مقدار **y** به عدد ۳ نزدیک میشه پس:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} f(x)+\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰+۳=۳$$

۹- گزینه «۴» آسان

$$۲\lim_{x\to ۲^+} f(x)+\lim_{x\to ۲^-} f(x)-f(۲)=۲(۱)+۴-۲=۴$$

۱۰- گزینه «۲» آسان

با مقایسهٔ مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها می‌بینیم اعداد در اطراف $x=۲$ هستند و مؤلفه‌های دوم به عدد ۱۰ نزدیک می‌شوند پس مقدار **f** به عدد ۱۰ نزدیک میشه به عبارتی:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۱۰$$

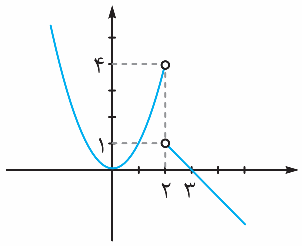
سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۲

۱- آسان

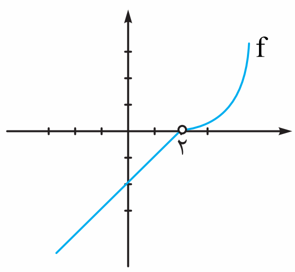
$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & x>2 \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline -x+3 & 1 & 0 \end{array} \\ x^2 & x<2 \xrightarrow{\text{سهمی}} \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline x^2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \end{cases}$$



$\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ} = 4 \\ \text{حد راست} = 1 \end{array}\right\}$ $1 \neq 4 \Rightarrow$ f در ۲ دارای حد نیست

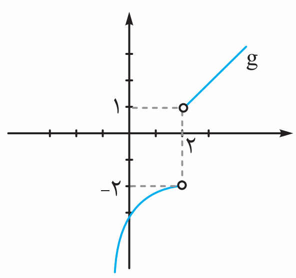
۲- متوسط

آ)



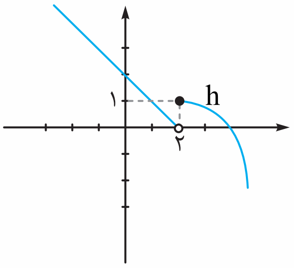
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

ب)



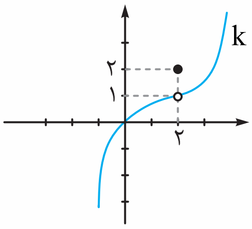
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=-2 \end{array}\right\}$ $1 \neq -2$

پ)



$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=1$

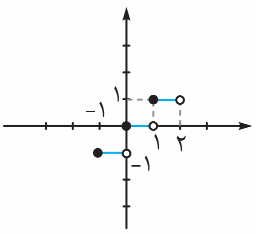
ت)



$\lim\limits_{x\to 2} k(x)=1$

$k(2)=2$

۳- آسان



$\lim\limits_{x\to 1^-} [x]=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} [x]=1$

$0 \neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} [x]=$ وجود ندارد

و یادت بمونه بطور کلی تابع جزءصحیح $[x]$ در اعداد صحیح دارای حد نیست.

۴- دشوار

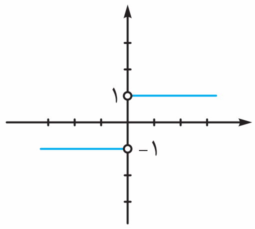
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x}=\frac{[0^+]}{0^+}=\frac{0}{0^+}=0$$

حواست باشه که صفری که در صورت کسر از داخل براکت خارج میشه دقیقاً صفر هست و بهش می‌گیم «صفر مطلق»! اما 0^+ یعنی عددی خیلی نزدیک به صفر و سمتِ راست اون که بهش می‌گیم صفرِ حدی (0^- هم همینطور) و می‌دونیم حاصل تقسیم صفر بر عدد مساوی صفر هستش.

یه نکته دیگه: برای هر عدد صحیح: $\begin{array}{l} [n^+]=n \\ [n^-]=n-1 \end{array}$

۵- آسان

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}\qquad D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$



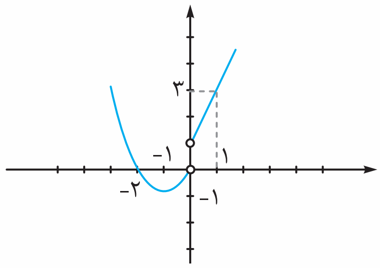
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1\end{array}\right\}\rightarrow$$

تابع در $x=0$ حد ندارد $\Rightarrow 1\neq-1$

زیرا حد چپ و راست مساوی نیستند.

۶- آسان

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 \quad x>0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1\\ \hline 2x+1 & 1 & 3\end{array}\\ x^2+2x \quad x<0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1\\ \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0\\ \hline x^2+2x & 0 & -1 & 0\end{array}\end{cases}$$



f در $x=0$ حد ندارد زیرا حد چپ برابر صفر و حد راست برابر ۱ است و حد چپ و راست برابر نیستند.

۷- متوسط

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}$$

$$x^2-x\ge0 \Rightarrow x(x-1)\ge0 \Rightarrow x\le0\cup x\ge1$$

$$D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$$

تابع تنها به ازای مقادیر بزرگ‌تر و مساوی ۱ تعریف شده و بنابراین حد چپ تابع در $x=1$ وجود ندارد زیرا سمت چپ ۱ تابع تعریف نشده است.

۸- متوسط

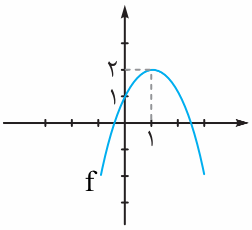
$$f(x)=\frac{x}{[x]-2}\qquad \begin{array}{l}[x]-2=0\\ [x]=2 \Rightarrow \underbrace{2\le x<3}_{\text{مقادیر صفرکننده مخرج}}\end{array}$$

$$D_f=(-\infty,2)\cup[3,+\infty)$$

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است بنابراین حد راست تابع در $x=2$ وجود ندارد.

۹- دشوار

$$f(x)=-(x-1)^2+2$$



آ) با توجه به شکل، در همسایگی ۱ داریم: $1<f(x)<2$ و بنابراین:

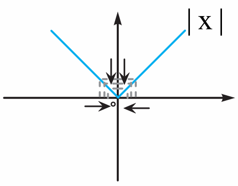
$$\lim_{x\to1}[f(x)]=\lim_{x\to1}1=1$$

ب)

$$\left[\lim_{x\to1}f(x)\right]\xrightarrow{\text{چون } \lim\limits_{x\to1}f(x)=2}[2]=2\quad \lim_{x\to\infty}$$

نکته مهم: $\lim\limits_{x\to1}[f(x)]\neq[\lim\limits_{x\to1}f(x)]$

۱۰- متوسط



آ) $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$

ب) $f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\ge0\\ -x & x<0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}a>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x)=a=|a|\\ a<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(-x)=-a=|a|\end{array}\right.\Rightarrow \lim_{x\to a}|x|=|a|$$

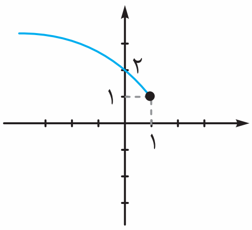
۱۱- متوسط

$$\lim_{x\to1^-}(x-[x])=1-[1^-]=1-0=1$$

$$\lim_{x\to1^+}(x-[x])=1-[1^+]=1-1=0$$

تابع **f** در $x=1$ دارای حد نیست $\Rightarrow 1\neq0$

۱۲- آسان



تابع **f** در همسایگی راست ۱ تعریف نشده است بنابراین در $x=1$ حد ندارد.

۱۳- متوسط

وقتی $x\to ۲^+$ یعنی $x>۲$ پس از ضابطهٔ اول برای محاسبه حد راست استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\sqrt{۲x^۲-۴a}=\sqrt{۲(۲)^۲-۴a}=\sqrt{۸-۴a}\Rightarrow \sqrt{۸-۴a}=۲$$

$$\Rightarrow ۸-۴a=۴\Rightarrow ۴a=۴\Rightarrow \boxed{a=۱}$$

f در $x=-۲$ دارای حد است پس حد چپ و حد راست در $x=-۱$ برابر است:

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to -۲^-}(x^۲+bx+۳a)=۴-۲b+۳a$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to -۲^+}(x+b)=-۲+b$$

$$\Rightarrow ۴-۲b+۳=-۲+b\Rightarrow ۹=۳b\Rightarrow \boxed{b=۳}$$

۱۴- متوسط

آ) $\displaystyle\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x}{[x]+۱}=\frac{-۱}{[(-۱)^+]+۱}=\frac{-۱}{-۱+۱}=\frac{-۱}{\text{۰ مطلق}}=$ تعریف نشده

ب) $x^۲-x-۲\geq ۰$

$D:(-\infty,-۱]\cup[۲,+\infty)$

چون ۲^- در دامنه وجود ندارد پس این تابع در ۲ حد ندارد.

پ) $\displaystyle\lim_{x\to ۱^+}(x^۲[x])=۱[۱^+]=۱$

$$\lim_{x\to ۱^-}(x^۲[x])=۱[۱^-]=۱(۰)=۰$$

$$۱\neq ۰\Rightarrow \lim_{x\to ۱}x^۲[x]=\text{وجود ندارد}$$

۱۵- متوسط

آ) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^-}(x-۳)[x]=۰[۳^-]=۰(۲)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۳^+}(x-۳)[x]=۰[۳^+]=۰(۳)=۰\end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳}(x-۳)[x]=۰\quad \text{پس حد وجود دارد}$$

ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^-}(x+۳)[x]=۶(۲)=۱۲\\ \lim\limits_{x\to ۳^+}(x+۳)[x]=۶(۳)=۱۸\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}(x+۳)[x]=$ وجود ندارد

پ) $x^۲-۹\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۹\Rightarrow x\leq -۳\cup x\geq ۳$

با توجه به دامنه، تابع فقط دارای حد راست است و داریم:

$$\lim_{x\to ۳^+}\sqrt{x^۲-۹}=\sqrt{۹-۹}=۰$$

و حد کلی در $x=۳$ وجود ندارد.

ت) $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}\qquad ۹-x^۲\geq ۰\Rightarrow -۳\leq x\leq ۳$

با توجه به دامنهٔ تابع، این تابع فقط در همسایگی چپ ۳ تعریف شده پس فقط حد چپ داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۹-x^۲}=\sqrt{۹-۹}=۰$$

و حد کلی تابع در $x=۳$ وجود ندارد.

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۲

۱- گزینه «۴» متوسط

f در $x=۱$ حد داره معنیش اینه که حد چپ و حد راست تابع برابر هستند:

$$\begin{rcases}\text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to ۱^-}(\frac{۲}{|x|}+۲m)=۲+۲m\\ \text{حد راست}=\lim\limits_{x\to ۱^+}(mx-۱)=m-۱\end{rcases}\Rightarrow ۲+۲m=m-۱\Rightarrow \boxed{m=-۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۳x-۱ & x>۱\\ \frac{۲}{|x|}-۶ & x<۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -۱}f(x)=\lim_{x\to -۱}(\frac{۲}{|x|}-۶)=۲-۶=-۴$$

۲- گزینه «۱» متوسط

$$\lim_{x\to ۲^-}g(f(x))=g(\underbrace{\lim_{x\to ۲^-}f(x)}_{\lim\limits_{x\to ۲^-}(۳x-۱)=۵})=g(۵)=\text{وجود ندارد}$$

وجود ندارد (زیرا **g** در ۵ تعریف نشده است)

$$\lim_{x\to ۲^+}g(f(x))=g(\underbrace{\lim_{x\to ۲^+}f(x)}_{\lim\limits_{x\to ۲^+}(۲x+۱)=۵})=g(۵)=\text{وجود ندارد}$$

و در حالت کلی حد $g(f(x))$ در $x=۲$ دارای حد نیست.

۳- گزینه «۲» متوسط

$$f(x)=[\frac{۳x}{۲}]$$

$$\lim_{x\to ۰}f(۴-۳x^۲)=f(\underbrace{\lim_{x\to ۰}(۴-۳x^۲)}_{۴-۳(۰)=۴})=f(۴)=[\frac{۳(۴)}{۲}]=۶$$

۴- گزینه «۳» دشوار

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۱^-}(f(x^۲-۱)+f(۱-|x|))$$

$$=f(\underbrace{\lim_{x\to ۱^-}(x^۲-۱)}_{۱^--۱=۰^-})+f(\underbrace{\lim_{x\to ۱^-}(۱-|x|)}_{۱-۱^-=۰^+})\times$$

$$=f(۰^-)+f(۰^+)$$

از روی نمودار واضح است که حد تابع **f** در صفر از چپ و راست به ترتیب ۱ و ۲ است و بنابراین:

$$\text{حد چپ}=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^+}(f(x^۲-۱)+f(۱-|x|))=f(۰^+)+f(۰^-)=۲+۱=۳$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}(x^۲-۱)=۰^+\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}(۱-|x|)=۱-۱^+=۰^-\end{cases}$$

پس حد کل وجود دارد و برابر ۳ است.

۵- گزینه «۴» دشوار

$$\lim_{x\to(-۳)^-}fof(x)=\lim_{x\to(-۳)^-}f(f(x))=f(\lim_{x\to(-۳)^-}f(x))=f(۳)$$

برای یافتن $f(۳)$، معادلهٔ خطی که $f(۳)$ روی اون قرار داره رو پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۰,-۱)\\(۲,۰)\end{cases}\Rightarrow y-۰=\frac{۰+۱}{۲-۰}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}(x-۲)$$

$$f(۳)=\frac{۱}{۲}(۳-۲)=\frac{۱}{۲}$$

۶- گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to ۱^-}(fof)(x)+\lim_{x\to ۱^+}(fof)(x)=f(۰^-)+f(۰^+)$$

$$=۱+(-۱)=۰$$

۷- گزینه «۲» آسان

بررسی گزینه «۱»: وقتی از راست به (-۱) نزدیک می‌شویم، نمودار بـه سـمت بالا یعنی $+\infty$ می‌رود پس حد برابر $+\infty$ است.

بررسی گزینه «۲»: از هر دو طرف وقتی به (-۳) نزدیک می‌شیم مقدار y به ۲ نزدیک میشه و مقدار حد برابر ۲ میشه.

بررسی گزینه «۴»: وقتی از راست به صفر نزدیک می‌شیم مقدار تابع بـه (-۲) نزدیک میشه و مقدار حد برابر -۲ میشه.

اما در گزینه «۲» داریم:

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=-\infty\end{matrix}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}f(x)=-\infty$$

۸- گزینه «۴» دشوار

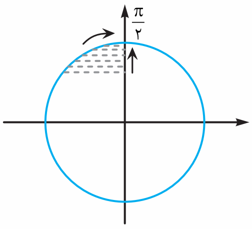
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-۱}{۲[f(x)]+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)-۱}{۲[\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)]+۱}=\frac{-۱-۱}{۲[(-۱)^-]+۱}=\frac{-۲}{۲(-۲)+۱}$$

$$=\frac{-۲}{-۴+۱}=\frac{۲}{۳}$$

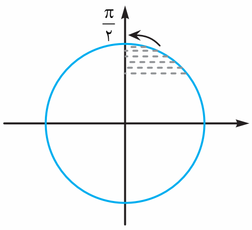
حواست باشه که وقتی $x\to ۰^+$، نمودار به (-۱) از سمت پایین نزدیک میشه یعنی $(-۱)^-$.

۹- گزینه «۱» دشوار

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}[f(\sin\frac{\pi x}{۲})]=[f(۱^-)]=[(-۱)^+]=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}\sin\frac{\pi x}{۲}=\sin\frac{\pi^+}{۲}=۱^-\end{cases}$$



$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^-}[f(\sin\frac{\pi x}{۲})]=[f(۱^-)]=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\sin\frac{\pi x}{۲}=\sin\frac{\pi^-}{۲}=۱^-\end{cases}$$



۱۰- گزینه «۲» متوسط

$$\lim_{x\to ۲^-}(f(x-۲)+f(۲-x))=f(۰^-)+f(۰^+)=۲+۱=۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+}(f(x-۲)+f(۲-x))=f(۰^+)+f(۰^-)=۱+۲=۳$$

مقدار حد وجود دارد و برابر ۳ است. $۳=۳\Rightarrow$

۱۱- گزینه «۴» دشوار

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۴})^-}[۴x+۱]=[۴(-\frac{۱}{۴})^-+۱]=[(-۱)^-+۱]=[۰^-]=-۱$$

$$\lim_{x\to(-\frac{۱}{۴})^+}[۴x+۱]=[۴(-\frac{۱}{۴})^++۱]=[(-۱)^++۱]=[۰^+]=۰$$

حد راست یک واحد بیشتر از حد چپ است.

۱۲- گزینه «۲» دشوار

$$f(۲x-۱)=\frac{۳-x}{۴-۳x}$$

برای محاسبه $\lim\limits_{x\to ۶}f(x)$ باید $۲x-۱=۶$ یعنی $x=\frac{۷}{۲}$ و

$$\lim_{x\to ۶}f(x)=\lim_{x\to\frac{۷}{۲}}\frac{۳-x}{۴-۳x}=\frac{۳-\frac{۷}{۲}}{۴-۳(\frac{۷}{۲})}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱۳}{۲}}=\frac{۱}{۱۳}$$

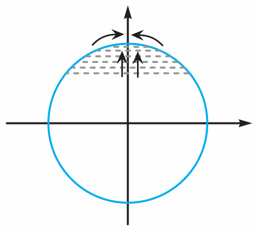
۱۳- گزینه «۴» متوسط

می‌دونیم که در محاسبهٔ حد، ما به (۱−) نزدیک میشیم اما به خودِ (۱−) نمی‌رسیم بنابراین برای محاسبهٔ هر دو حد چپ و راست از ضابطهٔ اول $(x\neq -1)$ استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{-1+1}=\frac{-2}{0}= \text{وجود ندارد}$$

۱۴- گزینه «۱» متوسط

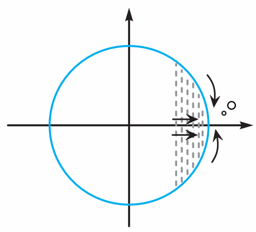
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{10}}[\sin 5x]=[\lim_{x\to\frac{\pi}{10}}\sin 5x]=[\sin\frac{5\pi}{10}]=[\sin\frac{\pi}{2}^{+}]=[1^-]=0$$



۱۵- گزینه «۳» دشوار

$$\lim_{x\to 0^-}[\frac{-3}{2\cos x+1}]=[\frac{-3}{2\cos(0)^{\pm}+1}]=[\frac{-3}{2(1)^-+1}]$$

$$=[\frac{-3}{3^-}]=[-(1^+)]=-2$$



۱۶- گزینه «۱» دشوار

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}([\frac{3}{x}]+[\frac{-2}{x}])=[\frac{3}{(-\frac{1}{2})^-}]+[\frac{2}{(-\frac{1}{2})^-}]$$

$$=[(-6)^+]+[4^-]=-6+3=-3$$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}([\frac{3}{x}]+[\frac{-2}{x}])=[\frac{3}{(-\frac{1}{2})^+}]+[\frac{2}{(-\frac{1}{2})^+}]$$

$$=[(-6)^-]+[4^+]=-7+4=-3$$

برای محاسبهٔ براکت این جور کسرها عددگذاری و مقایسه کن.

۱۷- گزینه «۱» متوسط

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}=\frac{0-[0^-]}{2(0)+[0^-]}=\frac{0-(-1)}{0+(-1)}=\frac{1}{-1}=-1$$

۱۸- گزینه «۴» متوسط

تابع در $x=12$ حد دارد پس حد چپ و حد راست آن‌ها برابر است.

$$\text{حد چپ}=a[-\frac{12^-}{4}]+[\frac{12^-}{3}]=a[-\underbrace{3^-}_{\substack{2/9\\-2/9}}]+[4^-]=-3a+3$$

$$\text{حد راست}=a[-\frac{12^+}{4}]+[\frac{12^+}{3}]=a[-\underbrace{3^+}_{\substack{3/1\\-3/1}}]+[4^+]=-4a+4$$

$$-3a+3=-4a+4 \Rightarrow a=1$$

۱۹- گزینه «۲» آسان

$$\text{حدچپ در } x=1 = a[1^-]+[\underbrace{1^-+1}_{\substack{0/9\\1/9}}]=0+1=1$$

$$\Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

$$\text{حدراست در } x=1 = a[1^+]+[\underbrace{1^++1}_{2^+}]=a+2$$

۲۰- گزینه «۲» متوسط

گزینه ۱ درست است زیرا $\sqrt{x}$ در همسایگی چپ صفر تعریف نشده و حد چپ ندارد.

گزینه ۳ درست است زیرا می‌دانیم $[x]+[-x]$ به ازای $x\notin\mathbb{Z}$ برابر ۱− است و وقتی $x\to 1$ یعنی عدد صحیحی نداریم.

گزینه ۴ درست است زیرا حدهای چپ و راست متفاوت هستند.

بررسی گزینه ۲:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{[x]-2}=\frac{1}{2-2}= \text{وجود ندارد}$$

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۳

۱- متوسط

چون گفته شده $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود است پس آن را $\lim_{x\to a} f(x)=M$ در نظر می‌گیریم.

آ) $\lim_{x\to a} C(f(x))=\lim_{x\to a} CM=CM\,,\ C\lim_{x\to a} f(x)=CM$

ب) $\lim_{x\to a} f^2(x)=\lim_{x\to a} f(x).f(x)=(\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} (fx))$

$=(\lim_{x\to a} f(x))^2$

پ) $\lim_{x\to a} (-f(x))=\lim_{x\to a} (-1)\times \lim_{x\to a} f(x)=-1\lim_{x\to a} f(x)$

۲- آسان

ابتدا باید چک کنیم هر یک از توابع **f** و **g** به تنهایی در $x=2$ دارای چه حدی است.

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 1-x^2=1-4=-3$

و $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x-5=-3$

$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2^+} 4-x=2$ و $\lim_{x\to 2^-} g(x)=\lim_{x\to 2^-} 4-x=2$

$\lim_{x\to 2} f+g=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} g(x)=-3+2=-1$

$\lim_{x\to 2} f-g=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)=-3-2=-5$

$\lim_{x\to 2} f(x).g(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\times\lim_{x\to 2} g(x)=(-3)(2)=-6$

$\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=-\dfrac{3}{2}$

۳- آسان

۱) $\lim_{x\to -1} x^4=1$

۲) $\lim_{x\to 10} (5(10)^3-6(10)+1)=5000-60+1=4941$

۳) $\lim_{x\to 2}\dfrac{(x+2)^2}{4(8)-7(2)+1}=\dfrac{16}{32-14+1}=\dfrac{16}{19}$

۴) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x-[x]}{1-x}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x-0}{1-x}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$

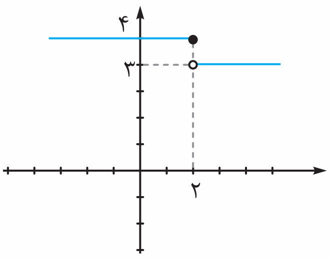
۴- دشوار

آ) $(f+g)(x)=\begin{cases}(-1)+(3) & x>2\\ (-2)+4 & x\le 2\end{cases}\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}2 & x>2\\ 2 & x\le 2\end{cases}$

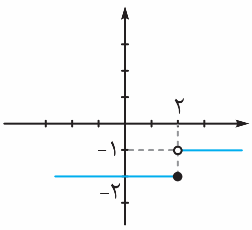
در نتیجه تابع ثابت $(f+g)(x)=2$

ب)

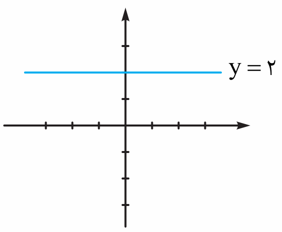
$f(x)$



$g(x)$



$f+g:$



پ) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=3,\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=4\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=$ حد ندارد

$\lim_{x\to 2^+} g(x)=-1,\ \lim_{x\to 2^-} g(x)=-2\Rightarrow \lim_{x\to 2} g(x)=$ حد ندارد

ت) چون توابع **f** و **g** حد ندارد پس تابع $f+g$ در $x=2$ حد نخواهد داشت.

۵- آسان

الف) $\lim_{x\to -\pi}\dfrac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi}=\dfrac{-\pi}{-\pi}=1$

ب) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

۶- آسان

$\lim_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}}{2+2}=\dfrac{0}{4}=0$

چون 2^+ در دامنهٔ $\sqrt{x-2}$ قرار دارد پس در 2^+ حد داریم.

۷- آسان

آ) $\lim\limits_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^{۳}=(-۶)^{۳}=-۲۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵)=۶-۴+۵=۷$

پ) $\dfrac{(-\frac{۵}{۳}+\pi)(۳(-\frac{۵}{۲})+۵)}{(۳(-\frac{۵}{۳})+۶)((-\frac{۵}{۳})^{۳}+۱)}=\dfrac{(-\frac{۵}{۳}+\pi)(۰)}{(۱)(-\frac{۱۲۵}{۲۷}+۱)}=۰$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}}\dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴}=\dfrac{۱-۲}{۲-۴}=\dfrac{-۱}{-۲}=\dfrac{۱}{۲}$

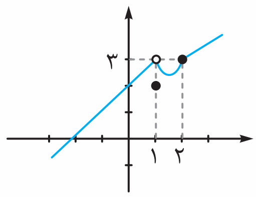
ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\sqrt{۴x^{۲}+۶x}=\sqrt{۴(\frac{۱}{۴})+۶(\frac{۱}{۲})}=\sqrt{۱+۳}=۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}=\dfrac{۰^{+}}{۰+۱^{-}}=\dfrac{۰^{+}}{۱}=۰$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}}\dfrac{-\cos x}{x-\pi}=\dfrac{۰}{-\frac{\pi}{۲}}=۰,\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}}\dfrac{-\cos x}{x-\pi}=۰$

۸- آسان

خیر.



۹- آسان

می‌توان تابع ثابت $g(x)=۱۲$ را در نظر گرفت

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱۲}{x^{۲}-۱}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

می‌توان هر تابعی که با جایگذاری $x=۲$، ۱۲ تولید کند بجای $g(x)$ در نظر گرفت

می‌توان $g(x)=۲x^{۲}+۴$ در نظر گرفت و ...

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x^{۲}+۴}{x^{۲}-۱}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

۱۰- آسان

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-L=۰$$

عکس: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=۰\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}L=۰$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}L\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=L$$

سؤالات تستی

پاسخنامه

بخش ۳

۱- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to ۲^{+}}[f(f(x))]=\lim_{x\to ۲^{+}}[f(۲^{-})]=\lim_{x\to ۲^{+}}[۱^{-}]=\lim_{x\to ۲^{+}}۰=۰$$

توجه داشته باشید که $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}f(f(x))]\neq[\lim\limits_{x\to ۲^{+}}[f(f(x))]$

۲- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^{+}}([-\frac{۲}{x}]-[-۴x^{۲}])=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^{+}}([۴^{+}]-[-۴(\frac{۱}{۴})^{+}])$$

$$=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^{+}}۴+۵=۹$$

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^{-}}([-\frac{۲}{x}]-[-۴x^{۲}])=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}^{-}}([۴^{-}]-[-۴(\frac{۱}{۴})^{+}])=۳+۵=۸$$

۳- گزینه «۲» متوسط

$$\lim_{x\to ۰^{-}}f(g(x))=f(\lim_{x\to ۰^{-}}g(x))\Rightarrow \lim_{x\to ۰^{-}}g(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x^{۲}-x}{-x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{x(x-۱)}{-x}=\lim_{x\to ۰^{-}}-x+۱=۱^{+}$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}[۲x]=۲$$

۴- گزینه «۳» متوسط

$$(\lim_{x\to ۲}f(x))(\lim_{x\to ۲}g(x))$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}x^{۲}-۴=۰\qquad \lim_{x\to ۲^{+}}g(x)=\lim_{x\to ۲^{+}}۲=۲$$

$$\lim_{x\to ۲^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۲^{-}}۴-۲x=۰\qquad \lim_{x\to ۲^{-}}g(x)=۲$$

در نتیجه حد ضرب آن‌ها نیز موجود و برابر با صفر خواهد بود.

۵- گزینه «۴» متوسط

ابتدا حد توابع **f** و **g** را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}۳x^{۲}-[x]=\lim_{x\to ۱^{+}}۳x^{۲}-۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}۳x^{۲}-۰=۳$$

چون تابع **f** در $x=۱$ حد ندارد پس طبق قضایای حد $\lim\limits_{x\to ۱}(f+g)$ موجود نیست.

سؤالات تشریحی
پاسخنامه
بخش ۴

۱- آسان

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$

تو محاسبهٔ حدها اول عدد رو جاگذاری می‌کنیم اگر به حالت صفر صفرم کـه یک حالت مبهم هست برسیم باید رفع ابهام کنیم و تـو ایـن سـؤال بـا تجزیـه کردن، عامل صفرکنندهٔ صورت و مخرج از بین می‌بریم و بعـد حـد رو حسـاب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

۲- آسان

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{2-2}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

۳- متوسط

آ) $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{2x^2+3x}=\frac{0}{0}$

عامل صفرکننده $(x+1)$

یادت باشه که اگر $x\to a$، آن‌گاه عامل صفرکننده $(x-a)$ است و مـی‌دانیم در حالت $\frac{0}{0}$ حتماً عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج وجود داره وتـوی تجزیـه ازشون کمک می‌گیریم.

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}}=\frac{2(-1)-1}{3(-1)}=\frac{-3}{-3}=1$$

ب) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$

$$=2(2+2)=8$$

۴- آسان

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}f(x).g(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x^2-x-1}\times\frac{2x+1}{x}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(x+1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{(2x+1)}(x-1)(x)}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{3}{\cancel{4}_2}}=\frac{2}{3}$$

۵- آسان

آ) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}_{\text{مبهم}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=2+2=4$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}=\frac{0}{0}_{\text{مبهم}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{x+2}}$

$$=-2+3=1$$

پ) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{0}{0}_{\text{مبهم}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3$

۶- متوسط

آ) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{x+2}}=4+4+4=12$

ب) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{[x]+1}=\frac{3-2}{[3^+]+1}=\frac{1}{4}$

پ) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{[x]}=\frac{2}{[2^+]}=\frac{2}{2}=1$

ت) $\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]-3}{x}=\frac{[1^+]-3}{1}=1-3=-2$

ث) $\lim_{x\to 2^+}\frac{[x]}{x}=\frac{2}{2}=1$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{[x]}{x}=\frac{[2^-]}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{[x]}{x}=\text{وجود ندارد}$$

۷- متوسط

آ) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+2x-8}=\frac{0}{0}_{\text{مبهم}}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x+4)}=\frac{1}{2+4}=\frac{1}{6}$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}_{\text{مبهم}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$

پ) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}_{\text{مبهم}}$

اگر در تجزیه، چند جمله‌ای داریم که به راحتی قابـل تجزیـه نیسـت لازمـه بـا تقسیم بر عامل صفرکننده، عبارت رو تجزیه کنیم:

عامل صفرکننده $=(x-1)$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^3}-x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\cancel{2x^3}\pm 2x^2 & 2x^2+2x+1 \\ \cline{1-1}
\cancel{2x^2}-x & \\
-\cancel{2x^2}\pm 2x & \\ \cline{1-1}
x-1 &
\end{array}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(2x^2+2x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{2+2+1}{1+1}=\frac{5}{2}$$

ت) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۳-x^۲-x+۱۰}{x^۲+۳x+۲}=\dfrac{۰}{۰}$

عامل صفرکننده $=(x+۲)$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳}-x^۲-x+۱۰ & x+۲ \\ \hline -\cancel{x^۳}\pm ۲x^۲ & x^۲-۳x+۵ \\ \hline -\cancel{۳x^۲}-x & \\ +\ \ -\cancel{۳x^۲}\pm ۶x & \\ \hline ۵x+۱۰ & \\ \underline{۵x+۱۰} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\cancel{(x+۲)}(x^۲-۳x+۵)}{\cancel{(x+۲)}(x+۱)}=\frac{۴+۶+۵}{-۲+۱}=-۱۵$$

۸- متوسط

حواست باشه که وقتی $x\to ۱^+$ یعنی $x>۱$ و بنابراین $|x-۱|=x-۱$

آ) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(۲x+۱)}{\cancel{x-۱}}=\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲x+۱)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{|(x-۲)(x-۳)|}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}|x-۳|}$

$=\dfrac{۴}{|۲-۳|}=۴$

۹- متوسط

آ) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲[x]-۱۶}{x[x]-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲[۲^-]-۱۶}{x[۲^-]-۴}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲-۱۶}{x-۴}$

$=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{\cancel{(x-۴)}(x+۴)}{\cancel{x-۴}}=۲+۴=۶$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x-|x|}{[x+۱]-x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x-|x|}{[۰^-+۱]-x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{۲x}{-x}=-۲$

حواست باشه که وقتی $x\to ۰^-$ آن‌گاه: $[۰^-+۱]=[۱^-]$ و $|x|=-x$

۱۰- متوسط

آ) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{\cancel{(x+۱)}(x^۲-x+۱)}{x\cancel{(x+۱)}}=\dfrac{۱+۱+۱}{-۱}=-۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+x)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=\dfrac{۶}{۴}=\dfrac{۳}{۲}$

تجزیه:
$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^۳}-x^۲-۲x & x-۲ \\ \hline -\cancel{x^۳}\pm ۲x^۲ & x^۲+x \\ \hline x^۲-۲x & \\ \underline{x^۲-۲x} & \\ ۰ & \end{array}$$

۱۱- متوسط

آ) $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{۳}}{۳}}\dfrac{x^۲-\frac{۱}{۹}}{x^۲-\frac{۱}{۳}}=\dfrac{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}}=\dfrac{\frac{۲}{۹}}{۰}=+\infty$

به عبارتی این حد وجود ندارد.

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۷-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۷$

بنا به اتحاد فصل اول $x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+...+x^۲+x+۱)$

۱۲- متوسط

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{x^۲-۴}{۲x^۲+۵x+۲}\times\frac{x-۲}{x^۲}\right)=\lim_{x\to -۲}\frac{\cancel{(x+۲)}(x-۲)(x-۳)}{\cancel{(x+۲)}(۲x+۱)(x^۲)}$$

$$=\frac{(\cancel{-}\cancel{۴})(-۵)}{(\cancel{-}۳)(\cancel{۴})}=\frac{-۵}{۳}$$

۱۳- دشوار

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+b}=۲\ \Rightarrow\ \dfrac{۰}{۱+a+b}=۲$

از اونجایی که کسری داریم با صورتِ صفر که مقدار حدِ اون کسر برابر ۲ نشده، معنی این هست که حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ بوده و بعد از رفع ابهام برابر ۲ شده.

به عبارتی $x=۱$ ریشهٔ مخرج نیز هست:

$x^۲+ax+b\xrightarrow{x=۱}۱+a+b=۰\ \Rightarrow\ \boxed{a+b=-۱}$

۱۴- متوسط

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲n}-۹}{x^n-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^n)^۲-۳^۲}{x^n-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x^n-۳)}(x^n+۳)}{\cancel{x^n-۳}}=۳^n+۳$$

۱۵- دشوار

از اونجایی که مخرج کسر به ازای جاگذاری $x=۱$ صفر شده و مقدار حد برابر عدد شده یعنی حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ بوده پس صورت هم در $x=۱$ صفر می‌شود:

$x^۳+۲x^۲+ax+۲\xrightarrow{x=۱}۱+۲+a+۲=۰\ \Rightarrow\ a=-۵$

حال مقدار حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲x^۲-۵x+۲}{x^۲+۳x-۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+۳x-۲)}{\cancel{(x-۱)}(x+۴)}=\frac{۱+۳-۲}{۱+۴}=\frac{۲}{۵}$$

تجزیه:
$$\begin{array}{l|l} x^۳+۲x^۲-۵x+۲ & x-۱ \\ \hline -x^۳\pm x^۲ & x^۲+۳x-۲ \\ \hline ۳x^۲-۵x & \\ -\ \ ۳x^۲\pm ۳x & \\ \hline -۲x+۲ & \\ \underline{-۲x+۲} & \\ ۰ & \end{array}$$

۱۶- آسان

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۳+x-۲}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۲)}{\cancel{x-۱}}=۱+۱+۲=۴$$

تجزیه: $x^۳+x^۲-۲$

$$\begin{array}{r|l} x^۳+x^۲-۲ & x-۱ \\ \hline -\,x^۳\pm x^۲ & x^۲+x+۲ \\ x^۲+x & \\ -\,x^۲\pm x & \\ ۲x-۲ & \\ ۲x-۲ & \\ ۰ & \end{array}$$

۱۷- آسان

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۸-۹}{(x-۱)(\sqrt{x+۸}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x+۸}+۳)}=\frac{۱}{\sqrt{x+۸}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

حواست باشه که برای رفع ابهام $\frac{۰}{۰}$ در کسرهایی که در صورت یا مخرج (یا هر دو) عبارت رادیکالی وجود داره صورت و مخرج رو در مزدوج عبارت رادیکالی (بدون توجه به موقعیت عبارت که در صورت هست یا مخرج) ضرب می‌کنیم تا عامل صفرکننده خودش رو نشون بده.

۱۸- متوسط

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}\times\frac{\sqrt{۳x-۵}+۲}{\sqrt{۳x-۵}+۲}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^۲-۹)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳x-۵-۴}$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)(\sqrt{۳x-۵}+۲)}{۳\cancel{(x-۳)}}=\frac{۶(۴)}{۳}=۸$$

۱۹- آسان

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}\times\frac{\sqrt{۱+x}+۱}{\sqrt{۱+x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{۱}+x-\cancel{۱}}{x(\sqrt{۱+x}+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}^{۱}}{\cancel{x}(\sqrt{۱+x}+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

۲۰- دشوار

توی این سؤال حدهای $\frac{۰}{۰}$ با وجود عبارت‌های رادیکالی داریم بنابراین ضرب در مزدوج رو فراموش نکن و یادت باشه به تعداد عبارت‌های رادیکالی باید توی مزدوج ضرب کنی.

آ) $$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲-۴}{(x^۲-۴)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\overset{۱}{\cancel{x-۲}}}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}$$

$$=\frac{۱}{(۴)(۴)}=\frac{۱}{۱۶}$$

ب) $$\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{(۲+\sqrt{x})(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۲+\sqrt{x})(۳+\sqrt{۲x+۱})}$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۲+\sqrt{x})(\underbrace{۹-۲x-۱}_{۸-۲x})}=\lim_{x\to ۴}\frac{\cancel{(۴-x)}(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۲+\sqrt{x})(۲)\cancel{(۴-x)}}=\frac{۳+۳}{(۴)(۲)}$$

$$=\times\frac{۶}{(۴)(۲)}=\frac{۳}{۲}$$

پ) $$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}\times\frac{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱+x-(۱-x)}{(x^۲+x)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\cancel{x}}{\cancel{x}(x+۱)(\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x})}=\frac{۲}{(۱)(۲)}=۱$$

ت) $$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}\times\frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+۱)}{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-x)(\sqrt{x}+۱)}{(x-۱)(x+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x\,\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}(x+\sqrt{x})}=\frac{۱(۲)}{۲}=۱$$

۲۱- دشوار

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}$$

$$۲x-۳\sqrt{x}+۱=۲(\sqrt{x})^۲-۳(\sqrt{x})+۱$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}\begin{cases}\sqrt{x}=۱\ \Rightarrow\ \sqrt{x}-۱=۰\\ \sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ \sqrt{x}-\frac{۱}{۲}=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ ۲\sqrt{x}-۱=۰=(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}-۱)$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(۲\sqrt{x}-۱)}{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۲-۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

۲۲- متوسط

آ) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x+۷}=\sqrt{۲+۷}=۳$ $\qquad x+۷\geq ۰\ \Rightarrow\ x\geq -۷$

چون نقطه ۲ درون دامنه است حد وجود دارد.

ب) $\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}\ :x-۲\geq ۰\ \Rightarrow\ x\geq ۲$

$x=۱$ درون دامنه قرار ندارد بنابراین حد وجود ندارد.

پ) $\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{x}\ :x\geq ۰$

$\sqrt{x}$ به ازای **x**های کوچک‌تر از صفر تعریف نشده و بنابراین حد چپ در صفر وجود ندارد.

۲۳- دشوار

آ) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

$x^2-x>0 \Rightarrow x(x-1)>0 \Rightarrow x<0 \cup x>1$

چون در 1^+ در دامنه وجود دارد پس:

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-1)}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{0^+}}{\sqrt{1}}=0$$

ب) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{\sqrt[3]{x^2-2x}}=\underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{\sqrt[3]{x(x-2)}}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x-2}}\times\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(x+3)}{\sqrt[3]{x}\times\cancel{\sqrt[3]{x-2}}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(x+3)}{\sqrt[3]{x}}=0$$

۲۴- دشوار

آ)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x^2+3x+2}=\underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x^2+3x+2}\times\frac{\sqrt{1-3x}+2}{\sqrt{1-3x}+2}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-3x-4}{(x^2+3x+2)(\sqrt{1-3x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt{1-3x}+2)}=\frac{-3}{(1)(4)}=-\frac{3}{4}$$

ب)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{x^2-x}\times\frac{(\sqrt[3]{3x-2})^2+\sqrt[3]{3x-2}+1}{(\sqrt[3]{3x-2})^2+\sqrt[3]{3x-2}+1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-2-1}{(x^2-x)[((\sqrt[3]{3x-2})^2+\sqrt[3]{3x-2}+1)]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}((\sqrt[3]{3x-2})^2+\sqrt[3]{3x-2}+1)}=\frac{3}{(1)(1+1+1)}=1$$

یادآوری اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

۲۵- آسان

آ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{1}{6}$$

ب)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}=\underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x-1)(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}=\frac{1}{2}$$

۲۶- متوسط

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{2x^2-x-6}\times\frac{x+\sqrt{2x}}{x+\sqrt{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(2x^2-x-6)(x+\sqrt{2x})}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(2x+3)(x+\sqrt{2x})}$$

$$=\frac{2}{(7)(4)}=\frac{1}{14}$$

۲۷- دشوار

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{8+x}-2}\times\frac{(\sqrt[3]{8+x})^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}{\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(\sqrt[3]{(8+x)^2}+2\sqrt[3]{8+x}+4)}{\cancel{8}+\cancel{x}-\cancel{8}}=4+4+4=12$$

۲۸- دشوار

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{x}+x-2}=\underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)(x+3)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+2)}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}$$

۲۹- متوسط

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}}=\underset{\text{مبهم}}{\frac{0}{0}}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\frac{(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}{(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}$$

$$\frac{(9-(2x+1))(2+\sqrt{x})}{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}=\lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(4-x)}(2+\sqrt{x})}{\cancel{(4-x)}(3+\sqrt{2x+1})}=\frac{\cancel{2}(4)}{\cancel{6}_{3}}=\frac{4}{3}$$

۳۰- دشوار

آ) $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{\sqrt[3]{x}-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+x+1)(x^2+x+2)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}=\frac{3(4)}{1}=12$$

ب) $\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2[x]-54}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{6x^2-54}{x-3}$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{6\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=36$$

۳۱- دشوار

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{8+x}+2}{x}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt[3]{8+x}}{x}$$

$$\times\frac{4+2\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{(8+x)^2}}{4+2\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{(8+x)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{-x}{\cancel{8-(8+x)}}}{\cancel{x}\left(4+2\sqrt[3]{8+x}+2-\sqrt[3]{(8+x)^2}\right)}=\frac{-1}{4+4+4}=-\frac{1}{12}$$

۳۲- متوسط

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{3x^2-4x-4}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x}}{3x^2-4x-4}\times\frac{x+\sqrt{2x}}{x+\sqrt{2x}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(3x^2-4x-4)(x+\sqrt{2x})}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(3x+2)(x+\sqrt{2x})}$$

$$=\frac{2}{9(4)}=\frac{1}{18}$$

۳۳- دشوار

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}\times\frac{(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x})}}=\sqrt{\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}{x\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}}=\sqrt{\frac{2}{1(2)}}=\sqrt{1}=1$$

۳۴- دشوار

آ) $$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{\sqrt{x-1}}(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{2}+1$$

ب) $$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-2}{x-7}\times\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+2}{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+2}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1+\sqrt{2+x}-4}{(x-7)(\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{2+x}-3)(\sqrt{2+x}+3)}{(x-7)(\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+2)(\sqrt{2+x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{\cancel{x-7}}{\cancel{(x-7)}(\sqrt{1+\sqrt{2+x}}+2)(\sqrt{2+x}+3)}=\frac{1}{(4)(6)}=\frac{1}{24}$$

۳۵- دشوار

آ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\times\frac{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1+x-1)}(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{\cancel{(1+x-1)}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{3}{2}$$

ب) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}-2}{2x^2-x-1}\times\frac{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}+2}{\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}+2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3+\sqrt[3]{x}-4}{(2x^2-x-1)(\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}+2)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(2x+1)(\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}+2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3(4)(3)}=\frac{1}{36}$$

۳۶- دشوار

آ) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{0}{0}\text{ مبهم}$$

در محاسبه حدهای $\frac{0}{0}$ که مثلثاتی است لازم است از اتحادهای مثلثاتی استفاده کنیم تا رفع ابهام شود.

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\times\frac{x}{2}\right)^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x^2}{4}\right)}{x}=\frac{x}{2}=0$$

ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\cos x+\sin x)}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دو نکته مهم برای رفع ابهام مثلثاتی:

$$\boxed{1-\cos 2x=2\sin^2 x \quad \text{یا} \quad 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}}\qquad\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}}$$

۳۷- متوسط

این نکته رو به عنوان یه نکته مهم در اتحادهای مثلثاتی داریم:

و نتایج اون به این صورت هست:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{mx}=\frac{n}{m}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\times 2x}{3x}=\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

۳۸- دشوار

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2x-\pi}{\cos x}$$

$$t=x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x=2t+\pi\to 2x-\pi=t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\cos(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{-\sin t}=-2$$

۳۹- دشوار

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{4x-\pi}$$

این حد رو به روش تغییر متغیر که در کتاب اومده حل می‌کنیم:

$$t=x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 2x=2t+\frac{\pi}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2t+\frac{\pi}{2})-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t-1}{4t}\times\frac{\cos 2t+1}{\cos 2t+1}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 2t-1}{4t(\cos 2t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin^2 2t}{4t(\cos 2t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{4t}\times\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 2t}{\cos 2t+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{0}{2}=0$$

۴۰- دشوار

آ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x^{\cancel{2}}}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

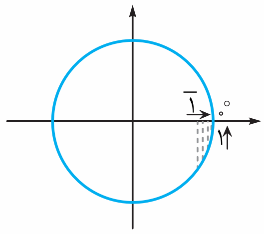
$$=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$$

ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}{\cos x-\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پ) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{|1-\cos x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$(x\to 0^-)\Rightarrow(\cos x\to 1^-)\Rightarrow 1-\cos x\Rightarrow 0^+$$



$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\frac{1}{2}}\Big)^2=\frac{1}{2}(4)=2$$

۴۱- دشوار

آ) $$\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos^2 x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{\cancel{2}} x}{x\cancel{\sin x}}$$

$$=2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}=2$$

ب) $$\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}$$

$$t=x+\pi\Rightarrow x=t-\pi$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}{}^{2}\,\frac{\Big(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{t}{2}\Big)^2}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2}=0$$

پ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6(x-\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$$

$$\xrightarrow{x-\frac{\pi}{3}=t}\frac{1}{6}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{6}(1)=\frac{1}{6}$$

۴۲- دشوار

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\qquad \begin{matrix}t=x-a\\ x=t+a\end{matrix}\ \xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t.\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}$$

$$=\cos a\times\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{1}+\lim_{t\to 0}\frac{\sin a(\cos t-1)}{t}$$

$$\cos a+\sin a\times\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{t}=\cos a+\underbrace{\sin a\times -2(\frac{1}{2})(0)}_{0}=\cos a$$

۴۳- آسان

آ) $$\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos x=\cos(-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

ب) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

پ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)$$

$$=1+1=2$$

۴۴- آسان

آ) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}=\frac{\sin\pi\cos\pi}{1+\cos^2\pi}=\frac{0(-1)}{2}=0$

ب) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2+\sin x}=\frac{\cos 0}{2+\sin 0}=\frac{1}{2}$

۴۵- متوسط

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x=t\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t\\ (x\to\frac{\pi}{2})\Rightarrow(t\to0)\end{cases}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=2(\frac{1}{2})^2=2(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$$

۴۶- متوسط

آ) $\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{5x}=2\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{5x}}_{\frac{2}{5}}=\frac{4}{5}$

ب) $\lim_{x\to0^-}(|\sin x|+[x])=\lim_{x\to0}(-\sin x-1)=-0-1=-1$

پ) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x})^2=2(1)^2=2$

۴۷- متوسط

آ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{\cos x-\sin x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

ب) $\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt{2-2\cos x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt{2(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}|\sin\frac{x}{2}|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

۴۸- آسان

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2|\cos x|}{x-2}=\frac{2|\cos\frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2}-2}=\frac{2(0)}{\frac{\pi}{2}-2}=0$$

بله این تابع در $x=\frac{\pi}{2}$ حد دارد و مقدار آن برابر صفر است.

۴۹- دشوار

آ) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}(\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}})^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{\frac{1}{2}})^2=\frac{1}{2}(2)^2=2$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\cos 2x}{\cos^3 x-\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+\sin x\cos x+\sin^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(1+\sin x\cos x)}=\frac{-2(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})}{1+(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{-4\sqrt{2}}{3}$$

پ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}\xrightarrow{t=x-\frac{\pi}{3}}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

۵۰- متوسط

آ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\begin{cases}t=\frac{\pi}{2}-x\\ x=\frac{\pi}{2}-t\end{cases}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}=2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$

ب) $\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt[3]{x+8}}{x}\times\frac{4+2\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{(x+8)^2}}{4+2\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{(x+8)^2}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\overset{-x}{\cancel{8-(x+8)}}}{\cancel{x}(4+2\sqrt[3]{x+8}+\sqrt[3]{(x+8)^2})}=\frac{-1}{4+4+4}=\frac{-1}{12}$$

پ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos^2 x}{1+\tan x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$

ت) $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{1-\cos 2x}\times\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\cancel{\sin^2 x}}{(\cancel{2\sin^2 x})(2\sin^2\frac{x}{2})}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4(1)^2}=\frac{1}{4}$$

پاسخنامه سؤالات تستی
بخش ۴

۱- گزینه «۴» دشوار

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{x(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+1)}{x\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+2)}=\frac{3}{4(4)}=\frac{3}{16}$$

۲- گزینه «۴» دشوار

$$\lim_{x\to \pi}\frac{x^2+\pi^2-2\pi x}{1-\cos(6x-6\pi)}=\lim_{x\to \pi}\frac{(x-\pi)^2}{2\sin^2(\frac{6x-6\pi}{2})}$$

$$=\lim_{x\to \pi}\frac{(x-\pi)^2}{2\sin^2(3x-3\pi)}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

۳- گزینه «۳» آسان

$$\lim_{x\to 2}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2}(\frac{x+1}{2x^2-x+1}\times\frac{2x+1}{x})=\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{14}$$

۴- گزینه «۲» آسان

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2(1)^2=2$$

۵- گزینه «۲» متوسط

$$\lim_{x\to -2}(\frac{3}{2x^2+5x+2}-\frac{4}{x^2-4})$$

$$=\lim_{x\to -2}(\frac{3}{(x+2)(2x+1)}-\frac{4}{(x-2)(x+2)})$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x-6-8x-4}{(x-2)(x+2)(2x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{\overset{-5\cancel{(x+2)}}{\cancel{-5x-10}}}{(x-2)\cancel{(x+2)}(2x+1)}$$

$$=\frac{-5}{(-4)(-3)}=-\frac{5}{12}$$

۶- گزینه «۲» متوسط

$$\lim_{x\to 2^-}(\frac{x+2}{x^2-2x}+\frac{2[x]}{2-x})=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2-2[x]x}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2-2x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{-1}{\cancel{2-x}}}{\underset{1}{x\cancel{(x-2)}}}=-\frac{1}{2}$$

۷- گزینه «۳» دشوار

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2-\sqrt[3]{x+6}}{-(x-2)}\times\frac{4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}}{4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{\cancel{2-x}}{\cancel{8-x-6}}}{\cancel{(2-x)}(4+2\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{(x+6)^2})}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

۸- گزینه «۲» دشوار

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\cos x-\sin x})(\sqrt{\cos x}\times\sqrt{\sin x})}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}+\cancel{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}=2^{-\frac{1}{4}}=2^a\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

۹- گزینه «۲» دشوار

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\frac{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}{\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-\cos x}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos^3 x-1)}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\,(\overset{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{\cos x-1}})(\cos^2 x+\cos+1)}{x^2(\cos^2 x+\sqrt{\cos x})}=-2(\frac{1}{2})^2\times\frac{1(1+1+1)}{(1+1)}=-\frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه «۲» دشوار

$$\lim_{x\to 0}(([2x]+[-2x])\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}})$$

میدونیم که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و به همین ترتیب $[2x]+[-2x]=\begin{cases}0 & 2x\in\mathbb{Z}\\ -1 & 2x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ وقتی $x\to 0$ آنگاه $2x\notin\mathbb{Z}$ و

بنابراین پرانتز اول برابر (-1) است.

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos^3 x}{1-\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim -\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{1-\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2\sin^2\frac{x}{2}(\cos^2 x+\cos x+1)}{1-\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}(\cos^2 x+\cos x+1)(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}$$

$$=+2\left(\frac{1}{2}\right)^2(3)(2)=+3$$

حواست باشه در تجزیهٔ $(1-\cos^3 x)$ مشابه تست ۹ عمل کردیم.

۱۱- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{|x^2-4|}{-x^2-x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{|(x-2)(x+2)|}{-(x^2+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2^+}\frac{|x-2|\,\cancel{(x+2)}}{-\cancel{(x+2)}(x-1)}=\frac{4}{3}$$

۱۲- گزینه «۲» دشوار

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cot x=\lim_{x\to 0}[1^-]\cot x=0\times\lim_{x\to 0}\cot x=0$$

اگه یادت باشه گفته بودیم همیشه اول براکت رو جاگذاری کنیم و بعد بقیهٔ عبارت رو در نظر بگیریم در اینجا هم بدون توجه به مقدار حد آخر چون صفر در هر عددی ضرب بشه برابر صفر میشه، مقدار حد برابر صفر است.

۱۳- گزینه «۲» دشوار

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\frac{1}{2}\qquad ax+b=0\xrightarrow{x=2}\boxed{2a+b=0}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(ax+b)(x+\sqrt{3x+2})}$$

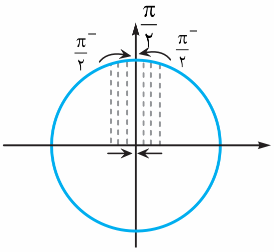
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\overbrace{(x-1)}^{1}}{(ax+b)\underbrace{(x+\sqrt{3x+2})}_{4}}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\times 4}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{ax+b}=2$$

$$\Rightarrow x-2=2ax+2b\Rightarrow\begin{cases}2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}\\ 2b=-2\Rightarrow b=-1\end{cases}$$

۱۴- گزینه «۱» دشوار

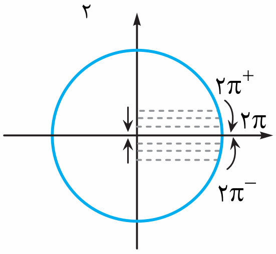
$$\lim_{x\to\pi^-}\left(\sin\frac{x}{2}[\underbrace{\cos\frac{x}{2}}_{0^+}]-\cos x[\underbrace{\sin 2x}_{0^-}]\right)=\lim_{x\to\pi^-}\left(0\sin\frac{x}{2}+\cos x\right)$$

$$=\lim_{x\to\pi^-}\cos x=-1$$



$$\lim_{x\to\pi^+}\left(\sin\frac{x}{2}[\underbrace{\cos\frac{x}{2}}_{0^-}]-\cos x[\underbrace{\sin 2x}_{0^+}]\right)=\lim_{x\to\pi^+}\left(-\sin\frac{x}{2}-0\right)$$

$$=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$



۱۵- گزینه «۱» دشوار

باز هم مخرج کسر صفر شده اما مقدار حد $\frac{3}{2}$ شده پس $\frac{0}{0}$ بوده.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{ax+b}+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{(x-1)\cancel{(2)}(\sqrt{ax+b}+2)}=\frac{3}{\cancel{2}}$$

از طرفی ریشه $x=1$ صورت است پس:

$$\sqrt{a+b}-2=0\Rightarrow\sqrt{a+b}=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{ax+b-4}{4(x-1)}=3\Rightarrow ax+b-4=12x-12$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=12\\ b-4=-12\Rightarrow b=-8\end{cases}$$

۱۶- گزینه «۳» دشوار

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cos 3x+[\tan^2 x]$$

$$=\xrightarrow{x\to\frac{\pi}{3}^-}\lim\underbrace{[\sin 0^-]}_{-1}\cos 3x+\left[\tan^2\frac{\pi}{3}^-\right]$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}(-\cos 3x+[3^-])=1+2=3$$

$$\xrightarrow{x\to\frac{\pi}{3}^+}\lim\left(0+\left[\tan^2\frac{\pi}{3}^+\right]\right)=0+[3^+]=3$$

۱۷-گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x})^2}=2(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$$

۱۸-گزینه «۲» آسان

$$\lim_{x\to -1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1})=\lim_{x\to -1}\frac{2-x(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2-x^2+x}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-(\cancel{x+1})(x-2)}{(x-1)(\cancel{x+1})}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

۱۹-گزینه «۱» دشوار

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 3x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}\times\frac{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2(\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^3 x-4\cos x}{x^2(\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x\,\cancelto{-\sin^2 x}{(\cos^2 x-1)}}{x^2(\sqrt{\cos 3x}+\sqrt{\cos x})}=\frac{-4(1)(1)^2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-2$$

سال دیگه یاد می‌گیری این حد رو به روش هوپیتال حساب کنی اما الان از اتحاد زیر کمک گرفتیم:

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

۲۰-گزینه «۱» آسان

$$\lim_{x\to 2}(\frac{6}{x^2-2x}-\frac{x+1}{x-2})=\lim_{x\to 2}\frac{6-x^2-x}{x^2-2x}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(\cancel{x-2})(x+3)}{x(\cancel{x-2})}=-\frac{5}{2}$$

۲۱-گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}\times\frac{3x-\sqrt{4x^2+5}}{3x-\sqrt{4x^2+5}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{9x^2-4x^2-5}{2(x+1)(3x-\sqrt{4x^2+5})}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{5(x-1)(\cancel{x+1})}{2(\cancel{x+1})(3x-\sqrt{4x^2+5})}=\frac{-10}{-6}=\frac{5}{3}$$

۲۲-گزینه «۴» دشوار

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-x}$$

با در نظر گرفتن $t=\sqrt[4]{x}$ داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{t^2-t}{t^2-t^4}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{t}(t-1)}{t^{\cancel{2}}(1-t^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{t-1}}{-(\cancel{t-1})(t+1)}=-\frac{1}{2}$$

۲۳-گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\cancel{x-1})\,(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})^2(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\frac{1}{(2)(3)}=\frac{1}{6}$$

۲۴-گزینه «۱» دشوار

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-3}\times\sqrt{x+3}}+\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}+\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancelto{\sqrt{x-3}}{x-3}}{\cancel{\sqrt{x-3}}\,\sqrt{x+3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{6}}+0=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

۲۵-گزینه «۱» دشوار

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$$

نه فرجه‌ها یکسان هست و نه عبارت زیر رادیکال پس با اضافه و کم کردن عدد ۱ دو عبارت مجزا می‌سازیم:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

$$-(\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}\times\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1})=$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\cancelto{2\cancel{x}}{\cancel{1}+2x-\cancel{1}}}{\cancel{x}(\sqrt{1+2x}+1)}-\frac{\cancelto{\cancel{x}}{\cancel{1}+x-\cancel{1}}}{\cancel{x}(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)})$$

$$=\frac{2}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۲۶-گزینه «۴» دشوار

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3\sqrt{x-1}-8}{x-2}$$

عامل صفرکننده $(x-2)$ هست که در صورت با ایجاد (x^3-8) به وجود میاد. پس با اضافه کردن و کم کردن $8\sqrt{x-1}$ اون رو ایجاد می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3\sqrt{x-1}-8\sqrt{x-1}+8\sqrt{x-1}-8}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)\sqrt{x-1}+8(\sqrt{x-1}-1)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})(x^2+2x+4)\sqrt{x-1}}{\cancel{x-2}}+\lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-1-1})}{(\cancel{x-2})(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$=12+4=16$$

۲۷- گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{x\times x^2\times\cos x}=1\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

۲۸- گزینه «۳» دشوار

با تغییر متغیر $y=x-2$ جلو می‌رویم و $x=y+2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{1-\sin\frac{\pi x}{4}}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-\sin(\frac{\pi y}{4}+\frac{\pi}{2})}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1-\cos\frac{\pi y}{4}}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{2\sin^2\frac{\pi y}{8}}=\frac{1}{\cancel{2}\left(\frac{\pi^2}{\underset{32}{\cancel{64}}}\right)}=\frac{32}{\pi^2}$$

۲۹- گزینه «۱» دشوار

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan\pi x}{2x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{(1-\tan\pi x)(2x+\sqrt{x})}{4x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{(1-\tan\pi x)\overbrace{\cancel{(2x+\sqrt{x})}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1}}{x(4x-1)}=x-\frac{1}{4}=t\Rightarrow x=t+\frac{1}{4}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\tan(\pi t+\frac{\pi}{4}))}{(t+\frac{1}{4})(4t)}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\frac{\tan\pi t+1}{1-\tan\pi t})}{(t+\frac{1}{4})(4t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}-\tan\pi t-\tan\pi t-\cancel{1}}{4t(t+\frac{1}{4})(1-\tan\pi t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-2\tan\pi t}{4t}\times\lim_{t\to 0}\frac{1}{(t+\frac{1}{4})(1-\tan-\pi t)}=-\frac{2\pi}{4}\times\frac{1}{(\frac{1}{4})(1)}=-2\pi$$

۳۰- گزینه «۱» دشوار

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1+\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

وقتی $(x\to\pi)$ آن‌گاه $(1+\cos x\to 0)$ و حد اول برابر ۱ می‌شود.

$$=1\times\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{2(1-\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\cancel{1+\cos x}}{2(1-\cos x)\cancel{(1+\cos x)}}=\frac{1}{4}$$

۱- آسان

شرط‌های پیوستگی در $x=a$ که باید هر سه برقرار باشند این‌هاست:

۱) f در $x=a$ تعریف شده باشد

۲) f در $x=a$ دارای حد باشد

۳) مقدار حد با مقدار تابع در نقطه a یکی باشه.

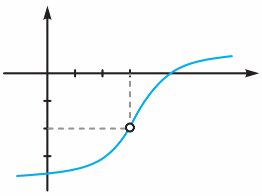
$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{3\}\Rightarrow$ شرط اول رو نداره

پس f در $x=3$ پیوسته نیست.

$$\lim_{x\to 3}g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 6}(x+3)=6$$

در g هر سه شرط پیوستگی در $x=3$ برقرار است پس $g(3)=6$ و g در $x=3$ پیوسته است.

۲- آسان



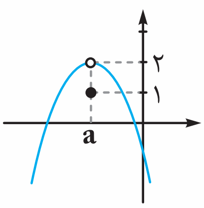
$\lim_{x\to 3}f(x)=-2$ اما $3\notin D_f$

همونطوری که از نمودار مشخص هست این تابع در $x=3$ ناپیوسته است.

۳- آسان

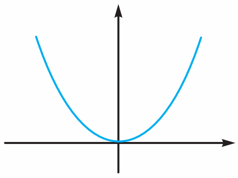
$a\in D_f$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to a}f(x)=2\\ f(a)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)\neq f(x)$$



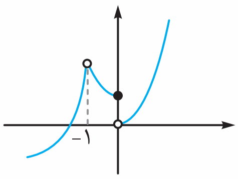
۴- آسان

خط‌ها، سهمی‌ها و بطور کلی توابع چند جمله‌ای از انواع توابعی هستند که همواره پیوسته هستند.



۵- آسان

این تابع در $x=۰$ به دلیل عدم وجود حد و در $x=-۱$ به دلیل تعریف نشدن در (-۱) ناپیوسته است اما در بقیه نقاط محور، تعریف شده است.



۶- آسان

۱) $۰ \in D_f$ ✓

۲) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰^-}(۳x^۲+x)=۰ \\ \lim\limits_{x\to ۰^+}(۲\cos x-\sin x)=۲(۱)-۰=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$

تابع در $x=۰$ حد ندارد بنابراین در صفر پیوسته نیست.

۷- متوسط

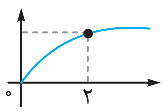
آ) تابع جزءصحیح $[x]$ در نقاط صحیح دارای حد نیست و بنابراین ناپیوسته است اما در نقاط غیرصحیح پیوسته است پس $\mathbf{f}$ تنها در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوسته است.

ب) تابع $\mathbf{f}$ در همه نقاط صحیح پیوستگی راست داره پس در $x=۰$ و $x=۲$ پیوستگی راست داره.

پ) $\mathbf{f}$ در $x=\frac{۱}{۲}$ پیوستگی کامل دارد اما در هیچکدام از این نقاط دارای تنها پیوستگی چپ نیست.

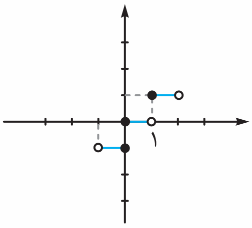
۸- متوسط

آ) نادرست. همان‌طور که از نمودار مشخص هست تابع $\mathbf{f}$ در این بازه پیوستگی دارد.



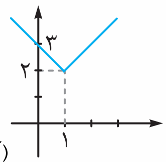
یادت باشه که در $x=۰$ تنها داشتن پیوستگی راست و در $x=۲$ تنها داشتن پیوستگی چپ کافی هست.

ب) درست. به نمودار $f(x)=[x]$ توجه کن:



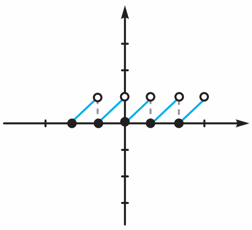
در بازه $(۰,۱)$ پیوسته است اما در $[۰,۱]$ پیوسته نیست زیرا در ۱ پیوستگی چپ ندارد.

۹- متوسط



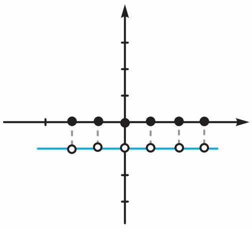
آ)

همواره پیوسته است.



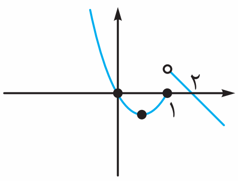
ب)

در اعداد صحیح ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد.



پ)

در اعداد صحیح ناپیوسته است و پیوستگی یک طرفه دارد.



ت)

در $x=۱$ ناپیوسته است.

۱۰- آسان

برای پیوسته بودن و یافتن مجهول‌ها کافیه سه تا مقدار برابر باشند: حد چپ، حد راست و مقدار تابع.

آ) $\left.\begin{array}{l} \text{حد چپ} = ۲(۱)-۱=۱ \\ \text{حد راست} = -۱+۲=۱ \end{array}\right. \Rightarrow a=۱$

$f(۱)=a$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}+x-۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x+۲)=۳$

$g(۱)=a \Rightarrow a=۳$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}=\frac{\cancel{\sqrt{x}-۱}}{(\cancel{\sqrt{x}-۱})(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۲}$

$\lim\limits_{x\to ۱^+}([x]+a)=[۱^+]+a=۱+a$

$۱+a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-}([x]-a)[x]=-a(۰)=۰$

$\lim\limits_{x\to ۱^+}([x]-a)[x]=(۱-a)(۱)=۱-a$

$۱-a=۰ \Rightarrow \boxed{a=۱}$

۱۱- متوسط

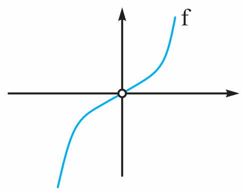
آ) $\lim\limits_{x\to ۰^-} x=۰$ ، $\lim\limits_{x\to ۰^+}(۲x+۱)=۱$ ، $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ حد ندارد $\Rightarrow$ پیوسته نیست

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{ax}{|x|}=\begin{cases} \xrightarrow{x\to ۰^+} \frac{ax}{x}=a \\ \xrightarrow{x\to ۰^-} \frac{ax}{-x}=-a \end{cases} \Rightarrow a=-a \Rightarrow a=۰$

$f(۰)=۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)\neq f(۰) \Rightarrow$ g در $x=۰$ پیوسته نیست

۱۲- آسان

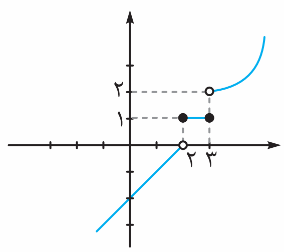
آ)



$۰\notin D_f$

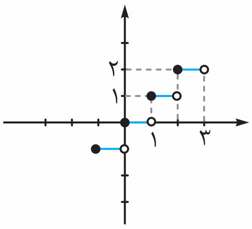
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ $f(۰)\neq \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$

ب)



پ) $x=۲$ و $x=-۲$ در دامنه تابع نیستند و $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴}$ بنابراین f در این نقاط ناپیوسته است و f در بقیه اعداد حقیقی پیوسته است.

۱۳- آسان



تابع جزءصحیح روی هر پله پیوسته است و چون $y=[x]$ طول پله‌ها یک واحد است بنابراین حداکثر مقداری که **k** می‌تواند بگیرد ۳ است.

۱۴- متوسط

$f(x)=۲-\sqrt{۳-x}$

$۳-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۳$

هر زیرمجموعه‌ای از این دامنه، می‌تواند جواب مسأله باشد برای مثال: $[۰,۱]$

۱۵- متوسط

$\lim\limits_{x\to ۰^-}(x-۲a)=-۲a$

$\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{x^{۲}}=۲(\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{x})^{۲}$

$=۲(\frac{۱}{۲})^{۲}=۲(\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$

$f(۰)=b-۱$

$-۲a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{a=-\frac{۱}{۴}}$

$b-۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{b=\frac{۳}{۲}}$

۱۶- آسان

آ) یک سهمی در هر عدد حقیقی پیوسته است پس در $x=۱$ نیز پیوسته است.

ب) $g(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۱ \\ -۱ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow$ در $x=۱$ ناپیوسته است

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)\neq f(۱)$

حد چپ $=-۱+۲=۱$

$f(۱)=۲$ $\Rightarrow$ در $x=۱$ ناپیوسته است

حد راست $=۱$

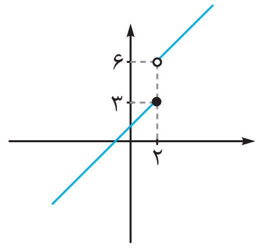
۱۷- آسان

$\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+۱)=۲+۱=۳$

$\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳x)=۳(۲)=۶$

$۳\neq ۶ \Rightarrow$ در $x=۲$ پیوسته نیست

به نمودار هم توجه کنیم:



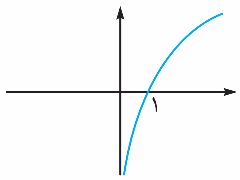
ناپیوستگی از روی نمودار هم مشهود است.

۱۸- آسان

آ) درست. چند جمله‌ای‌ها در کل $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

ب) نادرست. توابع سینوس و کسینوس در کل $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

پ) درست و از روی نمودار کاملاً واضح است.



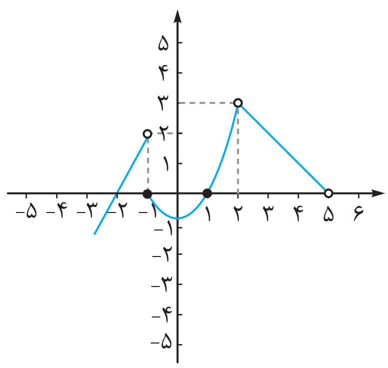
ت) درست.

ث) درست.

ج) درست. شبیه قسمت (پ)، این تابع روی $(0,+\infty)$ پیوسته است پس روی هر زیر بازه آن نیز پیوسته است.

۱۹- متوسط

آ)



ب) $D_f=(-\infty,5)-\{2\}$

$R_f=(-\infty,3)$

پ) $[-1,1] \Rightarrow$ پیوسته

$(2,5) \Rightarrow$ پیوسته

$[-2,0] \Rightarrow$ ناپیوسته در $x=-1$

۲۰- آسان

آ) نادرست زیرا در $x=-1$ پیوستگی چپ ندارد.

ب) درست زیرا در این بازه کاملاً پیوسته است.

پ) نادرست. زیرا در ۲ از راست پیوسته نیست (در ۲ تعریف نشده است.)

ت) نادرست. زیرا تابع همسایگی راست ۵ تعریف نشده است و حد کلی ندارد.

ث) درست

ج) نادرست. $\mathbf{f}$ در این بازه در $x=-1$ ناپیوسته است.

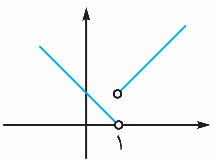
۲۱- آسان

آ) تابع در $[-1,1]$ پیوسته است و در $[-1,2]$ ناپیوسته است.

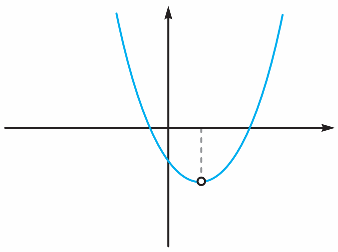
ب) $\mathbf{f}$ در $(2,4]$ پیوسته و در $[2,4]$ ناپیوسته است.

۲۲- آسان

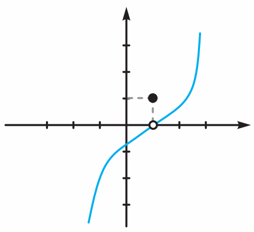
آ)



ب)



پ)



۲۳- دشوار

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+8}-2)(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancel{8}-\cancel{8}}{\cancel{x}(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4)}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{1}{12}$$

$f(0)=a$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow a=\frac{1}{12}$$

۲۴- متوسط

آ)

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\overset{\cancel{x-۲}}{\cancel{x+۲-۴}}}{\cancel{(x-۲)}(\sqrt{x+۲}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۱}{\sqrt{x+۲}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{x^۳+۴}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}\ \Rightarrow \text{ f در } x=۲ \text{ پیوسته است}$$

$$f(۲)=\frac{۱}{۴}$$

ب) $\lim_{x\to ۲^-} x[x]=۲[۲^-]=۲$

$\lim_{x\to ۲^+} x[x]=۲[۲^+]=۴\ f(۲)=۲[۲]=۴$

f در $x=۲$ پیوستگی کلی ندارد اما پیوستگی راست دارد.

۲۵- متوسط

اگر **f** بخواهد در $x=۱$ پیوستگی راست داشته باشد لازم است مقدار تابع یعنی $f(۱)$ با حد راست تابع برابر باشد:

حد راست $=a[\underbrace{\underbrace{۱-۱^+}_{۰^-}}_{-۱}]+[۱^+]=-a+۱$

$f(۱)=a[۱-۱]+[۱]=۱$

$-a+۱=۱\ \Rightarrow\ \boxed{a=۰}$

۲۶- متوسط

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}}=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{-\cancel{(x-۱)}}=-۲$$

تابع **f** در $x=۱$ دارای حد نیست و هیچ مقداری وجود ندارد که به جای **a** قرار دهیم و **f** پیوسته شود.

۲۷- متوسط

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲}\,|\sin\frac{x}{۲}|}{\sin x}$$

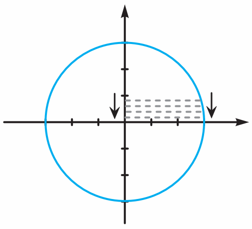
$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-\sqrt{۲}\sin\frac{x}{۲}}{\sin x}=-\sqrt{۲}(\frac{۱}{۲})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$f(۰)=a\ \Rightarrow\ a=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۸- متوسط

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[\sin x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{[\sin ۰^+]}{x}=\frac{[۰^+]}{۰^+}=\frac{۰\ \rightarrow\text{صفر مطلق}}{۰^+\ \rightarrow\text{صفرحدی}}=۰$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}=۲$$



حد چپ و راست یکی نیست پس **f** در $x=۰$ ناپیوسته است.

۲۹- متوسط

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲ x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۲}(-\sin x)}=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+}(b[-۲x]+۳)=b[\underbrace{-۲(۰^+)}_{۰^-}]+۳=-b+۳$$

$f(۰)=a\cos ۰=a$

$\boxed{a=-۱}$

$-b+۳=-۱\ \Rightarrow\ \boxed{b=۴}\quad \Rightarrow\ b-a=۴+۱=۵$

۳۰- متوسط

آ) $f(x)=[x^۲]\qquad g(x)=x-۱$

$(fog)(x)=[(x-۱)^۲]$

$$\lim_{x\to ۰^-}[(x-۱)^۲]=[(\underbrace{\underbrace{۰^- -۱}_{(-۱)^-}}_{۱^+})^۲]=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+}[(x-۱)^۲]=[(۰^+-۱)^۲]=[۰^+]=۰$$

$f(g(۰))=f(-۱)=[(-۱)^۲]=۱$

f در $x=۰$ پیوسته نیست اما پیوستگی چپ دارد.

ب) $(\frac{g}{f})(x)=\frac{x-۱}{[x^۲]}$

$$\lim_{x\to ۰^\pm}\frac{x-۱}{[x^۲]}=\lim\frac{x-۱}{[۰^+]}=\frac{-۱}{۰}=-\infty$$

تابع $\frac{g}{f}$ در $x=۰$ دارای حد نیست بنابراین پیوسته نیست.

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۵

۱- گزینه «۴» — متوسط

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(2\cos x-1)}{x^2}=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}_{1}\times\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-1}{x}$$

$=1\times\frac{2\cos x-1}{0}=\frac{1}{0}=\infty \Rightarrow$ تابع در $x=0$ دارای حد نیست

و بنابراین در $x=0$ پیوسته نیست.

۲- گزینه «۲» — متوسط

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}\\ \lim\limits_{x\to a^+}(1-\frac{x}{4})=1-\frac{a}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{a}=1-\frac{a}{4}\xrightarrow{\times4a}4=4a-a^2$$

$$\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow(a-2)^2=0\Rightarrow a=2$$

۳- گزینه «۲» — دشوار

$$f(x)=\begin{cases}[\frac{\sin x}{x}]\cos4x & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ a & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}[\frac{\sin x}{x}]\cos4x=[1^-]\times1=0$$

$$\Rightarrow a=0$$

حواست باشد که در اطراف صفر، $\sin x\le x$ و بنابراین $\frac{\sin x}{x}\le1$ و حد آن 1^- می‌شود.

۴- گزینه «۳» — متوسط

$$\lim_{x\to1^-}(ax-a+2)=a-a+2=2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x-\sqrt{x})}{x^2-x}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x-\sqrt{x})}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{1+\sqrt{1}}{1}=2$$

$$f(1)=a(1)-a+2=2$$

همانطور که مشخص است هر سه مقدار حد چپ و حد راست و مقدار تابع بدون این که به مقدار **a** وابسته باشند برابر هستند و بنابراین تابع به ازای هر مقدار **a** پیوسته است.

۵- گزینه «۱» — متوسط

جداکنندهٔ بازهٔ بالا و پائین اعداد صحیح است پس پیوستگی را در اعداد صحیح بررسی می‌کنیم.

می‌دانیم که به ازای $x\notin\mathbb{Z}$ داریم: $[x]+[-x]=-1$ و داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

برای پیوسته بودن باید $a=-1$.

۶- گزینه «۱» — دشوار

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2x}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{\sin^2x}\times\frac{\cos x+\sqrt{\cos x}}{\cos x+\sqrt{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-\cos x}{\sin^2x(cisx+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0}\frac{-(\cos x)-(2\sin^2\frac{x}{2})}{\sin^2x(\cos+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}\times\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

۷- گزینه «۱» — دشوار

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x(\cos x-1)}{\sin^2x(\cos x+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\tan^2x}{\cot2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{\cos2x}{\sin2x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\cancel{(\cos^2x-\sin^2x)}\sin2x}{\cos^2x\times\cancel{\cos2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\sin2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}a\cos3x=a\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}a=2\Rightarrow a=\frac{-4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$$

۸- گزینه «۲» — آسان

$$\lim_{x\to6^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to6^+}(a+\cos^2\frac{\pi x}{36})=a+\cos^2\frac{\pi}{6}=a+\frac{3}{4}$$

$$a+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

«۴» گزینه -۹ دشوار

$$\lim_{x\to\pi^-} a\cos\frac{۲x}{۳} = a\cos\frac{۲\pi}{۳} = -\frac{a}{۲}$$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{۱+\cos x}}{x-\pi}\times\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sqrt{۱-\cos x}} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{\sin^۲ x}}{(x-\pi)\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+}\frac{|\sin x|}{(x-\pi)\times\sqrt{۲}\,|\sin\frac{x}{۲}|} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sin x}{(x-\pi)\times\sqrt{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}}$$

$t = x-\pi \Rightarrow x = t+\pi$

$\sin\pi^+ = ۰^-$

$\sin\frac{\pi^+}{۲} = ۱^-$

$$= \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin(\pi+t)}{t}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}(۱)} = \lim_{x\to ۰^+}\frac{-\sin t}{t}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \boxed{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$-\frac{a}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a = \sqrt{۲}$$

«۴» گزینه-۱۰ دشوار

$x = \frac{\pi}{۲} - x$

$x = \frac{\pi}{۲} - t$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\cos ۳x}{\cos x} = \lim_{t\to ۰^+}\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-۳t)}{\cos(\frac{\pi}{۲}-t)}$$

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\sin ۳t}{+\sin t} = -۳$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}(\sin ۵x - a) = \sin\frac{۵\pi}{۲} - a = ۱-a$$

$۱-a = -۳ \Rightarrow a = ۴$

«۳» گزینه-۱۱ متوسط

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{a(\overset{-۱}{\cancel{۱+۱-x}})}{x(x-۲)(۱-\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲})}$$

$$= -\frac{a}{۲(۳)} = -\frac{a}{۶} = \lim_{x\to ۲}(x-a) = ۲-a$$

$$-\frac{a}{۶} = ۲-a \xrightarrow{\times ۶} -a = ۱۲-۶a \Rightarrow ۵a = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

«۴» گزینه-۱۲ دشوار

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-x+\sqrt{x+۱}}{(x-۳)(۱+\sqrt{x-\sqrt{x+۱}})}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+}\frac{۱-۲x+x^۲-x-۱}{(x-۳)\underbrace{(۱+\cancel{\sqrt{x-\sqrt{x+۱}}})}_{۲}\underbrace{(۱-x-\cancel{\sqrt{x+۱}})}_{-۴}}$$

$$= -\frac{۱}{۸}\lim_{x\to ۳^+}\frac{x^۲-۳x}{x-۳} = -\frac{۱}{۸}\lim_{x\to ۳^+}\frac{x\cancel{(x-۳)}}{\cancel{x-۳}} = -\frac{۳}{۸}$$

$$\lim_{x\to ۳^-}(ax-۳a-\frac{۳}{۸}) = ۳a-۳a-\frac{۳}{۸} = -\frac{۳}{۸} = f(۳)$$

مقدار حد و مقدار تابع وابسته به مقدار **a** نیست پس به ازای هر مقدار **a** پیوسته است.

«۲» گزینه-۱۳ آسان

$$\lim_{x\to ۲^-}(x-۱)[x] = (۲-۱)[۲^-] = ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}(a+۲\sin\frac{\pi}{x}) = a+۲\sin\frac{\pi}{۲} = a+۲$$

$a+۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$

«۳» گزینه-۱۴ آسان

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & -۱ < x < ۱ \\ ax+b & x \le -۱ \cup x \ge ۱ \end{cases}$$

پیوستگی در -۱: $-۱[(-۱)^+] = -a+b \Rightarrow \boxed{b-a=۱}$

پیوستگی در ۱: $۱[۱^-] = a+b \Rightarrow \boxed{a+b=۰}$

$$\begin{cases} b-a = ۱ \\ b+a = ۰ \end{cases}$$

$$۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

«۱» گزینه-۱۵ آسان

برای پیوستگی در بازه $[۲,۳)$ لازم است در ۲ پیوستگی راست داشته باشد.

$$\text{حد راست} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{x-[x]}{x^۳-x-۶} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{x-۲}}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۳)} = \frac{۱}{۱۱}$$

$f(۲) = a \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$

«۴» گزینه-۱۶ متوسط

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱}(-\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{\sqrt[۳]{(۱-x)^۳}}) = \lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}}{x-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{x})^۲}}{\sqrt[۳]{(۱-\sqrt{x})^۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{۱-\sqrt{x}}}{-(\cancel{۱-\sqrt{x}})(۱+\sqrt{x})\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}} = \infty$$

حد وجود ندارد پس پیوستگی ندارد.

«۲» گزینه-۱۷ آسان

$t = ۱-x \Rightarrow x = ۱-t$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sin\pi x}{۱-x} = \lim_{x\to ۱}\frac{(\pi-\pi t)}{t} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin\pi t}{t} = \pi \Rightarrow a = \pi$$

«۲» گزینه-۱۸ آسان

$$\lim_{x\to -۱^-}\frac{۲-\sqrt{۳-x}}{x+۱} = \lim_{x\to -۱^-}\frac{۴-۳+x}{\cancel{(x+۱)}(۲+\sqrt{۳-x})} = \frac{۱}{۴}$$

$$\lim_{x\to -۱^+}(ax+۱) = -a+۱$$

$$-a+۱ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

۱۹- گزینه «۲» آسان

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)[x]=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\left(a+2\sin\frac{\pi}{x}\right)=a+2\end{array}\right\} \Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

۲۰- گزینه «۱» آسان

$$\lim_{x\to 1^+}(-x^2+4)=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}(ax+5x-a)=5$$

$3\neq 5 \Rightarrow$ به ازای هیچ مقداری پیوسته نیست

۲۱- گزینه «۴» آسان

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=3\\ \lim\limits_{x\to 1}(ax-a+3)=3\end{array}\right\} \Rightarrow 3=3 \Rightarrow$$

بدون توجه به مقدار **a** به هرحال این تابع پیوسته است.

۲۲- گزینه «۲» متوسط

توابع براکتی به ازای مقادیری که داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل می‌کنند ناپیوسته هستند. مگر این که ریشهٔ عبارت پشت براکت باشد!

این تابع در $x=\pm 1$ که داخل براکت صحیح است و ریشهٔ (x^2-1) هستند پیوسته است.

۲۳- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{0}{0^+}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x}=\frac{-1}{0^-}=\infty$$

$f(0)=\dfrac{[0]}{0}=$ تعریف نشده $\quad 0\notin D_f$

۲۴- گزینه «۱» متوسط

$x=-1$ در پیوسته $\Rightarrow -a+b=(-1)[(-1)^+] \Rightarrow \boxed{-a+b=1}$

$x=1$ در پیوسته $\Rightarrow a+b=1[1^-] \Rightarrow \boxed{a+b=0}$

$$\begin{cases}-a+b=1\\ a+b=0\end{cases}$$

$$2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & |x|\geq 1 \xrightarrow{x=3} y=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}=-1\\ x[x] & |x|<1 \xrightarrow{x=3} \text{غ ق ق (در بازه نیست)}\end{cases}$$

۲۵- گزینه «۱» متوسط

از اونجایی که $f+g$ و $f-g$ هر دو در x_0 پیوسته هستند پس جمع و تفریق اون‌ها هم پیوسته است:

$f+g+f-g=2f$ پیوسته

$\Rightarrow f$ پیوسته

$f+g-(f-g)=f+g-f+g=2g$ پیوسته $\Rightarrow g$ پیوسته

بنابراین **f** و **g** پیوسته هستند.

۲۶- گزینه «۱» متوسط

$$f(x)=(-1)^{[x]}\sin\frac{\pi}{2}x \qquad x\in\mathbb{Z}$$

x عدد صحیح است پس $[x]=x$ و داریم:

$$f(x)=(-1)^x\sin\frac{\pi}{2}x$$

زوج $x \Rightarrow x=2k \Rightarrow f(x)=\underbrace{(-1)^{2k}}_{1}\underbrace{\sin\frac{\pi}{\cancel{2}}(\cancel{2}k)}_{0}=0$ همواره پیوسته

فرد $x \Rightarrow x=2k+1 \Rightarrow f(x)=\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1}\sin\frac{\pi}{2}(2k+1)=\pm 1$ ناپیوسته

۲۷- گزینه «۴» متوسط

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\\ f(x) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}0-1 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow g(1)=-1$$

بنابراین تابع **g** یک تابع ثابت است و روی این بازه نقطه ناپیوستگی ندارد.

۲۸- گزینه «۳» دشوار

$$f(x)=[x^2]$$

این تابع در نقاطی ناپیوسته است که مقدار داخل براکت به عدد صحیح تبدیل بشه.

$x=-1 \Rightarrow \begin{array}{l}\text{حد راست}=[((-1)^+)^2]=[1^-]=0\\ f(-1)=1\end{array} \Rightarrow$ در $x=-1$ ناپیوسته

$x=2 \Rightarrow \begin{array}{l}\text{حد چپ}=[(2^-)^2]=[4^-]=3\\ f(2)=4\end{array} \Rightarrow$ در $x=1$ ناپیوسته

$x=0 \Rightarrow [(0^{\pm})^2]=[0]=0 \Rightarrow$ پیوسته

در نقاط $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ و $x=1$ نیز ناپیوسته است.

۲۹- گزینه «۳» — دشوار

$$f+g=\begin{cases}-۲x-\frac{۱}{۲} & x<۰\\ ۲x+۱ & x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۰^+}(fof)(x)=\lim_{x\to ۰^+}f(f(x))=\lim_{x\to ۰^+}f(۰^+)=۰\\ &\lim_{x\to ۰^-}f(f(x))=f(-\tfrac{۱}{۲})=-\tfrac{۱}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۰^+}g(f(x))=g(۰^+)=۱\\ &\lim_{x\to ۰^-}g(f(x))=g(-\tfrac{۱}{۲})=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{پیوسته}$$

به همین ترتیب گزینه ۴ نیز نادرست است.

۳۰- گزینه «۱» — آسان

$$k(x)=f+g=\begin{cases}۲x+a+۱ & x<۱\\ \frac{a}{x+۱}+۱ & x\geq ۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^-}k(x)=۳+a$$

$$\lim_{x\to ۱^+}k(x)=۱+\frac{a}{۲}$$

$$۳+a=۱+\frac{a}{۲}\Rightarrow \frac{a}{۲}=-۲\Rightarrow \underline{a=-۴}$$

۱- متوسط

آ) نادرست. $\lim_{x\to ۳^+}g(x)=\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=۶$

و $\lim_{x\to ۳^-}g(x)=\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=۶$ دارای حد است.

ب) درست. در تعریف حد چون فقط حد چپ و حد راست مهم است پس همسایگی محذوف مناسب است.

پ) درست. تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح دارای حد نمی‌باشد و در دیگر نقاط دارای حد است.

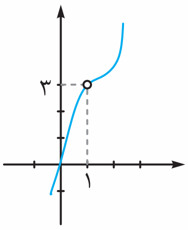
۲- متوسط

آ) یک

ب) $\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}۴x^۲-۷=-۷$

پ) در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد چون تابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح دارای حد نیست.

۳- آسان



۴- متوسط

حواستون باشه‌ها! همسایگی متقارن محذوف دارای مرکز $\frac{e+f}{۲}$ و شعاع $\frac{f-e}{۲}$

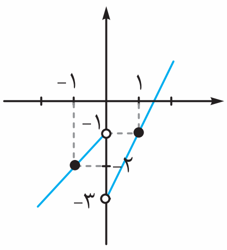
$$\text{شعاع } r=\frac{۲x+۶+۲x+۴}{۲}=\frac{۴x+۱۰}{۲}=۲$$

$$\text{مرکز } a=\frac{-۲x-۴+۲x+۶}{۲}=۱$$

$$۴x+۱۰=۴\Rightarrow ۴x=-۶\Rightarrow x=-\frac{۶}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

$$a-x=۱-(-\frac{۳}{۲})=۱+\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۵- متوسط



$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۰^+}f(x)=-۳\\ &\lim_{x\to ۰^-}f(x)=-۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}f(x)\neq \lim_{x\to ۰^-}f(x)$$

پس در $x=۰$ حد ندارد.

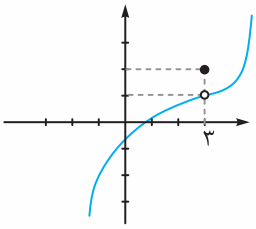
۶- متوسط

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{x-۲}}=۴$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{x-۲}}=۴$$

چون حد چپ و راست برابر است پس در $x=۲$ حد دارد.

۷- متوسط



۸- متوسط

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم} \Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} x-\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

چون حد چپ و راست برابرند پس در $x=۱$ حد دارد.

۹- متوسط

$$\lim_{x\to -۳^+} f(x)=\lim_{x\to -۳^+} x-b=-۳-b$$

$$\lim_{x\to -۳^-} f(x)=\lim_{x\to -۳^-}\frac{x^۲+۴}{-x}=\frac{۱۳}{۳}$$

چون در $x=-۳$، حد دارد پس حدچپ و حد راست برابرند.

$$-۳-b=\frac{۱۳}{۳} \Rightarrow -۳-\frac{۱۳}{۳}=b \Rightarrow -\frac{۲۲}{۳}=b$$

۱۰- دشوار

آ) $$\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)^۲}{(x^۲-۹)}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)^۲}{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)}{(x+۳)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

ب) $$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱۵}-۴}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱۵}-۴}{x-۱}$$

$$\times\frac{\sqrt{x+۱۵}+۴}{\sqrt{x+۱۵}+۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{x+۱۵-۱۶}{(x-۱)(\sqrt{x+۱۵}+۴)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x+۱۵}+۴)}=\frac{۱}{۸}$$

پ) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to \frac{\pi}{۳}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶(x-\frac{\pi}{۳})}=\frac{۱}{۶}$$

۱۱- دشوار

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} ۲x-a=۴-a$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} a^۲x^۲+۱=۴a^۲+۱$$

$$f(۲)=۴-a$$

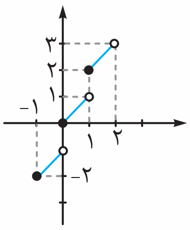
شرط پیوستگی $۴a^۲+۱=۴-a \Leftarrow ۴-a=۴a^۲ \Leftarrow ۴a^۲+a-۳=۰$

$$(۴a-۳)(a+۱)=۰$$

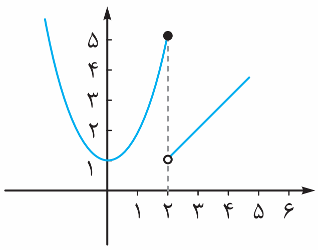
$$a=\frac{۳}{۴}, a=-۱$$

۱۲- متوسط

آ)



در نقاط صحیح $(n\in\mathbb{Z})$ ناپیوستگی دارد.



ب)

در $x=۲$ ناپیوستگی دارد.

۱۳- متوسط

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱} x^۳=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱}\frac{۱}{x}=-۱$$

$$f(-۱)=-۱$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم برابرند پس در $x=-۱$ پیوسته است.

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

۱- متوسط

آ) درست

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۴ \qquad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۴$$

ب) در تعریف حد مقدار حد چپ و راست مطرح است پس درست است.

ت) نادرست. $D_f: ۲-x\ge ۰ \Rightarrow ۲\ge x$ پس حد چپ وجود ندارد با توجه به دامنه تابع **f**.

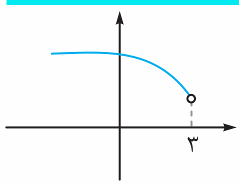
۲- دشوار

آ) یک

ب) نیست چون حد چپ و راست برابر نیستند.

پ) نیستند.

۳- آسان



۴- متوسط

$$۳x-۴<۵<\frac{x}{۲}+۷$$

$$۳x-۴<۵ \text{ و } ۵<\frac{x}{۲}+۷$$

$$۳x<۹ \text{ و } -۲<\frac{x}{۲}$$

$$x<۳ \text{ و } -۴<x$$

جواب: $-۴<x<۳$

۵- متوسط

آ) چون دامنهٔ **f** برابر $\mathbb{R}$ است پس همسایگی محذوف (-۱) تعریف شده است.

ب)
$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^+} x^۲-۲=-۱$$
$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^-} ۲x-۳=-۵$$

حد چپ و راست برابر نیست پس در $x=-۱$ دارای حد نیست.

پ) $f(-۱)=x^۲-۲=(-۱)^۲-۲=-۱$

۶- متوسط

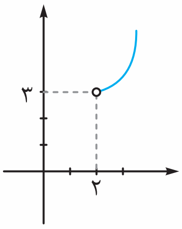
$$D_f \Rightarrow x^۲-۳x\ge ۰ \Rightarrow x(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۰\,,\,x=۳$$

x		۰		۳	
f	+		−		+

$D_f:(-\infty,۰)\cup(۳,+\infty)$

با توجه به دامنهٔ **f** حد چپ در $x=۳$ وجود ندارد پس در $x=۳$ تابع حد ندارد.

۷- متوسط



این تابع می‌تواند حد راست داشته باشد.

۸- متوسط

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]-۳}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-۳}{x-۱}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} ۲x-b=۴-b$$

چون دارای حد است پس حد چپ و راست باید برابر باشد پس:

$$۴-b=-۱ \Rightarrow \boxed{۵=b}$$

۹- آسان

چون تابع **g** در $x=a$ حد ندارد پس $f+g$ در $x=a$ دارای حد نخواهد بود.

۱۰- دشوار

آ) $$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲+x-۱}{۴x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{\cancel{(۲x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(۲x-۱)}(۲x+۱)}=\frac{\frac{۳}{۲}}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

ب) $$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}\,\cancel{(\sqrt{x}-۱)}}{\cancel{\sqrt{x}-۱}}=۱$$

پ) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin(\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})}{\sin^۲\frac{\pi}{۴}-\cos^۲\frac{\pi}{۴}}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-(\cos x)(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cancel{(\sin x-\cos x)}}{\cancel{(\sin x-\cos x)}(\sin x+\cos x)}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱- متوسط

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} [x]+a = ۱+a$$

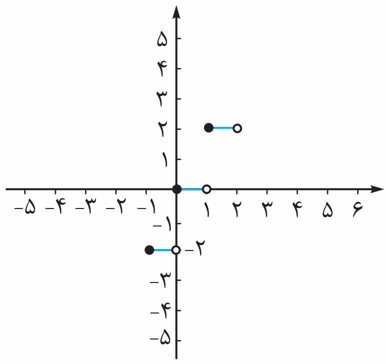
$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{(x-۱)}{(x-۱)(\sqrt{x}+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

اگر پیوسته باشد $۱+a = \frac{۱}{۲} = ۱+a$ پس $\boxed{a = -\frac{۱}{۲}}$

۱۲- دشوار

آ) $f(x) = [x]+[x] = ۲[x]$



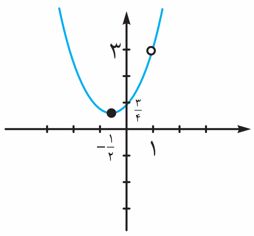
در نقاط صحیح ناپیوستگی دارد $(x \in \mathbb{Z})$

ب) $g(x) = \frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{(x-۱)} = x^۲+x+۱ \quad , \quad D_g : x \neq ۱$

$$g(x) = x^۲+x+۱$$

$$x_s = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱}{۲}$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{۴a} = \frac{-[۱-۴]}{۴} = \frac{۳}{۴}$$



۱۳- متوسط

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}} = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}} = ۲$$

$$f(۱) = ۱$$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر نیست پس در $x=۱$ پیوسته نیست.

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون تستی پایانی

۱- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{۵x^۲-۱۸x+۱۶} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۲-\sqrt[۳]{۳x+۲}}{(۵x-۸)(x-۲)} \times \frac{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}{۴+۲\sqrt[۳]{۳x+۲}+\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۸-(۳x+۲)}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{۸-۳x-۲}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۶-۳x}{(۵x-۸)(x-۲)(۱۲)}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۳\cancel{(۲-x)}}{(۵x-۸)\cancel{(x-۲)}(۱۲)} = \frac{-۳}{(۲)(۱۲)} = \frac{-۱}{۸}$$

روش دیگر حل این سؤال استفاده از قاعده هوپیتال است.

۲- گزینه «۳» متوسط

چون جواب بی‌نهایت شده است حتماً عدد ۲، ریشه مخرج بوده است.

همچنین چون به ازای $x=۲$ صورت کسر منفی می‌شود پس حتماً ریشه مضاعف مخرج بوده است پس:

$$(x-۲)^۲ = x^۲-۴x+۴ \Rightarrow a=-۴ , b=۴ \Rightarrow a+b=۰$$

۳- گزینه «۳» آسان

ابتدا شرط‌های تابع چند ضابطه‌ای را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & -۱<x<۱ \\ ax+b & x\geq ۱ \text{ یا } x\leq ۱ \end{cases}$$

پس در $x=۱$ و $x=-۱$ باید پیوسته باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = a+b \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = x = ۰ \\ f(۱) = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -۱^+} f(x) = -x = +۱ \\ \lim_{x\to -۱^-} f(x) = -a+b \\ f(-۱) = -a+b \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b=+۱$$

با حل دستگاه دو معادله داریم:

$$\begin{cases} a+b=۰ \\ -a+b=+۱ \end{cases}$$

$$۲b=۰ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲} , a=-\frac{۱}{۲}$$

۴- گزینه «۲» آسان

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sin^۲ \pi x}{[x]+\cos\pi x}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-\cos^۲\pi x}{۱+\cos\pi x}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(۱-\cos\pi x)\cancel{(۱+\cos\pi x)}}{\cancel{(۱+\cos\pi x)}}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}۱-\cos\pi=۲$$

۵- گزینه «۴» متوسط

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x-۲)}=\frac{۴}{۲}=۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{۲|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{-۲(x-۲)}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

$$f(۲)=۲$$

تابع پیوستگی راست دارد چون حد راست با مقدار تابع برابر است.

۶- گزینه «۱» آسان

تعریف پیوستگی چپ:

$$\lim_{x\to -۲^-}f(x)=f(-۲)$$

$$\lim_{x\to -۲^-}\frac{۸+x^۳}{|x+۲|}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{(۲+x)(۴-۲x+x^۲)}{-(x+۲)}=\frac{۱۲}{-۱}=-۱۲$$

$$f(-۲)=a$$

پس $a=-۱۲$

۷- گزینه «۱» آسان

$$x+۱<۳<۲x-۱$$

$$x+۱<۳ \quad \text{و} \quad ۳<۲x-۱$$

$$\boxed{x<۲} \quad \text{و} \quad ۴<۲x \Rightarrow \boxed{۲<x}$$

پس عددی که هم بزرگ‌تر و هم کوچک‌تر از ۲ باشد نداریم در نتیجه جواب $\varnothing$ است.

۸- گزینه «۳» آسان

پس در $x=۲$ نیز باید پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳\cancel{(x-۲)}(۴)}{\cancel{(x-۲)}(x+۱)}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

از هوپیتال برای رفع ابهام هم می‌تونستیم استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^-}ax-۱=۲a-۱$$

$$f(۲)=۲a-۱$$

شرط پیوستگی $۲a-۱=۴$

$$\Rightarrow ۲a=۵ \Rightarrow a=۲/۵$$

۹- گزینه «۳» متوسط

$$\lim_{x\to -۸}\frac{x^۲+۱۰x+۱۶}{۱۲+۶\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)(x+۸)}{۶(۲+\sqrt[۳]{x})}$$

$$\lim_{x\to -۸}\frac{(x+۲)\cancel{(۲+\sqrt[۳]{x})}(\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{۶\cancel{(۲+\sqrt[۳]{x})}}=\lim_{x\to -۸}\frac{(-۶)(۱۲)}{۶}=-۱۲$$

هوپیتال روش دیگر حل این سؤال است.

۱۰- گزینه «۴» آسان

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{\pm}}f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{\pm}}\frac{(۲\sin x+۱)(\sin x-۱)}{۱-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{\pm}}\frac{(۲\sin x+۱)\cancel{(\sin x-۱)}}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{\pm}}\frac{-(۲\sin x+۱)}{۱+\sin x}=\frac{-۳}{۲}=-۱/۵$$

$$f(\frac{\pi}{۲})=a=-۱/۵$$

۱۱- گزینه «۲» متوسط

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۷\sqrt{x}+۵}{۲x-\sqrt{۳x+۱}}\times\frac{۲x+۷\sqrt{x}+۵}{۲x+\sqrt{۳x+۱}}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(۲\sqrt{x}-۵)\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(۲x+\sqrt{۳x+۱})}{(۴x+۱)\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}$$

$$=\frac{(-۳)(۲+۲)}{(۵)(۲)}=\frac{-۱۲}{۱۰}=\frac{-۶}{۵}=-۱/۲$$

هوپیتال روش دیگر حل این سؤال است.

۱۲- گزینه «۳» آسان

$$\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}=\frac{[(-۲)^-]+۳}{(-۲)^-+۲}=\frac{۰\text{مطلق}}{۰^-}=۰$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

این سؤال در سال ۹۹ بحث‌برانگیز شد. ابتدا بدانیم که $x\in[-۲,۲]$ و در این بازه نقاط صحیح نقاط ناپیوستگی $[x]$ را تشکیل می‌دهند اما با توجه به $\sin\pi x$ کـه π در کمـان آن ضـرب شـده اسـت و $\sin -۲\pi$ و $\sin ۲\pi$ و $\sin -\pi$ و $\sin\pi$ همگی صفر هستند پس براکت در نقـاط صحیح صفـر مـی‌شـود و در نتیجه پیوسته است. اما در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه را به دلیل آنکه پیوستگی راست و پیوستگی چپ دارند نقاط ناپیوستگی بیان می‌کـند پـس بایـد گزینه ۲ جواب مسئله باشد اما سـازمان سـنجش سـال ۹۹ جـواب را گزینـه ۴ اعلام کرد و سرو ته بازه را پیوسته در نظر گرفت.

۱۴- گزینه «۱» — دشوار

ابتدا بازه‌های شرط را ساده کنید:

$-1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$

$x-1 \ge 1$ یا $x-1 \le -1$

$x \ge 2$ یا $x \le 0$

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x]; & 0<x<2\\ x^2+ax+b; & x\ge 2 \text{ یا } x\le 0\end{cases}$$

چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس باید در $x=0$ و $x=2$ نیز پیوسته باشد پس:

$$\lim_{x\to 2^+} x^2+ax+b = 4+2a+b$$
$$\lim_{x\to 2^-} (x-1)(1)=1$$
$$f(2)=4+2a+b$$
$$2a+b+4=1 \Rightarrow \boxed{2a+b=-3}$$

و

$$\lim_{x\to 0^+} (x-1)(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} 0+0+b=b$$
$$f(0)=0+0+b$$
$$\boxed{b=0} \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۱۵- گزینه «۲» — دشوار

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\left[-\frac{2}{x^2}\right]=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\left[\frac{-2}{(\frac{1}{4})^-}\right]=[-8^+]=-9$$

$$\lim_{x\to (-\frac{1}{2})^+}\left[\frac{2}{x^2}\right]=\lim\left[\frac{3}{(\frac{1}{4})^-}\right]=[12^+]=12$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\frac{16x+9}{24x+12}=\frac{1}{(-12)^+ +12}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

۱۶- گزینه «۱» — دشوار

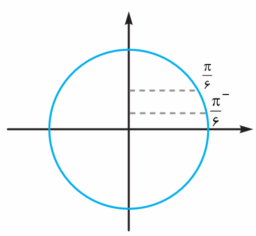
$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[3\times(4)^-]}{16x-[-2\times 4^-]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+[12^-]}{16x-[(-8)^+]}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{10x-5+11}{16x-(-8)}$$

$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})}\frac{10x+6}{16x+8}=\frac{-5+6}{(-8)^- +8}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

۱۷- گزینه «۱» — متوسط

از روی دایره مثلثاتی داریم:



پس:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{6})^-}\left[2\sin\frac{\pi}{6}^- -1\right]=\left[2(\frac{1}{2})^{-1}-1\right]=[0/8]-1=-1$$

۱۸- گزینه «۳» — دشوار

f معادله سهمی: $y=a(x-x_S)^2+y_S \Rightarrow 0=a(0-2)^2+1$

$0=4a+1 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$

$f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1$

g معادله خط: نقطه $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ نقطه $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+1$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x-2)^2+1+-\frac{1}{4}x+1}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2+x-1+1-\frac{1}{4}x+1}{4-x}$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+1}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\frac{1}{4}(x+1)(x-4)}{4-x}=+\frac{1}{4}(x+1)=\frac{5}{4}$$

۱۹- گزینه «۴» — متوسط

ابتدا تکلیف قدرمطلق و براکت‌ها را مشخص می‌کنیم:

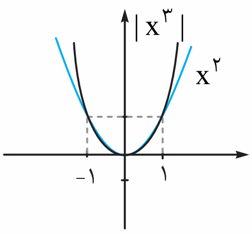
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)+(-1)}{x-0}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1-1}{x}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x}=1$$

۲۰- گزینه «۳» — دشوار

ابتدا $|x^3|=x^2$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$x^2|x|=x^2 \Rightarrow x^2|x|-x^2=0 \Rightarrow x^2(|x|-1)=0 \Rightarrow x=0,1,-1$$

همچنین با توجه به نکته رسم $|x^3|$ و رسم x^2 داریم:



$$f(x)=\begin{cases}|x|+[-x]; & x\in(-1,1)-\{0\}\\ 1+\cos\pi x; & x=0,1,-1\\ [x^2]-[x]; & x<-1 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

ضابطه سوم در تمام **x**های منفی و همچنین تمام **x**هایی که در آن x^2 صحیح و **x** غیرصحیح است ناپیوسته است پس این تابع در بیشمار نقطه ناپیوسته است.

پاسخنامه
سؤالات تستی
آزمون پلاس

۱- گزینه «۱»

چون در پیوستگی حد چپ و راست باید برابر باشند پس باید **a** ریشه مضاعف زیر رادیکال و همچنین **a** باید ریشه مخرج کسر باشد.

$$\Delta=0 \Rightarrow (m-1)^2-4(3)(m-4)=0$$
$$\Rightarrow m^2-2m+1-12m+48=0$$
$$\Rightarrow m^2-14m+49=0$$
$$(m-7)^2=0 \Rightarrow \boxed{m=7}$$

ریشه مخرج a $\Rightarrow a^3+a^2=0 \Rightarrow a^2(a+1)=0 \Rightarrow a=0, a=-1$

$$\lim_{x\to(-1)^{\pm}} \frac{\sqrt{3x^2+6x+3}}{|x^3+1|}=\lim_{x\to(-1)^{\pm}} \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+1}}{|x^3+1|}$$
$$=\lim_{x\to(-1)^{\pm}} \frac{\sqrt{3}\,\cancel{|x+1|}}{\cancel{|x+1|}\,|x^2-x+1|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$f(-1)=\frac{2\sin b}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b=\frac{\pi}{3}$$

۲- گزینه «۱»

a باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد پس $\Delta=0$ است.

$$\Delta=0 \Rightarrow (m+3)^2-4(3m)=0 \Rightarrow m^2+6m+9-12m=0$$
$$\Rightarrow m^2-6m+9=0 \Rightarrow (m-3)^2=0 \Rightarrow m=3$$
$$\lim_{x\to a^{\pm}} \frac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+a^2|}$$

همچنین حتماً **a** ریشه مخرج نیز بوده است پس:

$$2a^3+a^2=0 \Rightarrow a^2(2a+1)=0 \Rightarrow a=0, a=-\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to a^{\pm}} \frac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{|2x^3+\frac{1}{4}|}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^{\pm}} \frac{\sqrt{6}\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}{2|x^3+\frac{1}{8}|}$$
$$=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^{\pm}} \frac{\sqrt{6}|x+\frac{1}{2}|}{2|x+\frac{1}{2}||x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}|}$$
$$\lim \frac{\sqrt{6}}{2|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$
$$f(-1)=\frac{2\tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2}\tan b=\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan b=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b=\frac{\pi}{6}$$

۳- گزینه «۴»

با کمی دقت متوجه می‌شویم که $x=1$ ریشه صورت است پس حتماً مخرج نیز بوده است.

$$a+b=0 \Rightarrow a=-b$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}-b}{-bx+b}\times\frac{b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+b}{b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}+b}=\frac{b^2(2-\sqrt[3]{x})-b^2}{(-bx+b)(2b)}$$
$$=\frac{b^2[(2-\sqrt[3]{x}-1)]}{(-b)(x-1)(2b)}=\frac{(b^2)(1-\sqrt[3]{x})}{(-2b^2)(x-1)}$$
$$\frac{b^2\,\cancel{(1-\sqrt[3]{x})}\,-1}{(-2b^2)\,\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}\,(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{-b^2}{(-2b^2)(3)}=\frac{-b^2}{-6b^2}=\frac{1}{6}$$

از قاعده هوپیتال این سؤال راحت‌تر رفع ابهام می‌شود.

۴- گزینه «۴»

نظر شخصی بنده این هست که با توجه به زمان محدود کنکور چنین سؤالاتی را رد کنید!

n فرد $\Rightarrow [n^+]=n$ فرد و $[n^-]=n-1$ زوج $[-n^+]=-n$ و $[-n^-]=-n-1$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to n^+} |[-x]-x|=|(-n-1)-n|=2n+1\\&\lim_{x\to n^-} k-x+[x]=k-n+n-1=k-1\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow 2n+1=k-1 \Rightarrow k=2n+2$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -n^+} |[-x]-x|=|(n-1)+n|=2n-1\\&\lim_{x\to -n^-} k-x+[x]=k+n+(-n-1)=k-1\end{aligned}\right\}$$
$$\Rightarrow 2n-1=k-1 \Rightarrow k=2n$$

n زوج $\Rightarrow [n^+]=n$ زوج و $[n^-]=n-1$ فرد و $[-n^+]$
$=-n$ فرد و $[-n^-]=-n-1$ زوج

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to n^-} |[-x]-x|=|-n-n|=2n\\&\lim_{x\to n^+} k-x+[x]=k-n+n=k\end{aligned}\right\} \Rightarrow k=2n$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -n^+} k-x+[x]=\underset{k+n-n-1}{k+n-n}=k\\&\lim_{x\to -n^-} |[-x]-x|=\underset{-n-n}{n-1+n}=2n-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow k=2n-1$$

پس در **n** فرد نمی‌تونه پیوسته باشد.

۵- گزینه «۲»

مشابه حل این سؤال را در تست ۴ نوشته‌ایم. حل دیگری از این تیپ سؤال را بررسی کنیم. می‌توان سؤال را برای $n=۱$ و $n=۲$ بررسی کنیم یعنی پیوستگی در ±۱ و پیوستگی در ±۲ بررسی می‌کنیم.

$$x=۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)=۱-۱+k=k \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}|x-[x]|=۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}|x-[x]|=۲$$

به ازای $k=۲$ مقادیر فرد قابل قبول‌اند

$$x=-۱ \Rightarrow \begin{matrix} \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=f(-۱)=k \\ \lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-}|x-[x]|=۲ \end{matrix}$$

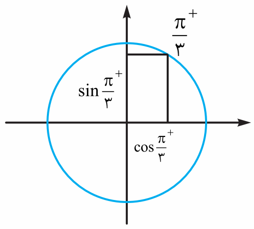
$$x=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۵\,,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۱+k\,,\, f(۲)=۲-(-۲)=۴$$

به ازای هیچ مقدار زوج پیوستگی نداریم.

۶- گزینه «۴»

اگر جواب کسری ∞ شود به آن معناست که مخرج صفر حدی بوده است پس $\frac{\pi}{۳}$ ریشه مخرج است.

$$a\cos\frac{\pi}{۳}-\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}a-\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a=\sqrt{۳}$$



همچنین عبارت مخرج $\sqrt{۳}\cos x-\sin x$ در $\frac{\pi}{۳}^+$ با توجه به دایره مثلثاتی صفر کمتر ایجاد می‌کند در نتیجه:

$$\sqrt{۳}\cos x-\sin x<۰ \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^+}\frac{\sqrt{۳}x+b}{۰^-}=-\infty \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi+b}{۰^-}=-\infty$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi+b>۰ \Rightarrow b>\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi\cong -۱/۸ \Rightarrow b>-۱/۸$$

پس کمترین مقدار صحیح آن (-۱) است.

۷- گزینه «۱»

با توجه به بازهٔ $[۱,۵]$ حتماً تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد پس:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x^۲+x-۲|}{a(۱-x)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{|(x-۱)(x+۲)|}{a(۱-x)}$$
$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۲)}{a(۱-x)}=\frac{۳}{-a}$$
$$f(۱)=\tan\frac{۳\pi}{۴}=-۱$$

در نتیجه: $\frac{۳}{-a}=-۱ \Rightarrow \boxed{a=۳}$

همچنین این تابع در $x=۵$ پیوستگی چپ دارد پس:

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x)=\lim_{x\to ۵^-}\frac{|(x-۱)(x+۲)|}{a(۱-x)}=\frac{۲۸}{-۱۲}=\frac{۷}{-۳}$$
$$f(۵)=b(۵-[-۵])=b(۱۰)=۱۰b \Rightarrow ۱۰b=-\frac{۷}{۳} \Rightarrow b=-\frac{۷}{۳۰}$$

در نتیجه: $ab=۳\times-\frac{۷}{۳۰}=-۰/۷$

۸- گزینه «۱»

تابع f در $x=۱$ ناپیوسته است چون مقدار تابع در $x=۱$ وجود ندارد پس $x=۱$ ریشه صورت کسر هم بوده است که ابهام اتفاق افتاده است در نتیجه:

$$x=۱ \Rightarrow ۱+a+b=۰ \Rightarrow \boxed{a+b=-۱}$$

همچنین چون سؤال گفته $x=۱$ ریشهٔ $۵-a+b=۰$ است در نتیجه $\boxed{۵=a-b}$

از حل دستگاه دو معادله خواهیم داشت $a=۲$ و $b=-۳$ پس:

$$[\frac{-۳-۴}{۳}]=[-\frac{۷}{۳}]=[-۲/۰۰]=-۳$$

۹- گزینه «۱»

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱-\tan^۲x}{\sqrt{۱+\sin ۲x}}$$

$$\xrightarrow[x=t+\frac{۳\pi}{۴}]{x-\frac{۳\pi}{۴}=t\ \text{تغییر متغیر}}\lim_{t\to ۰^-}\frac{۱-\tan^۲(t+\frac{۳\pi}{۴})}{\sqrt{۱+\sin ۲(t+\frac{۳\pi}{۴})}}$$

با استفاده از اتحادها
$$\lim_{t\to ۰^-}\frac{\frac{\cos ۲(t+\frac{۳\pi}{۴})}{\cos^۲(t+\frac{۳\pi}{۴})}}{\sqrt{۱+\sin(۲t+\frac{۳\pi}{۲})}}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\frac{\cos(۲t+\frac{۳\pi}{۲})}{\cos^۲(t+\frac{۳\pi}{۴})}}{\sqrt{۱-\cos ۲t}}$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\frac{\sin ۲t}{\frac{۱}{۲}(۱-\sin ۲t)}}{\sqrt{۲\sin^۲t}}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\frac{\sin ۲t}{\frac{۱}{۲}(۱-\sin ۲t)}}{\sqrt{۲}|\sin t|}$$

$$=\lim_{t\to ۰^-}\frac{\sin ۲t}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin t}=\lim_{t\to ۰^-}\frac{۲\cancel{\sin t}\cos t}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cancel{\sin t}}=-\frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

$$-\frac{۴}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=-\frac{۴\sqrt{۲}}{۲}=-۲\sqrt{۲}$$

۱۰- گزینه «۱»

$\lim\limits_{x\to 1}(1-\sqrt{x})\tan\frac{\pi x}{2}=0\times\infty$ حالتی از ابهام است

$$\lim_{x\to 1}(1-\sqrt{x})\frac{(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}\frac{1}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}\times\frac{1}{\cot\frac{\pi x}{2}}$$

$$\xrightarrow[\text{صفر صفر حل می‌کنیم}]{\text{حال رفع ابهام}} x-1=t \Rightarrow x=t+1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{-t}{1+\sqrt{t+1}}\times\frac{1}{\cot\frac{\pi}{2}(t+1)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2}\times\frac{1}{\underbrace{\cot(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2})}_{-\tan\frac{\pi}{2}t}}=\frac{\cancel{-}\cancel{t}}{\cancel{2}(\cancel{-}\frac{\pi}{\cancel{2}}\cancel{t})}=\frac{1}{\pi}$$

۱۱- گزینه «۳»

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{a-2}{4+2}=\frac{a-2}{6}$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\frac{a-1}{4+1}=\frac{a-1}{5}$$

$$f(2)=\frac{a-2}{6}$$

به دلیل پیوستگی $\frac{a-2}{6}=\frac{a-1}{5}$

$$5a-10=6a-6 \Rightarrow -4=a$$

۱۲- گزینه «۴»

$x=-1$ ریشه صورت است پس:

$$\sqrt{-a+b}+-1=0$$

$$\sqrt{-a+b}=1 \Rightarrow -a+b=1$$

با استفاده از رفع ابهام داریم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{ax+b}+x}{\sqrt{-x}-x^2}\times\frac{\sqrt{ax+b}-x}{\sqrt{ax+b}-x}\times\frac{\sqrt{-x}+x^2}{\sqrt{-x}+x^2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(ax+b-x^2)(2)}{[(-x)-x^4](2)}=\lim_{x\to -1}\frac{-x^2+ax+b}{-x-x^4}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(-x+1+a)}{-x\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{2+a}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow a=2\,,\,b=3$$

$$a-2b=2-6=-4$$

۱۳- گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 3^+}x-[x]+a\sin\frac{\pi[x]}{2}=3-3+a\sin\frac{3\pi}{2}=-a$$

$$\lim_{x\to 3^-}x-[x]+a\sin\frac{\pi[x]}{2}=3-2+a\sin\pi=1$$

$$f(3)=3-3+a\sin\frac{3\pi}{2}=-a$$

$$a=-1$$

۱۴- گزینه «۲»

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}a\log_2^{x+1}=2a$$

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}ax+2^{x-3}=3a+2^0=3a+1$$

$$f(3)=a$$

بنا به تعریف پیوستگی $3a+1=2a$

$$a=-1$$

$$f(2)=-1x+2^{x-3}=-2+2^{-1}=-2+\frac{1}{2}=-1/5$$

۱۵- گزینه «۴»

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{x^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x})}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\pi(x-2)}{2x}}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\pi}{2x\,(x+2)}=\frac{\pi}{16}$$

۱۶- گزینه «۲»

$$\lim_{x\to\pi^+}[\frac{2}{2\cos x+3}]=\lim_{x\to\pi^+}[\frac{2}{2(-1^-)+3}]=2$$

$$\lim_{x\to\pi^-}[\frac{2}{2\cos x+3}]=\lim_{x\to\pi^-}[\frac{2}{2(-1^-)+3}]=2$$

۱۷- گزینه «۱»

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x(x-1)}+\frac{2}{x(x+2)}=b \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{ax+2a+2x-2}{x(x-1)(x+2)}=b$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+2)x+2a-2}{x(x-1)(x+2)}=b$$

چون $x=0$ ریشه مخرج است حتماً ریشه صورت نیز بوده است پس:

$$2a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x-1)(x+2)}=\frac{3}{(-1)(2)}=\boxed{-\frac{3}{2}=b}$$

$$a+b=1+(-\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه «۱»

$$\lim_{x\to -2^+}(4x+a^3)[3x]=(-8+a^3)(-6)=48-6a^3$$

$$\lim_{x\to -2^-}(4x+a^3)[3x]=(-8+a^3)(-7)=56-7a^3$$

$$f(-2)=(-8+a^3)(-6)=48-6a^3$$

بنابه شرط پیوستگی:

$$48-6a^3=56-7a^3$$

$$a^3=8 \Rightarrow a=2$$

۱۹-گزینه «۳»

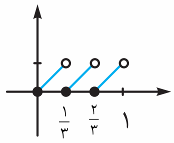
$f(۳) = ۶ \Rightarrow ۲a - b = ۶$

$$\lim_{x \to ۳^{\pm}} f(x) = ۵ \Rightarrow \lim_{x \to ۳^{\pm}} \frac{a\cancel{(x-۳)}(x+۲)}{\cancel{(۳-x)}} = -a(۵) = ۵ \Rightarrow a = -۱$$

پس $-۸ = b \Leftarrow ۲(-۱) = -b = ۶$

۲۰- گزینه «۲»

با تمودار $[۳x] - ۳x$ آشنا هستیم:



پس نقاط ناپیوستگی آن در $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ است.

همچنین نقاط سر و ته بازه را کتاب درسی نقطه ناپیوستگی در نظر می‌گیرد پس به گفته کتاب ۴ نقطه