

$$|y| = x^2 + x + 1$$

حالا به جای x اگر عدد صفر رو قرار بدیم داریم:

$$x = 0 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

به ازای یک مقدار x دو مقدار برای y داریم پس این رابطه تابع نیست.

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + \frac{5}{4+1} = 0$$

برای بررسی روابطی به این شکل ابتدا سعی کن با مربع کامل کردن عبارت‌ها به فرم مناسبی برسی:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 0 \Rightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 0$$

دو عبارت نامنفی (توان ۲) با هم جمع شده و مساوی صفر شده‌اند پس لازم است هر دو صفر شوند یعنی $x = -2$ و $y = -1$ یعنی نقطه $(-2, -1)$ و می‌دانیم نقطه تابع است پس این رابطه تابع است.

پس حواست به این نکته باشه: رابط $R^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ ، نمایشگر یک دایره با مرکز (α, β) و شعاع R است. بنابراین تابع نیست مگر این که $R = 0$.

$$|y| = x - x^2 + 1 = 0$$

با توجه به این که y درون قدرمطلق هست، حدس می‌زنیم رابطه تابع نباشد.

$$1+x = x^2 |y| \xrightarrow{x=1} 2 = |y| \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$(x-1)(y+5) = 0$$

ضرب دو پراکنش صفر شده، معنی آن این هست که حداقل یکی از پراکنش‌ها صفر هست پس $x = 1$ یا $y = -5$. در حالتی که $x = 1$ باشد می‌توان مقادیر مختلفی برای y در نظر گرفت پس تابع نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 1 \\ 2x + 5 & x \leq 1 \end{cases}$$

روابط چند ضابطه‌ای در صورتی تابع هستند که دامنه هر ضابطه، اشتراکی نداشته باشند یا اگر عددی در هر دو بازه وجود دارد، مقدار رابطه از هر دو ضابطه یکی باشد.

توی این رابطه، عدد ۱ در هر دو بازه وجود دارد پس مقداردهی را انجام می‌دهیم:

$$1^2 - 3(1) = -2, \quad 2(1) + 5 = 7, \quad -2 \neq 7$$

پس این رابطه تابع نیست.

$$|x| + |y-1| = 0$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده، پس لازمه هر دو عبارت صفر باشند:

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$|y-1| = 0 \Rightarrow y = 1$$

پس باز هم به نقطه $(0, 1)$ رسیدیم که تابع هست.



آسان

وقتی می‌نویسیم: $f: A \rightarrow B$ یعنی تابع f از مجموعه A به مجموعه B تعریف شده است. مجموعه A رو دامنه و مجموعه B رو هم‌دامنه می‌نامیم که B ممکن هست برد هم باشه. (برد زیر مجموعه هم دامنه است).

توی این تابع، دامنه $D = [-1, 2]$ هست و هم‌دامنه $\mathbb{R}$ هست و ما می‌دونیم برای $y = x^2$ ، برد همه اعداد نامنفی هست یعنی $R = [0, +\infty)$ پس هر مجموعه‌ای که شامل برد باشه قابل قبول هست. از طرفی برای $x \in [-1, 2]$ داریم: $R = [0, 4]$

پس موارد «ب» و «ت» قابل قبول هستند زیرا دامنه‌ها برابر هستند و برد را شامل می‌شوند.

آسان

با توجه به نمودار تابع f ، دامنه $[-2, 1]$ است و برد $[-1, 1]$.

پس تابعی قابل قبول است که دامنه $[-2, 1]$ باشد و با حفظ ضابطه، بر آن شامل $[-1, 1]$ باشد. (مفهوم هم‌دامنه)
پس فقط مورد «ت» قابل قبول است.

دشوار

برای تشخیص تابع بودن از روی ضابطه، به نکته‌های زیر توجه کن:

۱) اگر y داخل قدرمطلق باشه یا توان زوج داشته باشه، شک کن که احتمالاً تابع نباشه ولی با اطمینان نمی‌تونی بگی حتماً تابع نیست یا دت باشه حالت‌های خاص و استثنا وجود دارند.

۲) برای اطمینان از تابع نبودن، دنبال عددی بگرد که اگر به جای x قرار بدی، دو مقدار برای y به دست بیاری و این خودش میشه مثال نقض برای اثبات تابع نبودن!

$$\bar{A}y = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2-4}$$

همان طوری که می‌بینی، y یک طرف تنه‌است و سمت راست عبارتی برحسب x پس تابع هست. (به دانشش فکر کن!)

$$|y| - x^2 - x - 1 = 0$$

شک می‌کنیم که احتمالاً تابع نباشه اما بیا $|y|$ رو تنها کنیم:

متوسط

-۷

دو تابع f و g رو مساوی می‌نامیم اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$1) D_f = D_g \quad f(x) = g(x) \text{ به ازای } x \text{ های برابر}$$

شرط اول می‌گه دامنه‌ها برابر باشند. شرط دوم می‌گه به ازای x های متعلق به دامنه مشترک مقدار f و g (بُرد) مساوی باشند.

$$2) D_f : \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$$

$$D_g : x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \cap x+3 > 0$$

$$\Rightarrow x > -3$$

$$\Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

شرط اول برقرار نیست پس f و g مساوی نیستند. (و دیگه لازم نیست شرط دوم رو چک کنیم)

$$3) D_f : (x=4) \cup (x \neq 4) = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}$$

پس شرط اول برقرار هست. ✓

توی این قسمت، چون تابع f دوضابطه‌ای هست پس هر دو بازه رو جداگانه در نظر می‌گیریم:

$$x \neq 4 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4 = g(x)$$

$$x:4 \Rightarrow f(4)=2 \text{ و } g(4)=4+4=8$$

پس به ازای $x=4$ مقدار f و g مساوی نیستند پس توابع f و g مساوی نیستند.

ب)

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} \text{ (زیر رادیکال همواره مثبت و مخرج همواره مخالف صفر)} \\ D_g = \mathbb{R} \text{ (زیر رادیکال همواره مثبت)} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = D_g \quad \checkmark$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2+\sqrt{4+x^2}} \times \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{\sqrt{4+x^2}-2} = \frac{x^2(\sqrt{4+x^2}-2)}{4+x^2-4} \\ = \sqrt{4+x^2}-2 = g(x)$$

پس f و g مساوی‌اند.

$$4) D_f : x^2-2x \geq 0 \Rightarrow x(x-2) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & 0 & 2 & \\ \hline & + & - & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

$$D_g : x \geq 0 \cap x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

دامنه f و g مساوی نیستند پس توابع f و g مساوی نیستند.

ت)

$$\left. \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} \text{ (مخرج مخالف صفر)} \\ D_g = \mathbb{R} \text{ (چند جمله‌ای)} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = \frac{5x^2-10}{5} = \frac{5(x^2-2)}{5} = x^2-2 = g(x)$$

ضابطه دو تابع هم مساوی هستند پس هر دو شرط برقرار است و بنابراین توابع f و g مساوی‌اند.

متوسط

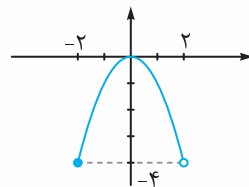
-۴

برای تشخیص بُرد تابع‌های درجه دوم باید حواست به رأس سهمی باشه. که اگر طول رأس سهمی درون بازه باشه، حتماً مقدار عرض اون رو حساب کنیم:

$$y = -x^2 \quad x_A = -\frac{b}{2a} = 0 \xrightarrow[\text{هست}]{\text{توی بازه}} y_A = -(0)^2 = 0 \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -2 & 0 & 2 \\ \hline -x^2 & -4 & 0 & -4 \end{array} \Rightarrow R = [-4, 0]$$

روش دوم: به کمک نمودار



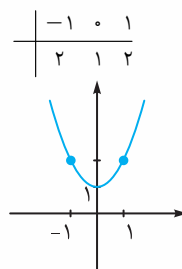
آسان

-۵

آ) اگر عدد حقیقی را x در نظر بگیریم، تابع g ابتدا x را به x^2 تبدیل می‌کنه و سپس به x^2+1 پس:

$$g(x) = x^2 + 1$$

برای رسم می‌تونیم از نقطه‌یابی استفاده کنیم:



ب) از روی نمودار، بخش‌هایی از محور y که توسط نمودار پوشیده شده رو بر می‌داریم:

$$R = [1, +\infty)$$

پ) هم‌دامنه، هر مجموعه‌ای است که شامل بُرد باشد پس مثلاً $[0, +\infty)$ یا $\mathbb{R}$ می‌توانند هم‌دامنه باشند.

متوسط

-۶

برای تشخیص ضابطه‌ای تابع بیا چند مقدار از تابع را ببینیم:

t	۵	۱۰	۱۵	۲۰
h	۱	۲	۳	۴

با مقایسه مقادیر h (فاصله طی شده) با زمان t متوجه می‌شویم که مقادیر h از تقسیم t بر ۵ به دست می‌آیند مثلاً: $3 = 15 \div 5$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$h(t) = \frac{t}{5}$$

که واحد t ثانیه و واحد h کیلومتر است.

اگر $t \in [2, 10]$ ، چون تابع h خطی هست برای محاسبه بُرد کافیست ابتدا و انتهای دامنه رو در h جاگذاری کنیم:

$$h(2) = \frac{2}{5} = 0.4 \text{ km}$$

$$h(10) = \frac{10}{5} = 2 \text{ km}$$

پس بُرد به صورت $[0.4, 2]$ است.



بخش ۱

آسان

۱- گزینه «ا»

گفتیم چند ضابطه‌ای‌ها در صورتی تابع اند که مقدار هر ضابطه به ازای x ‌های یکسان یکی باشد پس:

$$x=0 \Rightarrow -2b=-a \Rightarrow 2b=a$$

$$x=2 \Rightarrow 8-a=1 \Rightarrow 8-1=a \Rightarrow \boxed{a=7} \Rightarrow 2b=7 \Rightarrow \boxed{b=\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{\frac{7}{2}} = 2$$

متوسط

۲- گزینه «ا»

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+2} & x \leq -1 \cup x \geq 1 \\ \frac{x^2-ax+b}{x-2} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$x=-1 \Rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{1+a+b}{-3} \Rightarrow a+b+1=2 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

$$x=1 \Rightarrow 0 = \frac{1-a+b}{-1} \Rightarrow 1-a+b=0 \Rightarrow \boxed{-a+b=-1}$$

پس از حل دستگاه داریم: $a=1$ و $b=0$ پس $ab=0$.

متوسط

۳- گزینه «پ»

همان طوری که می‌دونیم در زوج مرتب اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، الزاماً باید مؤلفه‌های دوم هم یکسان باشند پس:

$$\begin{cases} (3, m^2) \\ (3, m+2) \end{cases} \Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1, 2$$

چون در مؤلفه‌های اول m داریم پس جاگذاری می‌کنیم:

$$m=-1 \Rightarrow f = \{(3, 1), (2, 1), (-2, -1), (-1, 4)\}$$

تابع هست پس $m=-1$ قابل قبول است و گزینه ۲ درست است. اما چرا $m=2$ جواب نیست؟

$$m=2 \Rightarrow f = \{(3, 4), (2, 1), (-2, 2), (2, 4)\}$$

برای $x=2$ دو مقدار برای y داریم پس f تابع نمی‌شود.

آسان

-۸

دو تابع f و g دارای دامنه برابر هستند پس در صورتی مساوی می‌شوند که مقادیر f و g به ازای $x \in \mathbb{R}$ نیز مساوی شود:

$$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x) \quad \checkmark$$

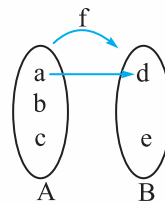
$$x=1 \Rightarrow g(1) = f(1)$$

$$-a+3=2 \Rightarrow a=1$$

دشوار

-۹

می‌دونیم رابطه‌ای تابع هست که به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y داشته باشیم پس طبق نمودار روبه‌رو، از a می‌تونیم فقط به یکی از اعضای B پیکان وصل کنیم و بنابراین دو انتخاب برای a وجود داره.



به همین ترتیب برای b و c هم دو انتخاب وجود داره (محدودیت ورود پیکان نداریم).

پس $2 \times 2 \times 2$ یعنی 2^3 تابع مختلف و غیرتهی از A به B وجود دارد.

به طور کلی اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد تعداد توابع ناتهی از A به B برابر m^n است. توابع این سؤال رو ببینیم:

$$(1) f = \{(a, e), (b, e), (c, e)\}$$

$$(2) f = \{(a, e), (b, e), (c, d)\}$$

$$(3) f = \{(a, e), (b, d), (c, e)\}$$

$$(4) f = \{(a, e), (b, d), (c, d)\}$$

$$(5) f = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$$

$$(6) f = \{(a, d), (b, d), (c, e)\}$$

$$(7) f = \{(a, d), (b, e), (c, d)\}$$

$$(8) f = \{(a, d), (b, e), (c, e)\}$$

به ترتیب نوشتن زوج مرتب‌ها دقت کن!

دشوار

-۱۰

$$1) D = [-4, +\infty) \Rightarrow x \geq -4$$

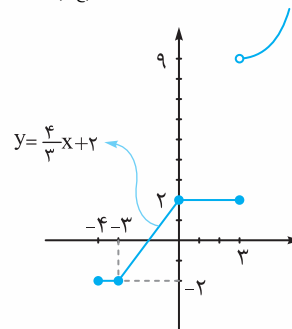
$$b) 0 \leq x \leq 3 \Rightarrow f \text{ ثابت}$$

$$پ) \forall x > 3; f(x) = x^2$$

$$ت) -3 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$$

$$ث) \underbrace{f(3)=2, f(-3)=-2}_{\text{تابع ثابت}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2 & -4 \leq x < -3 \\ \frac{4}{3}x + 2 & -3 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 & x > 3 \end{cases}$$



$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$y = ax + 2 \quad \begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow a = +\frac{4}{3}$$

۸- گزینه «۴»

متوسط

$$D_f: -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$$

پس گزینه‌های ۲ و ۳ رد هستند.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x}} \times \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = \frac{x\sqrt{-x}}{\cancel{\sqrt{-x}}} = -\sqrt{-x}$$

که البته با توجه به این که $f(-1) = -1$ ، تنها گزینه ۴ درست هست.

۹- گزینه «۲»

متوسط

بررسی گزینه‌ها:

$$1) x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$2) y \text{ به صورت عبارتی بر حسب } x \text{ هست پس تابع است}$$

زیرا به ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

$$3) x = 1 \Rightarrow |y+2| = 2 \Rightarrow y = 0, -4 \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$4) x = 1 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \text{تابع نیست.}$$

۱۰- گزینه «۲»

دشوار

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-x^2} & D_f = [0, 1] \\ g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} & D_g = [0, 1] \end{cases} \quad f(x) = g(x) \Rightarrow \text{f و g مساوی}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \\ g(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{f و g مساوی}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \Rightarrow D_f = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty) \\ g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow D_g = (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x$$

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{x^2-1} & D_f = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty) = D_g \\ g(x) = \sqrt{x^4-x^2} & g(x) = |x|\sqrt{x^2-1} \neq f(x) \end{cases} \Rightarrow x$$

۱۱- گزینه «۲»

آسان

نمایشی قابل قبول است که دامنه همان $[0, \frac{1}{3}]$ باشد و هم دامنه، شامل برد

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \Rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{باشد و ضابطه تابع به صورت } f(x) = x^2 \text{ حفظ شود پس:}$$

$$\text{و } \begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \Rightarrow [0, +\infty) \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{هر دو قابل قبول اند.}$$

۱۲- گزینه «۲»

آسان

مجموعه A دارای ۲ عضو و مجموعه B دارای ۳ عضو است پس تعداد توابع از

A به B برابر 3^2 یعنی ۹ است.

۱۳- گزینه «۲»

متوسط

$$x = -1 \Rightarrow 1 + a = \frac{-1+2}{1} \Rightarrow 1 + a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq -1 \\ \frac{x^3 - 3x}{x+2} & x \leq -1 \end{cases}$$

برخورد با محور x یعنی $y = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (1) x \geq -1: \quad x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد.}$$

$$(2) x \leq -1 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x}{x+2} = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, -\sqrt{3}, +\sqrt{3}$$

با توجه به دامنه $(x \leq -1)$ ، فقط $x = -\sqrt{3}$ قابل قبول است.

۱۴- گزینه «۱»

متوسط

$$1) D_f: \lambda x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \lambda \Rightarrow D_f = [0, \lambda] \Rightarrow D_f = D_g \checkmark$$

$$D_g: (x \geq 0) \cap (\lambda - x \geq 0) \cap (x \leq \lambda) \Rightarrow D_g = [0, \lambda]$$

$$g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\lambda - x} = \sqrt{x(\lambda - x)} = f(x) \checkmark \Rightarrow \text{f و g مساویند}$$

$$2) D_f: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0, D_g: -x^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \checkmark$$

$$g(x) = \sqrt{-x^2} = \sqrt{-x^2} \times x = |x| \sqrt{-x} \neq f(x) \Rightarrow \text{مساوی نیستند}$$

$$3) f(4) = 3, g(4) = 8 \Rightarrow \text{مساوی نیستند}$$

$$4) D_f: (-\infty, -3] \cup (1, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow \text{مساوی نیستند}$$

$$D_g: (1, +\infty)$$

$$\text{دو تابع } f(x) = \sqrt{(ax+b)(cx+d)} \text{ یا } g(x) = \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}} \text{ و } f(x) = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\text{و } g(x) = \sqrt{ax+b} \times \sqrt{cx+d} \text{ در صورتی با هم برابرند که } ac < 0$$

۱۵- گزینه «۳»

دشوار

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

تابع g کسری هست با مخرج درجه ۲ که با توجه به این که دامنه آن فقط یک

عدد حذف شده پس عدد ۲ ریشه مضاعف مخرج بوده و مخرج به صورت

$$k(x-2)^2 \text{ هست با مقایسه مخرج با این عبارت } k=1 \text{ هست و}$$

$$x^2 + bx + c = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-4}, \boxed{c=4}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} = f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow a+c=2+4=6$$

۱۶- گزینه «۱»

دشوار

$$x=2 \Rightarrow f(2)=g(2) \Rightarrow b=2+c$$

$$x \neq 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x + a}{x-2} = x + c \Rightarrow x^2 - 5x + a = x^2 + (c-2)x - 2c$$

$$c-2=-5 \Rightarrow \boxed{c=-3}, a=-2c \Rightarrow \boxed{a=6}$$

$$b=2+(-3)=-1$$

$$abc = 6 \times (-1) \times (-3) = 18$$

آسان

۱۶- گزینه «۱»

$$M(38) = 2/89(38) + 70/64 = 180/46$$

متوسط

۱۷- گزینه «۲»

تابع f همانی است یعنی هر عدد بهش بدی «همان» را بر می گرداند.

$$f(x) = x$$

$$g(x) = k \quad (k \text{ عددی ثابت})$$

$$f^2(3) + 4g(5) = \frac{1}{4}f(2) \Rightarrow 3^2 + 4k = \frac{1}{4} \times 2$$

$$\Rightarrow 9 + 4k = 1 \Rightarrow 4k = -8 \Rightarrow k = -2$$

$$\Rightarrow g(x) = -2$$

$$g(2 \cdot 5) = -2$$

آسان

۱۸- گزینه «۱»

$$f(x) = x \Rightarrow (a - 2b)x + 2b + a = x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 & (\text{ضریب } x) \\ 2b + a = 0 & (\text{عدد ثابت}) \end{cases}$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$af(3) - 2b = \frac{1}{2}(3) - 2(-\frac{1}{4}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

آسان

۱۹- گزینه «۳»

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow f(-\frac{1}{4}) = g(-\frac{1}{4})$$

$$\Rightarrow 2(-\frac{1}{4}) - 1 = 1 - k$$

$$-2 = 1 - k \Rightarrow k = 1 + 2 = 3$$

آسان

۲۰- گزینه «۳»

همان طوری که از دامنه مشخص هست، دامنه تنها ۳ عضو داره پس تابع هم

به صورت سه نقطه هست پس گزینه های ۱ و ۲ رد میشن.

اگه f رو به زبان ریاضی بنویسیم:

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f(0) = 3$$

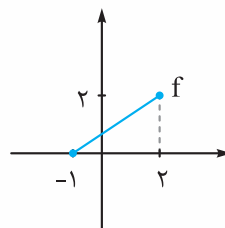
$$f(3) = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

که در گزینه ۳ درست رسم شده است.

متوسط

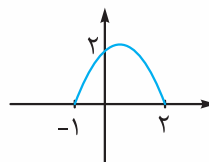
۱۳- گزینه «۲»

(آ) نادرست - مثال نقض:



$$D_f = [-1, 2]$$

$$R_f = [0, 2]$$



$$D_g = [-1, 2]$$

$$R_g = [0, 2]$$

در حالی که $f \neq g$

(ب) درست - است ممکن است برد، همه دامنه را شامل شود.

(پ) نادرست - برد، زیرمجموعه ای از دامنه است.

(ت) درست.

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

به ازای $x \geq 0$ برابرند ولی در حالت کلی با وجود برابری دامنه ها، برابر نیستند.

پس گزینه ۳ تنها گزینه درست است.

دشوار

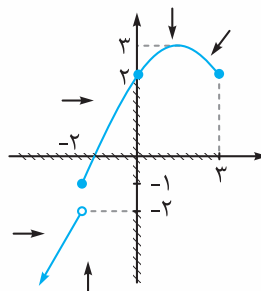
۱۵- گزینه «۴»

یه روش باحال یاد بدم؟! وقتی می خوای دامنه تعیین کنی فرض کن چراغ قوه ای

رو برداشتی و از پشت نمودار و به سمت محور x (موازی محور y) نور

می تابونی، هر جا روی محور x سایه افتاد دامنه است. همین اتفاق از سمت چپ

و راست روی محور y برد رو نشون میده:



$$D_f = (-\infty, 3]$$

$$R_f = (-\infty, 2] \cup [-1, 3]$$

متوسط

-۲

دامنه صورت، کل اعداد حقیقی است و محدودیتی ایجاد نمی‌کند و $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ نشان می‌دهد که $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های مخرج بوده‌اند و مخرج را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-1)(x-2) = x^2 - ax + 2b$$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - ax + 2b \Rightarrow a = 3, b = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{1} = 3$$

متوسط

-۳

مخرج کسر درجه ۲ است در حالی که فقط یک عضو از $\mathbb{R}$ حذف شده و معنی آن این است که عدد a ریشه مضاعف مخرج هست و مخرج به فرم اتحاد مربع است:

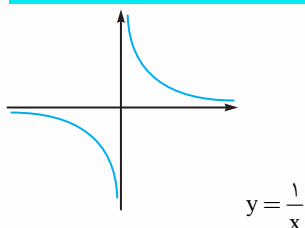
$$x^2 - 6x + b = (x-a)^2$$

$$x^2 - 6x + b = x^2 - 2ax + a^2 \Rightarrow \begin{cases} -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ b = a^2 \Rightarrow b = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x-3}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4-3} = 1$$

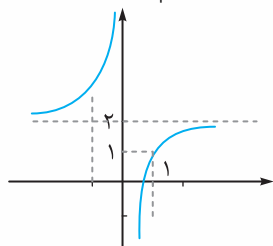
دشوار

-۴



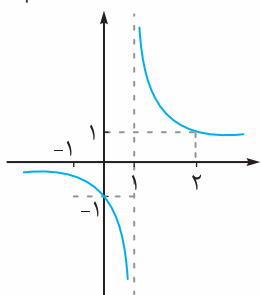
$$\tilde{f}) y = \frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + 2$$

ابتدا نسبت به محور x قرینه و سپس ۲ واحد به بالا می‌بریم:



$$\text{ب) } y = \frac{1}{x-1}, x > 1$$

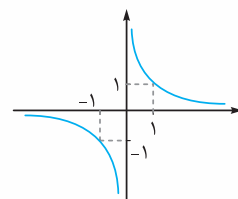
با توجه به انتقال تابع، کافیسیت به اندازه یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.



متوسط

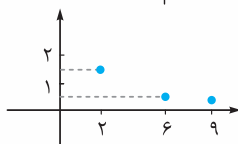
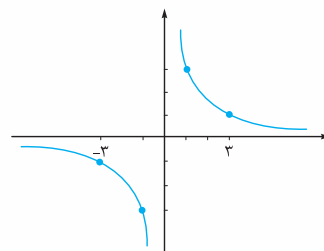
-۱

۱) نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ که به نمودار پروانه‌ای معروف هست به این صورت رسم میشه:



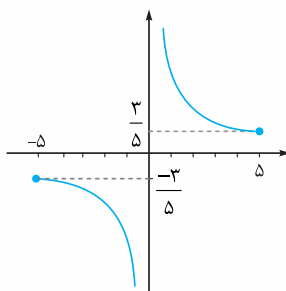
$$D = \mathbb{R} - \{0\}, R = \mathbb{R} - \{0\}$$

پس نمودار $y = \frac{3}{x}$ در راستای عمودی کشیده میشه (۳ برابر)



x	۲	۶	۹
۳	۳	۱	۱
۳	۲	۲	۳

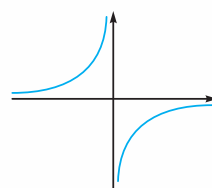
ب)



x	-۵	۵
۳	-۳	۳
۳	۵	۵

پ)

ت) $S(x) = -\frac{3}{x}$ همون نمودار $y = \frac{3}{x}$ هست که نسبت به محور x ها قرینه شده.



ث)

آسان

-۶

(آ) در انتهای ماه پنجم $t = 5$ است پس:

$$n(5) = \frac{9500(5) - 2000}{4 + 5} = \frac{45500}{9} = 5055.5$$

یعنی حدود ۵۰۵۵ نفر

(ب) $n(t) = 5500$ پس:

$$\frac{9500t - 2000}{4 + t} = 5500 \Rightarrow 9500t - 2000 = 22000 + 5500t$$

$$4000t = 24000 \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \text{پس از } 6 \text{ ماه}$$

دشوار

-۷

می‌دانیم رابطه‌ای بین سرعت، زمان و فاصله از رابطه $V = \frac{x}{t}$ به دست می‌آید:

پس:

$$60 = \frac{10}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{6}, 100 = \frac{x-10}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{x-10}{100}$$

اگر طول کل مسیر رو با x نشون بدیم:

$$V = \frac{x}{t_1 + t_2} = \frac{x}{\frac{1}{6} + \frac{x-10}{100}} = \frac{x}{\frac{100 + 6x - 60}{600}} = \frac{600x}{6x + 40} \Rightarrow V(x) = \frac{600x}{6x + 40}$$

(ب) $V(x) = 90$ پس:

$$\frac{600x}{6x + 40} = 90 \Rightarrow 600x = 540x + 3600 \Rightarrow 60x = 3600 \Rightarrow x = 60 \text{ km}$$

متوسط

-۸

$$(آ) x^2 - 7x + 10 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, 5 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2, 5\}$$

$$(ب) x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \neq 0$$

برای حل این نامساوی به دلیل این که درجه ۳ هست یکی از اعداد

$1, -1, 2, -2$ را به ترتیب جاگذاری می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow 1-2-3+4=0$$

پس یکی از ریشه‌ها $x=1$ است. برای یافتن بقیه از تقسیم کردن کمک می‌گیریم:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 3x + 4 & x-1 \\ \hline & x^2 - x - 4 \end{array} \Rightarrow x^2 - x - 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(-4) = 17$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 \pm x^2 \\ -x^2 - 3x \\ \hline \pm x^2 \pm x \\ -4x + 4 \\ \hline +4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

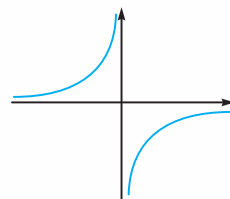
$$(ب) x^2 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, -2 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1, -2\}$$

$$(ت) x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1 \Rightarrow \text{همواره درست} \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

زیرا $x^2 + 1$ در مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نمیشه و همواره مقدار مثبتی به ما می‌دهد.

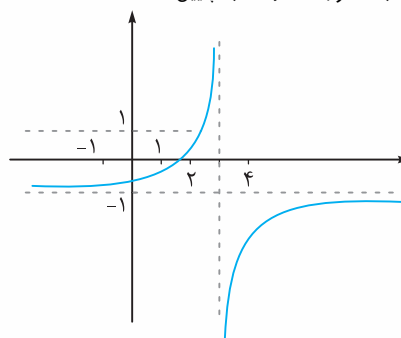
$$(پ) y = -\frac{1}{x}$$

یادت باشه که اگر نمودار $-f(x)$ را خواستی بکشی باید نمودار f رو نسبت به محور x ها قرینه کنی:



$$(ت) y = \frac{-x+2}{x-3} = -\frac{(x-2)}{x-3} = -\frac{x-3+1}{x-3} = -1 - \frac{1}{x-3}$$

۳ واحد به راست قرینه نسبت به محور x ۱ واحد به پایین:

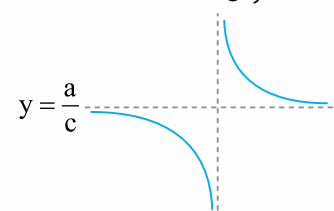


نکته مهم: توابعی به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ رو توابع هموگرافیک می‌نامیم.

$$(ad - bc \neq 0)$$

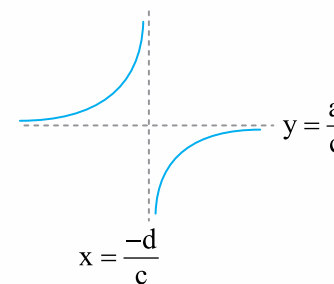
نمودار این توابع از دو فرم زیر تبعیت می‌کنن:

$$(۱) ad - bc > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \quad (۲) ad - bc < 0 \Rightarrow \text{نزولی}$$



$$x = \frac{-d}{c} \quad (\text{ریشه مخرج})$$

$$(ad - bc < 0)$$



$$(ad - bc > 0)$$

آسان

-۵

(آ) x درصد آلودگی را نشان می‌دهد پس: $x = 50\%$ یا $x = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{255\left(\frac{1}{2}\right)}{100 - \frac{1}{2}} = \frac{255}{199} = \frac{255}{199} = 1/28 \text{ میلیون تومان}$$

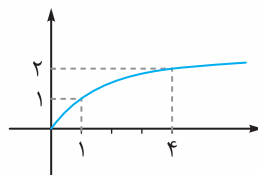
(ب) تابع به صورت کسری است پس دامنه به صورت {ریشه مخرج} - $\mathbb{R}$ نوشته می‌شود:

$$D = \mathbb{R} - \{100\}$$

-۹

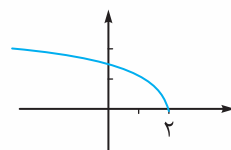
آسان

نمودار تابع رادیکالی $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر هست که به «ابرو» معروفه!

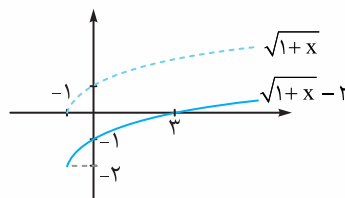


حالا واسه انتقال اول دقت کن بین ریشه داخل رادیکال چه عددی هست شروع نمودار از همون عدد. بعد اگر ضریب x مثبت بود نمودار رو به سمت راست بکش و اگر ضریب x منفی بود، نمودار رو به سمت چپ بکش.

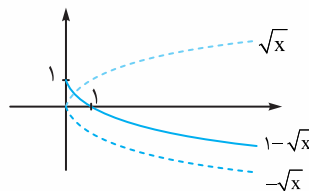
و ضریب x منفی $y = \sqrt{-x+2} \Rightarrow x=2$



ب) $y = \sqrt{1+x} - 2$ به سمت راست $x = -1$

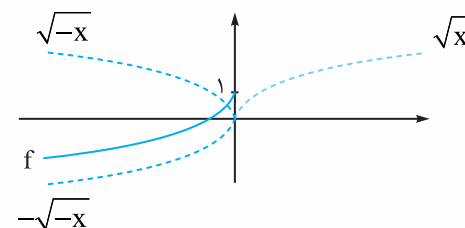


پ) $y = 1 - \sqrt{x}$

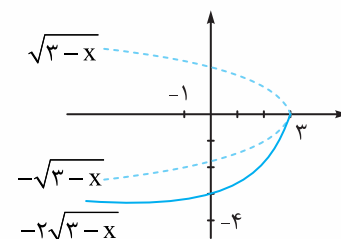


ت) $y = -\sqrt{-x+1}$

نسبت به محور لا قرینه نسبت به محور لا قرینه



ث) $y = -2\sqrt{3-x}$



-۱۰

متوسط

دامنه توابع رادیکالی، x هاییست که زیر رادیکال رو منفی نکنه پس کافیه عبارت زیر رادیکال رو بزرگتر مساوی صفر بزاریم و نامعادله رو حل کنیم:

آ) $2x+6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -6 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D = [-3, +\infty)$

ب) $3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow D = [-\frac{1}{3}, +\infty)$

پ) $x \geq 0 \Rightarrow D = [0, +\infty)$

ت) $x < 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{\cap} D_1 = (-\infty, 0)$

$x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow D_2 = [0, +\infty)$

$D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

برای تعیین برد عبارت‌ها و توابع رادیکالی حواست باشه که رادیکال همواره نامنفی هست:

آ) $\sqrt{2x+6} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2x+6} - 2 \geq -2 \Rightarrow R = [-2, +\infty)$

ب) $\sqrt{3x+1} \geq 0 \Rightarrow R = [0, +\infty)$

پ) $2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} - 3 \geq 3 \Rightarrow R = [-3, +\infty)$

ت) $\sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow R_1 = [0, +\infty)$

$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow 2-\sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow R_2 = (-\infty, 2]$

$\Rightarrow R = R_1 \cup R_2 = \mathbb{R}$

-۱۱

دشواری

آ) حواست هم به رادیکال‌ها باشه هم به مخرج کسر:

$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

و $\xrightarrow{\cap} D = [1, +\infty) - \{8\}$

$x^2 - 64 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 64 \Rightarrow x \neq \pm 8$

ب) $\mathbb{R} \Rightarrow$ صورت چند جمله‌ای

رادیکال‌های با فرجه فرد محدودیتی ایجاد نمی‌کنند و اون‌ها رو نادیده می‌گیریم.

مخرج: $|x|-5 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 5 \Rightarrow x \neq \pm 5 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-5, +5\}$

پ)

$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$

$|x|-7 \neq 0 \Rightarrow |x| \neq 7 \Rightarrow x \neq \pm 7 \xrightarrow{\cap} D = [4, +\infty) - \{7\}$

-۱۲

دشواری

آ) $x^2+3 \geq 0$ همواره برقرار

$x+|x| \neq 0 \Rightarrow |x| \neq -x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty)$

ب) $1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$|x|-x \neq 0 \Rightarrow |x| \neq x \Rightarrow x < 0 \xrightarrow{\cap} -1 \leq x < 0$

پ)

$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6 \xrightarrow{\cap} D = [3, 6)$

مخرج نمی‌تونه صفر بشه.



دشوار

-۱۷

$$x^2 + |x+2| + 3x \geq 0$$

$\downarrow$
 $x = -2$

$$(1) x \geq -2 \Rightarrow x^2 + x + 2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 8 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x \leq -2 - \sqrt{2} \cup x \geq -2 + \sqrt{2}$$

اشتراک با بازه ابتدایی $\rightarrow D_1 = [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$

$$(2) x < -2 \Rightarrow x^2 - x - 2 + 3x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 12 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x \leq -1 - \sqrt{3} \cup x \geq -1 + \sqrt{3}$$

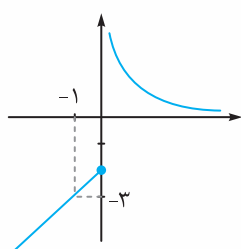
اشتراک با بازه ابتدایی $\rightarrow D_2 = (-\infty, -1 - \sqrt{3})$

$$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 = (-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

متوسط

-۱۸

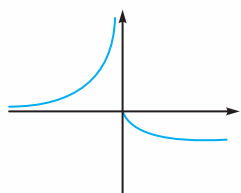
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x - 2 & x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} & x \\ \hline x & -1 \\ x & -2 \\ x & -3 \end{array}$$



$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$$

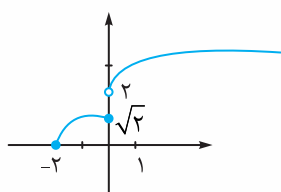
ب)



$$D = \mathbb{R}$$

$$R = \mathbb{R}$$

$$پ) \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \\ \hline \sqrt{x+2} & 0 \\ \sqrt{x+2} & \sqrt{2} \end{array}$$



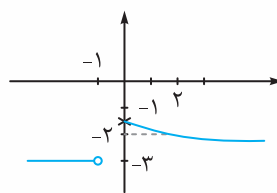
$$D = [-2, +\infty)$$

$$R = [0, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty)$$

دشوار

-۱۳

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \\ -3 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline y & -\sqrt{2} \\ y & -3 \end{array}$$



$$D = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$

$$R = (-\infty, -\sqrt{2}]$$

دشوار

-۱۴

$$|x-1| (x^2-4) \geq 0$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $x=1 \quad x=\pm 2$

می‌دونیم که قدرمطلق همواره مثبت هست فقط به‌ازای ریشه عبارت داخلی،

صفر میشه

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$ x-1 $	+	+	0	+	+
(x^2-4)	+	0	-	-	+
P	+	+	-	-	+

$$D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \cup \{1\}$$

دشوار

-۱۵

تو این جور سؤال‌ها اول بدون توجه به نمودار، دامنه تابعی که داده رو مشخص

کن، مثلاً تو این سؤال تابع رادیکالی داده پس:

$$-xf(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow xf(x) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} (1) \begin{cases} x \leq 0 \\ f \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع دوم} \\ (2) \begin{cases} x \geq 0 \\ f \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم} \end{cases}$$

پس دامنه یا xهایی رو مشخص می‌کنیم که در این دو ربع نمودار داشته باشیم:

$$D = [-4, -2] \cup [0, 4]$$

متوسط

-۱۶

حواست باشه که ۳ تا رادیکال داریم:

$$(1) x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

$$(2) x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

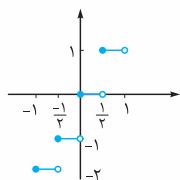
$$(3) \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+3} \geq \sqrt{x+2}$$

توان^۲ $\rightarrow x + 3 \geq x + 2 \Rightarrow 3 \geq 2 \Rightarrow$ همواره برقرار

پس با اشتراک‌گیری داریم:

$$x \geq -2$$

$$\Rightarrow D = [-2, +\infty)$$



می‌بینی! ضرب x برابر ۲ بود اما طول پله‌ها نصف شده!

دشوار

-۲۲

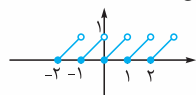
$$\bar{f}[-2, -1) \Rightarrow y = x + 2 \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \quad -1 \\ \hline x+2 & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$[-1, 0) \Rightarrow y = x + 1 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline x+1 & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$[0, 1) \Rightarrow y = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array}$$

$$[1, 2) \Rightarrow y = x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \quad 2 \\ \hline x-1 & 0 \quad 1 \end{array}$$

کافی برای رسم خط S نقطه ابتدا و انتها رو جاگذاری کنی.



همونطور که از نمودار پیداست برد این تابع $(0, 1)$ هست و یادت باشه:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

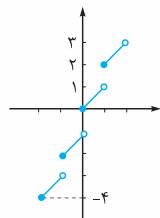
$$\text{ب) } y = x + [x] \quad [-2, 2)$$

$$[-2, -1) \Rightarrow y = x - 2 \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \quad -1 \\ \hline x-2 & -4 \quad -3 \end{array}$$

$$[-1, 0) \Rightarrow y = x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline x-1 & -2 \quad -1 \end{array}$$

$$[0, 1) \Rightarrow y = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array}$$

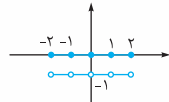
$$[1, 2) \Rightarrow y = x + 1 \quad \begin{array}{c|c} x & 1 \quad 2 \\ \hline x+1 & 2 \quad 3 \end{array}$$



$$\text{پ) } y = [x] + [-x] \quad [-2, 2)$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

از ویژگی‌های براکت می‌دونیم که

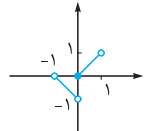


$$\text{ت) } y = |x| + [x] \quad (-1, 1)$$

با توجه به این که قدم‌مطلق داریم پس به علامت بازه‌ها توجه کنیم:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -x + (-1) = -x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline -x-1 & 0 \quad -1 \end{array}$$

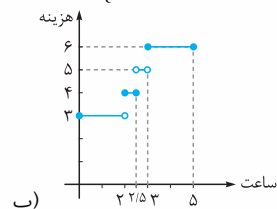
$$0 < x < 1 \Rightarrow y = x + 0 = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array}$$



آسان

-۱۹

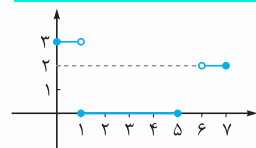
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 3 & 0 \leq x < 2 \\ 4 & 2 \leq x \leq 2.5 \\ 5 & 2.5 < x < 3 \\ 6 & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



ب)

آسان

-۲۰



دشوار

-۲۱

برای رسم توابع براکتی (جزء صحیح) لازمه بازه رو طوری تقسیم‌بندی کنیم که عبارت داخل براکت به فاصله ۱ واحدی قرار بگیره.

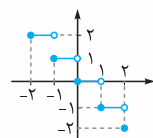
$$\bar{f}[-2 \leq x < -1] \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = +2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -1$$

$$x = 2 \Rightarrow [2] = 2 \Rightarrow y = -2$$

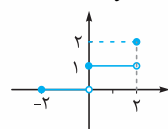


ب) داخل براکت $\frac{x}{2}$ هست پس بازه رو ۲ واحدی بگیر (برعکس!) تا $\frac{x}{2}$ در بازه یک واحدی قرار بگیره.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 1 + [1] = 2$$



به رابطه بین طول پله‌ها و ضرب x داخل براکت دقت کن.

پ) تو این قسمت برعکس قسمت قبلی ضرب x داخل براکت ۲ هست پس

بازه‌ها رو نصف کن یعنی به فاصله $\frac{1}{2}$ در نظر بگیر. (بازم برعکس)

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow y = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow y = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = 1$$

دشوار

-۲۷

با توجه به رادیکال درون مخرج کسر، عبارت زیر رادیکال باید فقط مثبت باشد.

$$[x]^2 - 3 > 0 \Rightarrow [x]^2 > 3 \Rightarrow [x] > \sqrt{3} \text{ یا } [x] < -\sqrt{3}$$

$$[x] > \sqrt{3} \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2$$

$$\text{یا } [x] < -\sqrt{3} \Rightarrow [x] \leq -2 \Rightarrow x < -2 + 1 \Rightarrow x < -1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$$

یادت باشه: اگر $n \in \mathbb{Z}$:

$$[x] > n \Rightarrow x \geq n + 1$$

$$[x] \geq n \Rightarrow x \geq n$$

$$[x] < n \Rightarrow x < n$$

$$[x] \leq n \Rightarrow x < n + 1$$

دشوار

-۲۸

یادت هست که $0 \leq x - [x] < 1$ پس $0 \leq 2x - 2[x] < 2$ و برد تابع $f(x)$ به صورت $[0, 2)$ است.

اما برای g داریم:

$$0 \leq 2x - [2x] < 1$$

چون به طور کلی می‌تونیم بگیم: $0 \leq \odot - [\odot] < 1$

پس:

$$R_f = [0, 2)$$

$$R_g = [0, 1)$$

آسان

-۲۹

(آ) می‌توان y را برحسب x محاسبه کرد پس تابع هست ✓

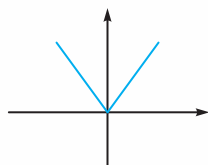
(ب) $x = 1$ خطی قائم و موازی محور y است پس تابع نیست x

(پ) $y = -2$ تابع ثابت است ✓

(ت) $0 + 3 \neq 0 - 1$ پس تابع نیست x

(ث) اگر قرار دهیم $x = 1$ آن‌گاه $y^2 = 1$ و $y = \pm 1$ پس تابع نیست x

(ج) به ازای هر x فقط یک y به دست آید پس تابع است.



دشوار

-۳۰

فرض کنیم $[x] = n$ پس:

$$n \leq x < n + 1$$

هر سه طرف را با $k \in \mathbb{Z}$ جمع می‌کنیم:

$$n + k \leq x + k < n + k + 1$$

پس می‌توان نوشت:

$$[x + k] = n + k$$

طبق فرض $n = [x]$ پس: $[x + k] = [x] + k$

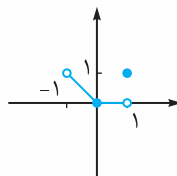
دشوار

-۳۳

$$\bar{1} - 1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -x \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \\ \hline -x & 1 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = [1] = 1$$

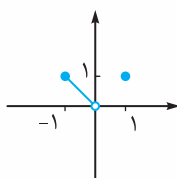


(ب) چون تابع کسری هست اول دامنه رو تعیین کنیم:

$$[x] \neq 0 \Rightarrow x \notin [0, 1)$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = \frac{x}{-1} = -x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (1, 1) \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \\ \hline -x & 1 \end{array}$$



یادت باشه: $[x] = n \Rightarrow n \leq x < n + 1$ (با شرط $n \in \mathbb{Z}$)

متوسط

-۳۴

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2} \\ = |x-2| + |x-3|$$

حال به بازه x دقت کنیم:

$$[x] = 2 \Rightarrow \underbrace{2 \leq x}_{x-2 \geq 0} < \underbrace{3}_{x-3 < 0}$$

پس عبارت مساوی هست با:

$$= x - 2 - x + 3 = 1$$

متوسط

-۳۵

$$x = [3x + 1] - 4$$

چون جزء صحیح و ۴ هر دو صحیح هستند، پس x عددی صحیح خواهد بود و حاصل $(3x + 1)$ عددی صحیح و می‌توان از علامت جزء صحیح صرف نظر کرد.

$$x = 3x + 1 - 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

متوسط

-۳۶

اول به این نکته مهم توجه کن که تنها در صورتی می‌تونی به عدد رو که داخل براکت جمع و تفریق شده رو از براکت بیرون ببری که اون عدد صحیح باشه یعنی:

$$[x + k] = [x] + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

در غیر این صورت اجازه خروج نداره.

$$[x + \frac{5}{4}] + [x + \frac{1}{4}] = 4 \Rightarrow [x + \frac{1}{4} + 1] + [x + \frac{1}{4}] = 4$$

$$\Rightarrow [x + \frac{1}{4}] + 2 + [x + \frac{1}{4}] = 4 \Rightarrow 2[x + \frac{1}{4}] = 2$$

$$\Rightarrow [x + \frac{1}{4}] = 1 \Rightarrow 1 \leq x + \frac{1}{4} < 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq x < \frac{7}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب} = [\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$$

۵- گزینه «۱»

متوسط

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

پس مخرج کسر g دارای ریشه مضاعف $x=1$ است و به فرم $(x-1)^2$ نوشته می‌شود:

$$x^2 - 2cx + 1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

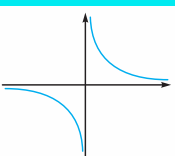
از طرفی ضابطه‌ها برابرند:

$$\frac{ax+b}{x^2-2x+1} = \frac{5}{x-1} \Rightarrow ax^2 - ax + bx - b = 5x^2 - 10x + 5$$

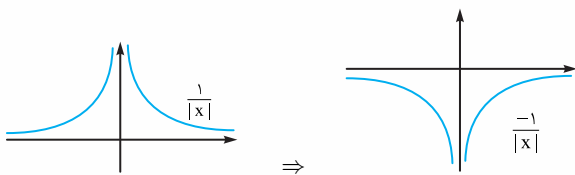
$$\Rightarrow \boxed{a=5}, -b=5 \Rightarrow \boxed{b=-5} \Rightarrow a+b+c=5+1-5=1$$

۶- گزینه «۲»

متوسط

می‌دونی که نمودار $y = \frac{1}{x}$ به صورت  هست.

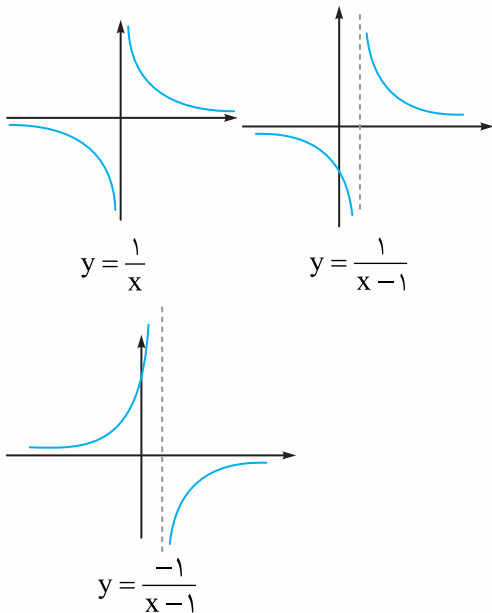
برای رسم تابع $y = \frac{-1}{|x|}$ ، با توجه به این که x به داخل قدرمطلق رفته باید بخش‌هایی از نمودار که زیر محور x هست رو به بالای محور x قرینه کنیم و سپس تأثیر -1 در کل تابع، قرینه کردن کل نمودار نسبت به محور x هست:



۷- گزینه «۱»

متوسط

اگر از انتقال استفاده کنیم، نمودار $\frac{1}{x}$ به اندازه ۱ واحد به راست منتقل می‌شود و سپس نسبت به محور x قرینه می‌شود:



۱- گزینه «۳»

متوسط

$$f(x) = \frac{ax-2}{x-a} \quad D_f = \mathbb{R} - \{a\}$$

اگر f یک تابع ثابت هست یعنی حاصل تقسیم صورت به مخرج یک عدد همیشه اگر از صورت a (ضریب x) رو فاکتور بگیریم:

$$f(x) = \frac{ax-2}{x-a} = \frac{a(x-\frac{2}{a})}{x-a} = a \Rightarrow x - \frac{2}{a} = x - a$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a} = a \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{2}, x \neq \sqrt{2} \\ f(x) = -\sqrt{2}, x \neq -\sqrt{2} \end{cases}$$

۲- گزینه «۴»

دشواری

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow \boxed{x \neq \pm 2} \quad (1)$$

$$x^2 + 3x \neq 0 \Rightarrow x(x+3) \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 0, -3} \quad (2)$$

$$1 + \frac{2}{x^2 + 3x} \neq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2 + 3x} \neq -1 \Rightarrow x^2 + 3x \neq -2$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \xrightarrow{a+c=b} \boxed{x \neq -1, -2} \quad (3)$$

با توجه به شرط‌های ۱ تا ۳، این اعداد در دامنه قرار ندارند: $0, -3, \pm 2, -1$
 $D = \mathbb{R} - \{-3, -2, -1, 0, 2\}$

۳- گزینه «۳»

متوسط

تابع کسری است. مخرج درجه ۲ است اما دامنه برابر $\mathbb{R}$ است. معنی آن این است که مخرج فاقد ریشه است پس:

اگر درجه ۱ باشد حتماً ریشه دارد $\Rightarrow$ (درجه ۲ باشد). $a \neq 0$ و

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4a(5) < 0 \Rightarrow 4 - 20a < 0 \Rightarrow 4 < 20a \Rightarrow a > \frac{1}{5}$$

۴- گزینه «۱»

دشواری

سعی می‌کنیم ضابطه تابع رو کمی ساده کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 2x} = \frac{(x-3)(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{x-3}{2x} = \frac{x}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x}$$

اگر به ضابطه جدید توجه کنیم می‌بینیم که مقدار $\frac{3}{2x}$ از $\frac{1}{2}$ کم شده و هیچ وقت صفر نمیشه (کسری که صورت صفر نباشه، صفر نمیشه!) پس مقدار y

هیچ وقت $\frac{1}{2}$ نمی‌شه پس $R = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

نکته: برد تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $\mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ است.

۸- گزینه «۱»

دشوار

با توجه به وجود قدرمطلق در مخرج کسر دو بازه متفاوت در نظر می‌گیریم:

$$(۱) \quad x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1, 2 \xrightarrow{x \geq 0} \text{فقط } 2 \text{ قابل قبول}$$

$$(۲) \quad x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2, 1 \xrightarrow{x < 0} \text{فقط } -2 \text{ قابل قبول}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

۹- گزینه «۳»

آسان

باز همون داستان مخرج درجه ۲ و ریشه مضاعف:

$$x = -1 \text{ مضاعف} \Rightarrow x^2 + ax + b = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + 2x + 1$$

با مقایسه طرفین: $a=2, b=1$

$$\Rightarrow a+b=3$$

۱۰- گزینه «۳»

آسان

$$2 - |x-3| \geq 0 \Rightarrow 2 \geq |x-3|$$

$$|x-3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5$$

اعداد صحیح بازه $1, 2, 3, 4, 5$

یادت نره:

$$| \odot | \leq a \xrightarrow{a > 0} -a \leq \odot \leq a$$

$$| \odot | \geq a \xrightarrow{a > 0} \odot \leq -a \cup \odot \geq a$$

۱۱- گزینه «۳»

دشوار

دامنه تابع رادیکالی: $ax^2 - 3bx + c \geq 0$

نتیجه شده: $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ یعنی این عبارت فقط به ازای $x = \frac{3}{4}$ تعریف شده هست و

در بقیه اعداد تعریف نشده هستند.

خب پس یعنی $x = \frac{3}{4}$ ریشه هست و به ازای بقیه مقادیر عبارت منفی میشه

پس همیشه گفت به صورت $k(x - \frac{3}{4})^2$ هست که k منفی باشه.

$$-x^2 - 3bx + c = k(x - \frac{3}{4})^2$$

$$= k(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) = kx^2 - 3kx + \frac{9}{4}k$$

مقایسه کنیم:

$$x^2: -1 = k$$

$$x: -3b = -3k \Rightarrow b = -1$$

$$2b^2 + 4c = 2 - 9 = -7 \Rightarrow 2b^2 + 4c = -7$$

$$c = \frac{9}{4}k \Rightarrow c = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - (-\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$$

اعداد صحیح $-1, 0, 1, 2$

۱۲- گزینه «۱»

دشوار

عبارت زیر رادیکال به ظاهر درجه ۲ هست اما دامنه به شکل بازه $[3, +\infty)$ است. می‌دانیم این بازه مربوط به عبارت‌ها و نامعادلات درجه اول هست زیرا مجموعه جواب نامعادله‌های درجه دوم یا $[a, b]$ یا $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ هست پس $a=0$ و داریم:

$$ax^2 + bx + 3c = bx + 3c \geq 0$$

پس به صورت $b(x-3)$ بوده:

$$bx + 3c = bx - 3b \Rightarrow b = -c \Rightarrow b + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

۱۳- گزینه «۲»

متوسط

رادیکال داخلی:

$$1 - 3x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 3x \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{1}{3}}$$

و رادیکال خارجی:

$$2 - \sqrt{1-3x} \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{1-3x} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4 \geq 1-3x$$

$$\Rightarrow 3x \geq 1-4 \Rightarrow 3x \geq -3 \Rightarrow \boxed{x \geq -1}$$

اشتراک این دو بازه: $D = [-1, \frac{1}{3}]$

اعداد صحیح بازه $\{-1, 0\}$

۱۴- گزینه «۴»

متوسط

تابعی که دامنه‌اش رو می‌خواد به فرم رادیکالی هست پس:

$$(2x-2)f(x) \geq 0 \text{ یا } (2x-2)y \geq 0$$

و دو حالت ممکنه اتفاق بیفته:

$$(۱) \quad \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_1 = [2, +\infty)$$

یعنی به‌ازای سمت راست $x=1$ ، نمودار بالای محور x باشه: $D_1 = [2, +\infty)$ یا

$$(۲) \quad \begin{cases} 2x-2 \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_2 = [-2, 1]$$

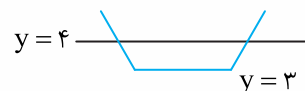
$$D_1 \cup D_2 = [-2, 1] \cup [2, +\infty)$$

۱۵- گزینه «۴»

دشوار

$$|x+1| + |x-2| - 4 \geq 0 \Rightarrow |x+1| + |x-2| \geq 4$$

از فصل قبل می‌دونیم نمودار تابع سمت چپ گلدانی هست و کف گلدان $y = |b-a| = |-1-2| = 3$ هست. پس خط $y=4$ بالاتر از کف گلدان قرار می‌گیره:



پس کافیست دو خط کناری رو با $y=4$ برخورد بدیم:

$$(۱) \quad x < -1 \Rightarrow -x-1-x+2 \geq 4 \Rightarrow -2x \geq 3 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2}$$

$$(۲) \quad x > 2 \Rightarrow x+1+x-2 \geq 4 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} - (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$$

اعداد صحیح $-1, 0, 1, 2$

آسان

۲۲- گزینه «۳»

$$y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

ضریب x داخل براکت $\frac{1}{2}$ است پس بازه‌ها را ۲ واحدی در نظر می‌گیریم:

$$-2 \leq x < 0$$

$$0 \leq x < 2$$

پس دو پله با طول ۲ واحد داریم:

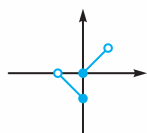
$$\text{مجموع طولها} = 2 + 2 = 4$$

متوسط

۲۳- گزینه «۴»

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -x + [x] = -x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & -1 \quad 0 \\ \hline -x-1 & 0 \quad -1 \end{array}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = x + [x] = x + 0 = x \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline x & 0 \quad 1 \end{array}$$



روش تستی:

(۱) رد هست چون -1 رو توپر کشیده در حالی که در بازه نیست.

(۲) رد هست چون $y(0) = 0$

اگر $x = -\frac{1}{2}$ آن گاه $y = -\frac{1}{2}$ پس گزینه ۳ هم رد میشه.

دشوار

۲۴- گزینه «۳»

اول توجه کنیم که چون $3x \in \mathbb{Z}$ جلوی تابع جزء صحیح قرار گرفته پس $3x \in \mathbb{Z}$.

$$[x] = 3x \Rightarrow \begin{array}{l} 3x \leq x < 3x+1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2x \leq 0 & x < 3x+1 \\ x \leq 0 & -1 < 2x \\ & -\frac{1}{2} < x \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 0$$

$$x = 0 \Rightarrow [0] = 3(0) \checkmark$$

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

پس معادله تنها دو جواب دارد.

متوسط

۲۵- گزینه «۴»

$$(1) 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq |x|$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$(2) [x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{(1) \cap (2)} (-1, 1) - \{0\}$$

متوسط

۲۶- گزینه «۱»

$$x - 5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x, 3x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2x + 3x = x - 5 \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \text{ غلط}$$

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

$$|2x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < 2x < 2 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

همچنین:

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow [x^2] + [x] = 0$$

آسان

۱۷- گزینه «۲»

$$f(x) = [x]$$

$$f(x - [x]) = [x - [x]]$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

می‌دونیم که:

$$[x - [x]] = 0$$

پس:

متوسط

۱۸- گزینه «۲»

می‌دونیم که:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f([x] + [-x]) = \begin{cases} f(0) & x \in \mathbb{Z} \\ f(-1) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [0] & x \in \mathbb{Z} \\ [-1] & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$R = \{-1, 0\}$$

دشوار

۱۹- گزینه «۱»

از اونجایی که می‌دونیم حاصل جمع دو براکت، عدد صحیح هست پس:

$$[x] + [4x - \frac{1}{3}] \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4x - \frac{1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

پس x عدد صحیح است و می‌تونه از جزء صحیح خارج بشه:

$$\Rightarrow x + 4x + \underbrace{[-\frac{1}{3}]}_{-1} = 4x + x - 1 = 5x - 1$$

$$\Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4} \notin \mathbb{Z} \text{ غلط}$$

آسان

۲۰- گزینه «۲»

$$[x - \frac{3}{2}] + [x - \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$$

بدون حل معادله می‌تونیم بگیریم این معادله هیچ جوابی نداره چون امکان نداره

مجموع دو براکت برابر $\frac{1}{2}$ بشه.

آسان

۲۱- گزینه «۳»

صورت چند جمله‌ای هست و محدودیتی برای x ایجاد نمی‌کنه پس:

$$[x]^2 - 4 > 0 \Rightarrow [x]^2 > 4 \Rightarrow |[x]| > 2$$

$$\begin{cases} [x] > 2 \Rightarrow x \geq 3 \\ \text{یا} \\ [x] < -2 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$$

آسان

۳۴- گزینه «۱»

$$[x] + 1 = 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - [-1, 0)$$

دشوار

۳۵- گزینه «۳»

$$([x] - 2)(3 - [x]) \geq 0$$

$$(1) \begin{cases} [x] - 2 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \\ 3 - [x] \geq 0 \Rightarrow [x] \leq 3 \Rightarrow x < 4 \end{cases} \Rightarrow [2, 4)$$

$$(2) \begin{cases} [x] - 2 \leq 0 \Rightarrow [x] \leq 2 \Rightarrow x < 3 \\ 3 - [x] \leq 0 \Rightarrow [x] \geq 3 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$D = [2, 4) \cup \emptyset = [2, 4)$$

آسان

۳۶- گزینه «۲»

با امتحان کردن چند مقدار نمودار صحیح را انتخاب می‌کنیم.

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad 3 \text{ و } 1 \text{ رد گزینه‌های}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -2$$

پس گزینه ۲ درست است.

آسان

۳۷- گزینه «۴»

می‌دانیم از داخل براکت اعداد صحیح از جمله $[x]$ را می‌توان بیرون آورد:

$$= [x + [x] + [x]] - ([x] + 2[x] + 3) = 3[x] - 3[x] - 3 = -3$$

دشوار

۳۸- گزینه «۳»

در حل این تست از دو خاصیت جزء صحیح استفاده می‌کنیم:

$$1) [x + k] = [x] + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) x = [x] + P \quad 0 \leq P < 1$$

$$g(x) = 2x - 3 - [2x - 3] - 2(x - [x])$$

$$= \cancel{2x} - \cancel{3} - [2x] + \cancel{3} - \cancel{2x} + 2[x] = 2[x] - [2x]$$

می‌دانیم که اجازه ورود یا خروج ضریب x رو نداریم.

$$x = [x] + P \xrightarrow{\times 2} 2x = 2[x] + 2P$$

$$\Rightarrow g(x) = 2[x] - \underbrace{[2x]}_{\in \mathbb{Z}} + 2P = 2[x] - 2[x] - [2P]$$

$$= -[2P] \xrightarrow{0 \leq P < 1 \Rightarrow 0 \leq 2P < 2} [2P] = 0, 1 \Rightarrow -[2P] = 0, -1$$

$$\Rightarrow R_g = \{-1, 0\}$$

دشوار

۳۹- گزینه «۱»

ابتدا به دامنه توجه کنیم:

$$x - [x] - \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow x - [x] \geq \frac{3}{4}$$

از قبل می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$ از اشتراک این دو بازه:

$$\frac{3}{4} \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq x - [x] - \frac{3}{4} < \frac{1}{4} \xrightarrow{\sqrt{}} 0 \leq \sqrt{x - [x] - \frac{3}{4}} < \frac{1}{2}$$

متوسط

۲۷- گزینه «۲»

x داخل جزء صحیح ضریب ۲ دارد پس بازه‌ها را به طول $\frac{1}{2}$ می‌گیریم:

$$0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 2$$

پس ۴ پاره خط مساوی داریم.

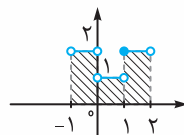
آسان

۲۸- گزینه «۱»

$$-1 < x < 0 \Rightarrow y = -(-1) + 1 = 2$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow y = 1(0) + 1 = 1 \quad (x \neq 0)$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = 1(1) + 1 = 2$$



$$S = (1 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 2) = 5$$

آسان

۲۹- گزینه «۳»

$$\left[-\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{10}{3}\right] + [-5] = [-1/6] + [-3/2] - 5 = -2 - 4 - 5 = -11$$

متوسط

۳۰- گزینه «۳»

$$-\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow -2 < -2x \leq 1 \Rightarrow [-2x] \Rightarrow -2 \text{ یا } -1$$

متوسط

۳۱- گزینه «۴»

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$$

$$(1) 1 \leq \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$(2) \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow [2] = 2$$

آسان

۳۲- گزینه «۱»

$$2 \leq -2x + \frac{1}{3} < 3$$

$$\frac{5}{3} \leq -2x < \frac{8}{3}$$

$$-\frac{4}{3} < x \leq -\frac{5}{6}$$

دشوار

۳۳- گزینه «۲»

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow \begin{matrix} -1 \leq x^2 + x < 0 \\ (1) & (2) \end{matrix}$$

$$(1) x^2 + x \geq -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \text{ همواره برقرار}$$

زیرا $a > 0$ و $\Delta < 0$ است پس $x \in \mathbb{R}$.

$$(2) x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

۴۰- گزینه «۱»

آسان

طبق رابطه داده شده داریم:

$$[(\sqrt{2}+1)^6] = [198 - (\sqrt{2}-1)^6] = 198 + [-(\sqrt{2}-1)^6]$$

$$0 < \sqrt{2}-1 < 1 \Rightarrow 0 < (\sqrt{2}-1)^6 < 1 \Rightarrow -1 < -(\sqrt{2}-1)^6 < 0$$

$$\Rightarrow [-(\sqrt{2}-1)^6] = -1 \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = 198 + (-1) = 197$$

۴۱- گزینه «۳»

متوسط

$$[x^2 - 5x] = 10 \Rightarrow 10 \leq x^2 - 5x < 11$$

$$[x^2 - 7x] = 10 \Rightarrow 10 \leq x^2 - 7x < 11$$

از جمع کردن سه طرف این نامعادلات با یکدیگر داریم:

$$20 \leq 2x^2 - 12x < 22 \Rightarrow 10 \leq x^2 - 6x < 11$$

برای رسیدن به مربع کامل $(x-3)^2$ لازم است $(\frac{b}{a})^2$ رو به طرفین اضافه

کنیم یعنی عدد ۹ رو:

$$19 \leq x^2 - 6x + 9 < 20 \Rightarrow 19 \leq (x-3)^2 < 20$$

طبق ویژگی برکت داریم:

$$[(x-3)^2] = 19$$

۴۲- گزینه «۱»

آسان

با تقسیم جملات بر ۳ داریم:

$$[2x] + [2x + \frac{1}{3}] = \frac{14}{3}$$

این معادله هیچ جوابی ندارد زیرا جمع دو جزء صحیح عددی غیر صحیح شده است.

۴۳- گزینه «۲»

دشواری

 $(x-2)$ زیر رادیکال است پس:

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x - \sqrt{2} \geq 2 - \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2} \approx 1.4} x - \sqrt{2} \geq 0.6 \Rightarrow [x - \sqrt{2}] \geq 0$$

می‌دونیم که حاصل رادیکال همواره نامنفی هست و طبق نتیجه‌ای که گرفتیم

براکت نیز نامنفی هست پس این معادله تنها در صورتی جواب دارد که هر دو

هم زمان صفر شوند:

$$\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$[2 - \sqrt{2}] = [0.6] = 0$$

پس $x = 2$ تنها جواب معادله است.

۴۴- گزینه «۳»

آسان

$$[x] \neq x \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$

$$[-x+5] + [x-2] = [-x]+5 + [x]-2 = [x] + [-x] + 3$$

و می‌دانیم که حاصل $[x] + [-x]$ به‌ازای $x \notin \mathbb{Z}$ برابر ۱- هست پس:

$$= -1 + 3 = 2$$

۴۵- گزینه «۴»

دشواری

از این که $\frac{x}{y}$ در هر دو برکت وجود دارد و با علامت قرینه هستن سعی در

ساده کردن داخل براکت‌ها می‌کنیم:

$$\frac{x+9}{y} = \frac{x}{y} + \frac{9}{y} = \frac{x}{y} + \frac{2}{y} + 1$$

$$\frac{12-x}{y} = \frac{12}{y} - \frac{x}{y} = \frac{14-2}{y} - \frac{x}{y} = 2 - \frac{2}{y} - \frac{x}{y}$$

$$[\frac{x+9}{y}] + [\frac{12-x}{y}] = 3 \Rightarrow [\frac{x}{y} + \frac{2}{y}] + 1 + [-\frac{x}{y} - \frac{2}{y}] + 2 = 3$$

$$\Rightarrow [\frac{x}{y} + \frac{2}{y}] + [-(\frac{x}{y} + \frac{2}{y})] = 0$$

$$t = \frac{x}{y} + \frac{2}{y} \Rightarrow [t] + [-t] = 0 \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+2}{y} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = yk - 2, k \in \mathbb{Z}$$

چون بی‌شمار k وجود دارد پس بی‌شمار جواب هم برای x وجود دارد.

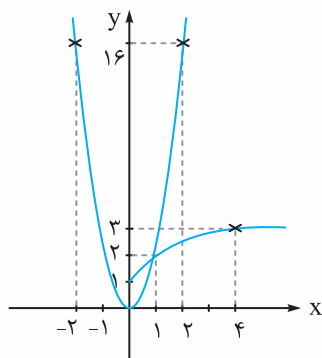
۴۶- گزینه «۱»

متوسط

این معادله رو به کمک رسم حل می‌کنیم چون فقط تعداد ریشه خواسته و

مقدار دقیق ریشه مورد نظر نیست. پس x^f رو یک طرف نگه داریم و بقیه رو

ببریم سمت راست:



$\frac{x^f}{f(x)}$	$\frac{\sqrt{x+1}}{g(x)}$
x	-2 -1 0 1 2
$f(x)$	16 1 0 1 16

x	0 1 4
$f(x)$	1 2 3

همان طور که از نمودار پیداست، دو تابع f و g تنها در یک نقطه تقاطع دارند

پس معادله فقط یک جواب دارد.

۴۷- گزینه «۱»

متوسط

$$x^3 = [x] + [26 - x]$$

۲۶ عدد صحیح است پس می‌تواند از جزء صحیح خارج شود:

$$x^3 = [x] + [-x] + 26$$

$$(1) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = 0 \Rightarrow x^3 = 26 \Rightarrow x = \sqrt[3]{26}$$

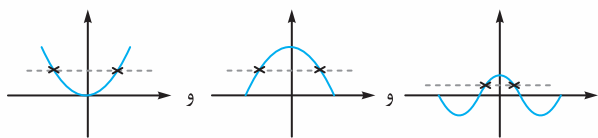
اما $\sqrt[3]{26} \notin \mathbb{Z}$ پس غیر قابل قبول است.

$$(2) x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1 \Rightarrow x^3 = -1 + 26 = 25 \Rightarrow x = \sqrt[3]{25}$$

پس در بازه قرار دارد و قابل قبول است.



ب و پ و ت) یک‌به‌یک نیستند چون:



ث) یک‌به‌یک است چون کدملی تنها می‌تواند مربوط به یک فرد باشد.

ج) یک‌به‌یک است چون هر خط موازی محور x ها تنها در نقطه آن را قطع می‌کند.

$$y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1 + 2$$

$$\Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \text{ یک‌به‌یک نیست.}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \text{ یک‌به‌یک است.}$$

$$y = x - 3 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1-1}{x_1-2} = \frac{x_2-1}{x_2-2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$\cancel{x_1 x_2} - 2x_1 - x_2 + \cancel{1} = \cancel{x_1 x_2} - x_1 - 2x_2 + \cancel{1}$$

$$-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک‌به‌یک است.

حواستون باشه! توابع سهمی، قدرمطلق، به طور کلی یک‌به‌یک نیستند.

همچنین خط و هموگرافیک و رادیکال به طور کلی یک‌به‌یک هستند. (به جز

خطوط عدد y)

آسان

۲-

حواستون باشه! رابطه‌ها زمانی تابع یک‌به‌یک هستند که:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \text{ تعریف تابع}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ تعریف یک‌به‌یک}$$

بنابه تعریف تابع چون مؤلفه ۳- یکسان است باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز

برابر باشند پس:

$$m-1 = m^2 - m \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$$

با جای گذاری $m = 1$ در رابطه:

$$f = \{(-3, 0), (2, -3), (-3, 0), (4, -3)\}$$

چون $m = 1$ باعث می‌شود دو زوج مرتب $(2, -3)$ و $(4, -3)$ یک‌به‌یک

بودن را به هم بزنند پس $m = 1$ قابل قبول نیست.

هیچ مقدار m

آسان

۴۸- گزینه «پ»

ضریب x داخل پرانتز $\frac{1}{4}$ است پس بازه‌ها را به فاصله ۲ واحد در نظر می‌گیریم:

$$[-2, 0)$$

$$[0, 2)$$

$$[2, 4)$$

$$[4, 6)$$

پس نمودار از ۴ پاره‌خط مساوی تشکیل شده.

دشوار

۴۹- گزینه «پ»

x برابر با مجموع سه عدد صحیح شده است پس $x \in \mathbb{Z}$.

و بنابراین $2x^2 - x \in \mathbb{Z}$ و $2x^2 \in \mathbb{Z}$ پس:

$$2x^2 - x - x + \underbrace{\left[\frac{\sqrt{3}}{5}\right]}_{[0/34]=0} + 1 = x \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ غرق } (x \in \mathbb{Z})$$

پس تنها جواب معادله $x = 1$ است.

متوسط

۵۰- گزینه «پ»

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(1) x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-9+x}{4x^2+4x} = 0 \Rightarrow -9+x=0 \Rightarrow \boxed{x=9} \text{ قق}$$

$$(2) x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-9+x}{4x^2+4x} = -1 \Rightarrow 4x^2+4x=9-x \Rightarrow 4x^2+5x-9=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} x=1 \text{ غرق}, -\frac{9}{4} \text{ قق} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{9}{4}}$$



آسان

۱-

حواستون باشه! تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ زوج مرتب: یا y برابر نداشته

باشیم یا اگر y برابر داشتیم x ها نیز برابر باشند.

تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ شکل: خطوط موازی محور x ها شکل را در

حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ ضابطه:}$$

آ) یک‌به‌یک نیست چون $y = 4$ دارای دو x متفاوت $x = 3$ و $x = 7$ است.

است.

-۳

آسان

طبق تعریف یک‌به‌یک از لحاظ زوج مرتب داریم:

$$(-2, 3)(2a - b, 3) \Rightarrow 2a - b = -2$$

$$(-3, 7)(a - b, 7) \Rightarrow a - b = -3$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

$$a = 1, b = 4$$

$$a + b = 1 + 4 = 5$$

-۴

آسان

طبق تعریف یک‌به‌یک از لحاظ زوج مرتب و تعریف تابع:

$$(2, m^2 - m) = (2, m) \xrightarrow{\text{تابع}} m^2 - m = m \Rightarrow m^2 - 2m = 0$$

$$\Rightarrow m(m - 2) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 2$$

$$1 + k = 3 - 2k \Rightarrow 3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$mk = (2)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \text{ و در حالت دوم } mk = (0)\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

-۵

آسان

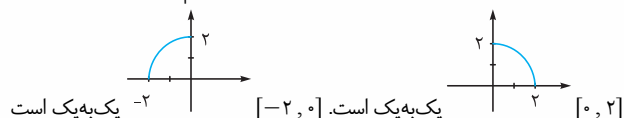
چون در $y = 1$ x های ۴ و ۷ و در $y = 2$ x های ۲ و ۳ و ۵ و در $y = 3$ x های ۱ و ۶ در ارتباط هستند پس یک‌به‌یک نیست.در هر حالت یک x را نگه داشته و باقی x ها را حذف می‌کنیم مثلاً:

$$(4, 1)(2, 2)(1, 3)$$

پس x های ۷ و ۳ و ۵ و ۶ را حذف کردیم تا یک‌به‌یک بشود. پس حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند و ۴ نقطه حذف می‌شود.

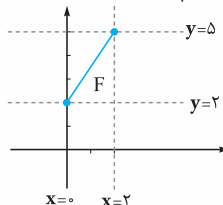
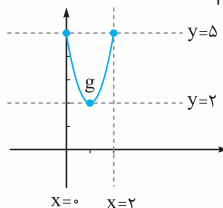
-۶

آسان

هر یک از بازه‌های $[0, 2]$ و $[-2, 0]$ را در نظر بگیریم یک‌به‌یک خواهد بود.

-۷

آسان

آ) باید شکلی رسم کنید که خطوط موازی محور x ها شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کنند. f را تابعی خطی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ رسم کردیم.ب) در بازه‌های داده شده شکل را طوری رسم می‌کنیم که خطوط موازی محور x ها شکل را در بیش از یک نقطه قطع کنند.تابع g را سهمی با دامنه و برد مورد نظر رسم کردیم:

-۸

آسان

حواستون باشه! f^{-1} از لحاظ زوج مرتب به معنای جابه‌جایی x و y است.

$$\text{نکته مهم این که } f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

$$f^{-1} = \{(1, 2)(3, -1)(4, 7)\} \Rightarrow f = \{(2, 1)(-1, 3)(7, 4)\}$$

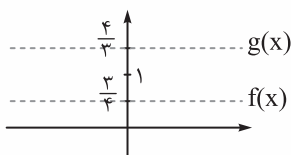
$$f(2) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, f(-1) = 3 \xrightarrow{\text{پس}} \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

-۹

آسان

خیر، $f(x) = \frac{3}{4}$ خطی است موازی محور x ها و همچنین $g(x) = \frac{4}{3}$ نیز خطیاست موازی محور x ها در حالی که دو تابع زمانی وارون یکدیگرند که نسبت بهنیمساز ناحیه اول و سوم قرینه باشند. در حالی که f و g نسبت به نیمساز ناحیه

اول و سوم قرینه نیستند.



-۱۰

متوسط

برد وارون تابع f همان دامنه تابع f است.

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

$$\{a^2, b + 3\} = R_{f^{-1}} = \{-5, 9\}$$

اگر این دو مجموعه با هم برابر باشند $a^2 = 9$ پس در نتیجه: $a = \pm 3$.

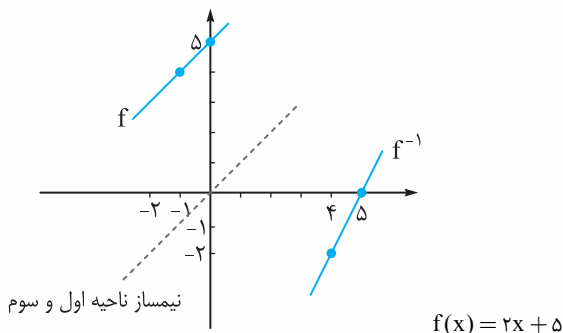
$$b = -8 \Leftarrow b + 3 = -5$$

-۱۱

متوسط

آ) ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم و قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم

رسم می‌کنیم.

نمودار f چون خطوط موازی محور x ها شکل را در یک نقطه قطع می‌کنند پس

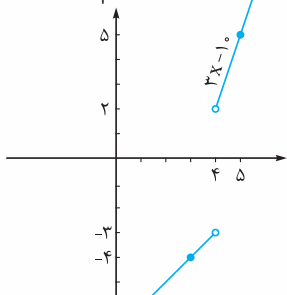
یک‌به‌یک است.

$$\text{ب) } y = 2x + 5 \Rightarrow y - 5 = 2x \Rightarrow \frac{y - 5}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

دشوار

-۱۵

حواستون باشه! برای تحلیل یک به یک بودن توابع چند ضابطه‌ای شکل آن‌ها را رسم کنید. ابتدا $3x-10$ و $x-7$ را در بازه‌های مورد نظر رسم کنید.



با توجه به شکل در $x=4$ نقطه‌ای که گذاشته می‌شود باید y ای بین $[-3, 2]$ داشته باشد وگرنه یک به یک بودن را خراب می‌کند [مثلاً]

[پس: $-3 \leq k-5 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq k \leq 7$
 $k = [2, 7]$]

متوسط

-۱۶

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 2 \quad \begin{array}{l} \text{شرط وارون پذیری} \\ \text{یک به یک بودن} \end{array}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

یک به یک نیست. $|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$

محدود کردن دامنه $(-\infty, x_S]$ یا $[x_S, +\infty)$ پس دامنه محدود باید $D = [1, +\infty)$ یا $(-\infty, 1]$ با در نظر گرفتن $D = [1, +\infty)$

$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \quad D: [1, +\infty)$$

$$x = (y-1)^2 + 2 \Rightarrow x - 2 = (y-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x-2} = |y-1|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-2} = y-1 \Rightarrow \sqrt{x-2} + 1 = y = f^{-1}(x)$$

$$\text{ب) } g(x) = (x+5)^2 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1+5)^2 = (x_2+5)^2$$

$$\Rightarrow |x_1 + 5| = |x_2 + 5|$$

یک به یک نیست پس دامنه محدود می‌کنیم: $D = [-5, +\infty)$

$$y = (x+5)^2 \quad D: [-5, +\infty)$$

$$x = (y+5)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = |y+5| \Rightarrow \sqrt{x} - 5 = y \Rightarrow \sqrt{x} - 5 = g^{-1}(x)$$

$$\text{پ) } h(x) = -|x-1| + 1$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -|x_1 - 1| + 1 = -|x_2 - 1| + 1 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

یک به یک نیست پس باید دامنه محدود کنیم:

$$y = -|x-1| + 1 \quad D = [1, +\infty)$$

$$y = -(x-1) + 1 \xrightarrow{x \geq 1} y = -x + 1 + 1 \Rightarrow y = -x + 2 \Rightarrow x = -y + 2$$

$$\Rightarrow x - 2 = -y \Rightarrow -x + 2 = y = h^{-1}(x)$$

$$\text{ت) } P(x) = \sqrt{x+2} - 3$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x_1+2} - 3 = \sqrt{x_2+2} - 3 \Rightarrow \sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2}$$

$$\Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک به یک است.

$$y = \sqrt{x+2} - 3 \Rightarrow x = \sqrt{y+3} - 2 \Rightarrow x + 2 = \sqrt{y+3}$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = y+3 \Rightarrow (x+2)^2 - 3 = y = P^{-1}(x)$$

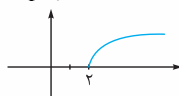
متوسط

-۱۷

ابتدا دامنه و برد f را به دست می‌آوریم:

$$D_f: x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f: [2, +\infty)$$

$$R_f: y \geq 0$$



چون f یک به یک است پس f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} x = \sqrt{y-2}$$

$$\xrightarrow{\text{با شرط } x \geq 0} x^2 = y-2 \Rightarrow x^2 + 2 = y$$

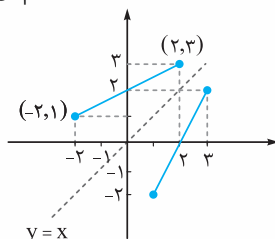
$$\text{پس } R_{f^{-1}} = [2, +\infty) \text{ و } D_{f^{-1}} = x \geq 0$$

نتیجه این سؤال که $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$ را به خاطر بسپارید.

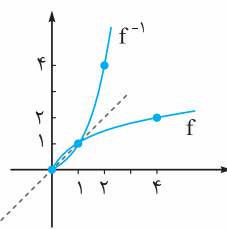
متوسط

-۱۸

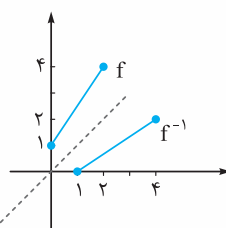
موارد آ و ب و ج یک به یک نیستند پس طبق خواسته سؤال تنها وارون ب و ت و ث را رسم می‌کنیم. وارون یک تابع را نسبت به نیمساز ناحیه اول رسم می‌کنیم.



نیمساز ناحیه اول و سوم (ب)



نیمساز ناحیه اول و سوم (پ)



نیمساز ناحیه اول و سوم (ت)

متوسط

-۱۹

حواستون باشه! شرط وارون پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است پس:

$$(1, 4)(n^2 - 8, 4) \xrightarrow{\text{طبق تعریف یک به یک}} 1 = n^2 - 8 \Rightarrow 9 = n^2 \Rightarrow n = \pm 3$$

$$n = +3 \Rightarrow f\{(1, 4)(m+9, -1)(1, 4)(3, 4)(3, m+3)\}$$

چون یک به یک بودن $(2, 4)$ و $(1, 4)$ را خراب می‌کند پس $n = 3$ غیر قابل قبول است.

$$n = -3 \Rightarrow f = \{(1, 4)(m+9, -1)(1, 4)(2, -1)(3, m-3)\}$$

$$m+9=2 \Rightarrow m=-7$$

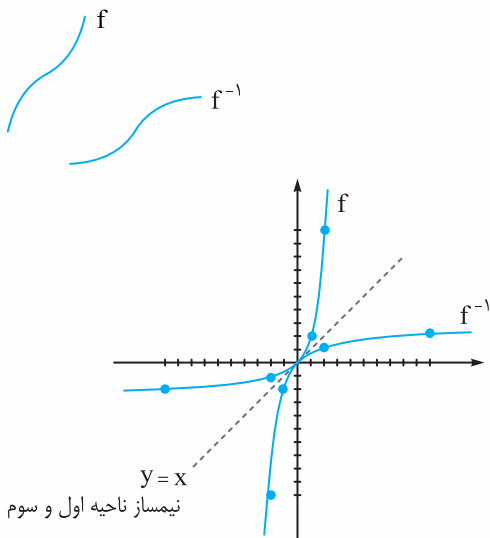
پس $m = -7$ و $n = -3$ قابل قبول است.

دشوار

-۱۸

ابتدا با استفاده از نقطه‌دهی f را رسم کنیم:

$$f(x) = x^3 + x \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -10 & -2 & 0 & 2 & 10 \end{array}$$



دشوار

-۱۹

حواستون باشه! تابع f و f^{-1} یکدیگر را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند پس می‌توان f را با $y = x$ قطع داد پس:

$$f(x) = \begin{cases} x(x) & x \geq 0 \\ x(-x) & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0: x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ قق}, x = 1 \text{ قق}$$

$$x < 0: -x^2 - x = 0 \Rightarrow -x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ غقق}, x = -1 \text{ قق}$$

پس f و f^{-1} یکدیگر را در سه نقطه به طول‌های ۱ و ۰ و -۱ قطع می‌کنند.

متوسط

-۲۰

با توجه به نکته سؤال قبل:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \text{قق } x=2, \text{قق } x=3$$

متوسط

-۲۱

با توجه به نکته سؤال قبل:

$$x^3 - 5x^2 + 4x = x \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 5x + 3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 12 = 13$$

۲ ریشه دارد.

پس جمعاً سه نقطه برخورد خواهد داشت.

متوسط

-۲۲

با توجه به سؤال قبل:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x+4 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 4$$

$$\text{ث) } K(x) = \frac{-7x+3}{5}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{-7x_1+3}{5} = \frac{-7x_2+3}{5} \Rightarrow -7x_1+3 = -7x_2+3$$

$$\Rightarrow -7x_1 = -7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک‌به‌یک است.

$$y = \frac{-7x+3}{5} \Rightarrow x = \frac{-7y+3}{5} \Rightarrow 5x = -7y+3 \Rightarrow 5x-3 = -7y$$

$$\Rightarrow y = \frac{5x-3}{-7} = K^{-1}(x)$$

$$\text{ج) } M(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{2x_1-1}{x_1-3} = \frac{2x_2-1}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 6x_1 - x_2 + 3 = 2x_2x_1 - x_1 - 6x_2 + 3$$

$$5x_2 = 5x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

یک‌به‌یک است.

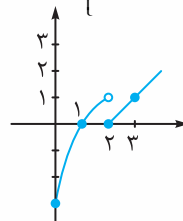
$$y = \frac{2x-1}{x-3} \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-3} \Rightarrow xy - 3x = 2y - 1$$

$$xy - 2y = 3x - 1 \Rightarrow (x-2)y = 3x-1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{x-2} = M^{-1}(x)$$

دشوار

-۱۷

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & x < 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 2 & 1 & 0 \\ \hline y & 1 & 0 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$



تابع یک به یک نیست پس وارون‌پذیر نیست.

$$D_f = x < 2 = R_{f^{-1}} = (-\infty, 2)$$

$$R_f: x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0 \Rightarrow -(x-2)^2 < 0$$

$$\Rightarrow -(x-2)^2 + 1 < 1 \Rightarrow y < 1$$

$$y = -(x-2)^2 + 1 \Rightarrow x = -(y-2)^2 + 2$$

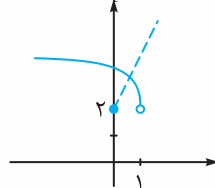
$$\Rightarrow x-1 = -(y-2)^2 \quad R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1)$$

$$-x+1 = (y-2)^2 \Rightarrow \sqrt{-x+1} = y-2 \Rightarrow \sqrt{-x+1}+2 = y = f^{-1}(x)$$

$$D_f: x \geq 2 = R_{f^{-1}}$$

$$R_f: x \geq 2 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1}+2 & x < 1 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases}$$



شکل و ضابطه یک‌به‌یک نیستند و وارون‌پذیری ندارند.

دشوار

-۲۸

خواستون باشه‌ها! وارون تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت:

$$y^{-1} = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

پس در نتیجه وارون این تابع $y^{-1} = \frac{-2x+2}{x-a}$ است.

$$\frac{-2x+2}{x-a} = \frac{ax+2}{x+2}$$

از تساوی دو طرف نتیجه می‌شود $a = -2$ است.

آسان

-۲۹

اگر $f^{-1}(x) = x-1$ است پس $f(x) = x+1$ است در نتیجه:

$$g(x) = x+1+\sqrt{x+1} \xrightarrow{x+1=t} g(t) = t+\sqrt{t} \xrightarrow{(x,12) \in g} \frac{g^{-1}(12)}{(x,12) \in g}$$

$$12 = t + \sqrt{t} \Rightarrow t + \sqrt{t} - 12 = 0 \Rightarrow (\sqrt{t} + 4)(\sqrt{t} - 3) = 0$$

$$\sqrt{t} = -4 \text{ غلطی}, \sqrt{t} = 3 \Rightarrow t = 9$$

$$x+1=9 \Rightarrow x=8$$

آسان

-۳۰

چون $f^{-1}(9) = 1$ را خواسته است پس یعنی:

$$9 = 2^x + x$$

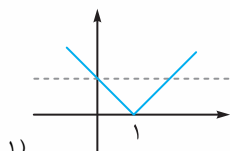
$$9 = 8^x + x \Rightarrow x = 1$$



آسان

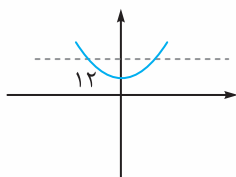
-۱ گزینه «۲»

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



۱) یک‌به‌یک نیست

۲) $g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ یک‌به‌یک است.



۳) یک‌به‌یک نیست

دو زوج مرتب با y های یکسان x های متفاوت دارند پس یک‌به‌یک نیست.

$$۴) (1, 5), (4, 5)$$

دشوار

-۳۱

$$I) y = 3x^2 - 6 \Rightarrow x = 3y^2 - 6 \Rightarrow x + 6 = 3y^2 \Rightarrow \frac{x+6}{3} = y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x+6}{3}} = y = f^{-1}(x)$$

$$B) y = \frac{2x-1}{x+4} \Rightarrow x = \frac{2y-2}{y+4} \Rightarrow xy+4x=2y-1 \Rightarrow xy-2y=-4x-1$$

$$y(x-2) = -4x-1 \Rightarrow y = \frac{-4x-1}{x-2} = g^{-1}(x)$$

$$P) h(x) = |x-3| + 7 \xrightarrow{x \leq 3}$$

$$h(x) = -(x-3) + 7 = -x + 3 + 7 = -x + 10$$

$$y = -x + 10 \Rightarrow x = -y + 10 \Rightarrow y = -x + 10 = h^{-1}(x)$$

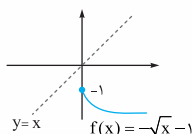
$$T) k^{-1}(x) = \begin{cases} x \leq 0 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow \sqrt{x} = y \\ x > 0 \Rightarrow y = -x^2 \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow -x = y^2 \\ \Rightarrow \sqrt{-x} = y \end{cases}$$

$$k^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

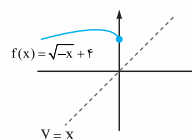
متوسط

-۳۲

آ) $y = x$ و یا $y = -x$ را می‌توان در نظر گرفت



ب)



پ)

آسان

-۳۵

$$y = 4x \xrightarrow{\text{شرط وارون پذیری یک‌به‌یک بودن است}} y_1 = y_2 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

یک‌به‌یک است. پس وارون پذیر است.

متوسط

-۳۶

وارون تابع f را می‌یابیم:

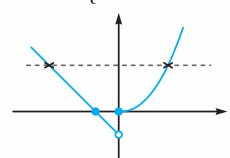
$$y = \frac{3}{x-2} \Rightarrow x = \frac{3}{y-2}$$

$$xy - 2x = 3 \Rightarrow xy = 3 + 2x \Rightarrow y = \frac{3+2x}{x} \neq g(x)$$

آسان

-۳۷

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$$



خطوط موازی محور x ها در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

دشوار

۷- گزینه «۲»

برای داشتن تابع یک‌به‌یک هر مؤلفه از مجموعه A باید تنها با یک مؤلفه از B در ارتباط باشد. پس:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

برای عدد ۱ از مجموعه A تنها یک جفت انتخاب از B وجود دارد.

برای عدد ۲ از مجموعه A ۴ انتخاب از مجموعه B داریم.

برای عدد ۳ از مجموعه A ۳ انتخاب از مجموعه B داریم.

برای عدد ۴ از مجموعه A ۲ انتخاب از مجموعه B داریم.

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ پس در نتیجه:}$$

روش دوم: استفاده از فرمول ترتیب است.

متوسط

۸- گزینه «۳»

خروجی به معنای حاصل عبارت $\frac{x}{2+\sqrt{x}}$ است پس:

$$\frac{-x}{2+\sqrt{x}} = -1 \Rightarrow -x = -2 - \sqrt{x} \Rightarrow 0 = x - \sqrt{x} - 2$$

$$0 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)$$

$$\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4, \sqrt{x} = -1 \text{ غلط}$$

$x = 4$ به معنای خروجی تابع $2x - 3$ است پس:

$$2x - 3 = 4 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

آسان

۹- گزینه «۴»

$$(3, 2) = (b, 2) \xrightarrow{\text{یک‌به‌یک}} b = 3$$

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \xrightarrow{\text{تابع}} a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$a = 2, a = -1$$

$$a = 2 \Rightarrow \{(3, 2)(2, 5)(3, 2)(3, 2)(-1, 4)\} \Rightarrow a = 2 \text{ قق}$$

$$a = -1 \Rightarrow \{(3, 2)(-1, 5)(3, 2)(3, 2)(-1, 4)\}$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف تابع}} (-1, 5)(-1, 4) \text{ غلط}$$

پس $a = 2$ قابل قبول است و $b = 3$.

آسان

۱۰- گزینه «۳»

با توجه به خطوط موازی محور x ها تنها گزینه ۳ یک‌به‌یک است.

گزینه اول ویژگی تابع بودن را دارا نیست.

آسان

۱۱- گزینه «۳»

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

(۱) نادرست - با دامنه محدود $[x_0, +\infty)$ یا $(-\infty, x_0]$ یک‌به‌یک است.

(۲) نادرست - اگر $ad - bc = 0$ باشد، تابع ثابت است.

(۳) درست - خطی موازی محور x ها شرط یک‌به‌یک بودن است.

(۴) نادرست - نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم.

متوسط

۱۲- گزینه «۱»

با توجه به نکته گفته شده وارون تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ است پس:}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-2}$$

که اگر از منفی صورت فاکتور گرفته و در مخرج ضرب کنیم به گزینه یک

$$g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{2-x} \text{ می‌رسیم:}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۳»

دقت کنید $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$ پس:

$$D_f: x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 = R_{f^{-1}}$$

$$R_f: y \geq -5 \Rightarrow D_{f^{-1}}$$

$$y = \sqrt{x+3} - 5 \Rightarrow x = \sqrt{y+5} - 3 \Rightarrow x+5 = \sqrt{y+3}$$

$$\Rightarrow (x+5)^2 = y+3$$

$$x^2 + 10x + 25 = y + 3 \Rightarrow x^2 + 10x + 22 = y = f^{-1}(x)$$

$$D_{f^{-1}}: x \geq -5$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$f^{-1}(4)$ یعنی $(x, 4) \in f$ پس:

$$4 = -x + \sqrt{-2x}$$

$$4 + x = \sqrt{-2x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (4+x)^2 = (\sqrt{-2x})^2$$

$$\Rightarrow 16 + 8x + x^2 = -2x$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$$

$$x = -2 \text{ قق} \quad x = -8 \text{ غلط}$$

صدق ↓

$$4 = 2 + \sqrt{4}$$

$$\checkmark 4 = 4$$

صدق ↓

$$4 = 8 + 4$$

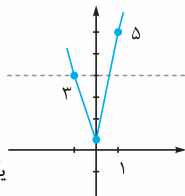
$$4 \neq 12$$

$$\begin{cases} x \geq 2: 2 = x - 2 + \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 4 = 0 \\ x < 2: 2 = -x + 2 + \sqrt{x} \Rightarrow x - \sqrt{x} = 0 \\ \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1 \end{cases}$$

یک به یک نیست.

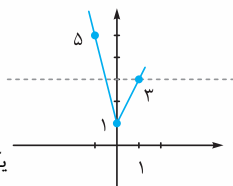
دشوار

گزینه ۱۳



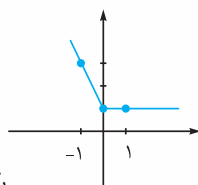
یک به یک نیست پس معکوس پذیر نیست

$$1) y = 3|x| + x + 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & \\ \hline y & 3 & 1 & 5 & \end{array}$$

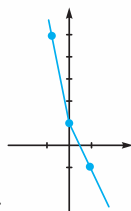


یک به یک نیست معکوس پذیر نیست

$$2) y = 3|x| - x + 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & \\ \hline y & 5 & 1 & 3 & \end{array}$$



$$3) y = |x| - x + 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & \\ \hline y & 3 & 1 & 1 & \end{array} \quad \text{یک به یک نیست}$$



یک به یک است و معکوس پذیر

$$4) y = |x| - 3x + 1 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & \\ \hline y & 4 & 1 & -1 & \end{array}$$

دشوار

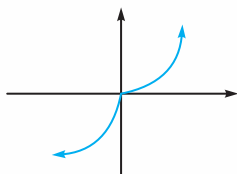
گزینه ۳

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow D_{f^{-1}}: x \geq 0$$

$$D_f: x \geq 0$$

$$R_f: y \geq 0$$

$$y = -x^2 \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow -x = y^2 \Rightarrow -\sqrt{-x} = y \Rightarrow D_{f^{-1}}: x < 0$$



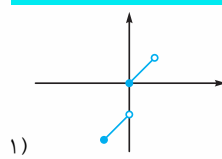
$$D_f: x < 0$$

$$R_f: y < 0$$

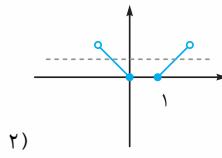
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

دشوار

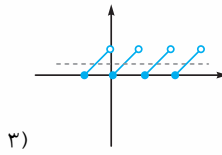
گزینه ۱۰



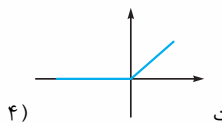
یک به یک است



یک به یک نیست



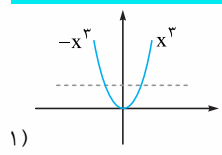
یک به یک نیست



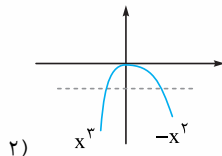
یک به یک نیست

دشوار

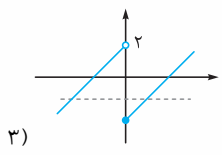
گزینه ۱۱



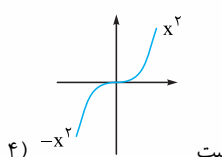
یک به یک نیست



یک به یک نیست



یک به یک نیست



یک به یک است

دشوار

گزینه ۱۲

علاوه بر رسم توابع می‌توان با یک خروجی تعداد ورودی‌ها را حساب کرد پس:

$$1) y = x^5 - x + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 1 = x^5 - x + 1$$

$$\Rightarrow x^5 - x = 0 \Rightarrow x(x^4 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$$

 $x = 0$ و $x = 1$ و $x = -1$ یک خروجی به ازای سه ورودی است پس

یک به یک نیست.

$$2) y = |x| + \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow |x| + \sqrt[3]{x} = 0$$

$$\Rightarrow |x| = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow x = -1, x = 0$$

یک به یک نیست.

$$3) y = |x-2| + \sqrt{x} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2 = |x-2| + \sqrt{x}$$

دشوار

۲۰- گزینه «۴»

f و f^{-1} اگر متقاطع باشند روی نیمساز اول و سوم متقاطع هستند پس می‌توان:
 $x^2 + 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3$
 ریشه ندارد غیرمتقاطع هستند.

دشوار

۲۱- گزینه «۲»

حواستون باشه! تابع چند ضابطه‌ای وقتی یک‌به‌یک است که:

(۱) اولاً در هر ضابطه یک‌به‌یک باشد.

(۲) برد ضابطه‌ها اشتراک نداشته باشند.

$$x > 3 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow 2x + a > 6 + a \Rightarrow y > 6 + a$$

$$x \leq 3 \Rightarrow x - 3a \leq 3 - 3a \Rightarrow y \leq 3 - 3a$$

کافی است.

$$3 - 3a \leq 6 + a \Rightarrow 4a \geq -3 \Rightarrow a \geq -\frac{3}{4}$$

دشوار

۲۲- گزینه «۴»

حواستون باشه! تابع هموگرافیک زمانی وارون‌پذیر نیست که یک‌به‌یک نباشد و زمانی یک‌به‌یک نیست که $ad - bc = 0$ باشد پس:

$$5 - (-8m) = 0 \Rightarrow 5 = -8m \Rightarrow m = -\frac{5}{8}$$

آسان

۲۳- گزینه «۴»

اگر $(x, y) \in f$ پس $(y, x) \in f^{-1}$

اگر $(4, 1)$ از وارون f می‌گذرد پس $(1, 4) \in f$ پس $a = 3$

$$f(x) = 3x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \xrightarrow{(10, 3)} \frac{10-1}{3} = 3 \checkmark$$

متوسط

۲۴- گزینه «۲»

یعنی دو تابع وارون یکدیگرند پس:

$$2x - 3y = b \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{b}{3} = y$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{b}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + \frac{b}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x + \frac{b}{2}$$

پس $f^{-1}(x)$ با $ax + by = 8$ باید برابر باشد پس:

$$ax - 8 = -by$$

$$-\frac{a}{b}x + \frac{8}{b} = y = f^{-1}(x)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{2} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\ \Rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-a}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 6 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{-a}{-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = +6$$

$$a + b \xrightarrow{a=6, b=4} a + b = +2$$

$$\xrightarrow{b=-4, a=6} a + b = +2$$

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

اگر $(x, y) \in f$ باشد آنگاه $(y, x) \in f^{-1}$ پس معکوس گزینه‌ها را صدق می‌دهیم:

$$1)(66, 4) \Rightarrow 4 = 66^3 + \sqrt{66} \quad x$$

$$2)(1, 3) \Rightarrow 3 = 1^3 + \sqrt{1} \quad x$$

$$3)(4, 66) \Rightarrow 66 = 4^3 + \sqrt{4} \quad \checkmark$$

$$4)(2, 1) \Rightarrow 1 = 2^3 + 1 \quad x$$

متوسط

۱۶- گزینه «۴»

با توجه به $g^{-1}(16)$ پس $g(x) = 16$:

$$f(3x - 4) = 16$$

$$(3x - 4, 16) \in f \Rightarrow (16, 3x - 4) \in f^{-1}$$

$$3x - 4 = 16 + 4 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

دشوار

۱۷- گزینه «۲»

با توجه به $g^{-1}(6)$ پس $(x, 6) \in g$

$$6 = f(x) + \sqrt{f(x)} \xrightarrow{f(x)=t} t + \sqrt{t} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{t} + 3)(\sqrt{t} - 2) = 0$$

$$\sqrt{t} = -3 \text{ غلطی}, \sqrt{t} = 2 \Rightarrow \boxed{t=4}$$

$$f(x) = 4 \Rightarrow (x, 4) \in f \Rightarrow (4, x) \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(4) = \sqrt[3]{2(4)} = 2$$

دشوار

۱۸- گزینه «۳»

$$D_{f^{-1}} = R_f, D_f = R_{f^{-1}}$$

پس به‌دست آوردن برد تابع می‌پردازیم:

$$0 \leq \sqrt{x-1} \Rightarrow 0 \geq -\sqrt{x-1}$$

$$3 \geq 3 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \text{چون زیر رادیکال بزرگ‌تر قرار می‌گیرد.}$$

$$\sqrt{3} \geq \sqrt{3 - \sqrt{x-1}} \geq 0 \Rightarrow [0, \sqrt{3}]$$

دشوار

۱۹- گزینه «۴»

ریشه داخل پرانتز $x = 2$ است پس:

$$x \leq 2: f(x) = 2x - 4 + 2x \Rightarrow f(x) = 4x - 4$$

$$\text{برد: } x \leq 2 \Rightarrow 4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

$$x > 2: f(x) = 2x + 4 - 2x \Rightarrow f(x) = 4$$

یک‌به‌یک نیست. پس $f(x) = 4x - 4$ با $D_f: (-\infty, 2]$ و $R_f: (-\infty, 4]$ داریم:

$$y = 4x - 4 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 4]$$



$$D_{\frac{f}{g}} = \{1, 0\} - \{0\} = \{1, 0\}$$

$$\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2}{5} \Rightarrow (1, \frac{2}{5}), \quad \frac{f}{g}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow (0, -2)$$

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{5}), (0, -2)\}$$

$$b) f - g = D_{f-g} = \{D_f \cap D_g\} = \{1, 0\}$$

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 2 - 5 = -3,$$

$$(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 2 - (-1) = 3$$

$$f - g = \{(1, -3), (0, 3)\}$$

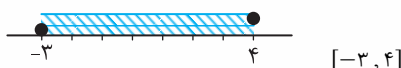
دشوار

-۲

$$1) f + g = \{D_f \cap D_g\}$$

$$D_f : x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

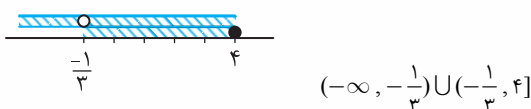
$$D_g : 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$



$$f + g = \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} \quad D_{f+g} = [-3, 4]$$

$$2) D_g : 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

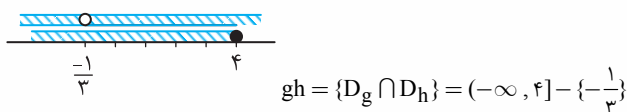
$$D_h : x \neq -\frac{1}{3}$$



$$g - h = \sqrt{4-x} - \frac{x+3}{3x+1} \quad D_{g-h} = (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, 4]$$

$$3) D_g : 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \geq x$$

$$D_h : x \neq -\frac{1}{3}$$



$$gh = (\sqrt{4-x}) \left(\frac{x+3}{3x+1} \right)$$

$$D_{\frac{f}{g}} \Rightarrow \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = [-3, 4] - \{4\} = [-3, 4)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x} = 0 \Rightarrow 4-x = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{4-x}}$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$(f \cdot h)(1) = f(1) \cdot h(1) = (2) \left(\frac{4}{4} \right) = 2$$

متوسط

گزینه «۱»

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 4 \quad D_f : x < 2$$

$$y + 4 = (x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4} = |x-2| \xrightarrow{x < 2} \sqrt{y+4} = -(x-2)$$

$$\Rightarrow x-2 = -\sqrt{y+4} \Rightarrow x = -\sqrt{y+4} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x+4} + 2$$

متوسط

گزینه «۱»

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x^2+1}$$

$$y > 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$y < 0$$

دشوار

گزینه «۲»

$$x \leq 1 \Rightarrow -2x \geq -2 \Rightarrow -2x + 3 \geq 1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} \Rightarrow x \geq 1$$

$$y = -2x + 3 \Rightarrow x = -2y + 3 \Rightarrow x - 3 = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{-2} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$$

$$x > 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} < 1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} \Rightarrow x < 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 3$$

متوسط

گزینه «۳»

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

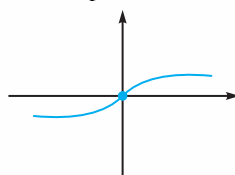
$$D_f = R_{f^{-1}} = y \geq 0$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = x \geq 0$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = -x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$$

$$D_f = R_{f^{-1}} = y < 0$$

$$R_f = D_{f^{-1}} = x < 0$$



بخش ۴

آسان

-۱

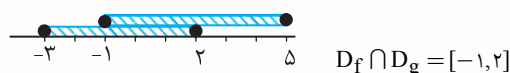
$$1) D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

$$D_f = \{1, -2, 0\} \quad D_g = \{1, 2, 0\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{1, 0\}$$

یعنی در تابع g , y صفر داشته باشیم که نداریم. $g(x) = 0 \Rightarrow$

-۳

دشوار

طبق تعریف کتاب می‌دانیم که شرط $f + g$ داشتن اشتراک دامنه‌هاست پس:

$$D_f = [-3, 2], D_g = [-1, 5]$$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع g می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع f می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & -3 \leq x \leq -1 \\ -1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 3 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

حاصل اشتراک دامنه‌های f و g را به دست آورده و در اشتراک، y های موجود را جمع می‌کنیم.

$$f + g = \begin{cases} -1 + x + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 3 + 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f + g = \begin{cases} x & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

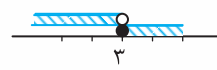
-۴

آسان

برای آن که $f \times g$ موجود باشد باید دامنه آن‌ها اشتراک داشته باشد.

$$D_f : x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow [3, +\infty)$$

$$D_g : 3 - x > 0 \Rightarrow 3 > x \Rightarrow (-\infty, 3)$$

اشتراک $D_f \cap D_g$ به صورت:چون اشتراک تهی است پس $f \times g$ موجود نمی‌باشد.

-۵

دشوار

ابتدا اشتراک دامنه‌ها را بین f و g می‌یابیم:

$$D_f : x \geq 0$$

$$D_g : \{0, 2, 4, 5, 9\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 4, 5, 9\}$$

حال ابتدا $2g$ را بدست می‌آوریم که به معنای ۲ برابر کردن y های g است.

$$2g = \{(0, -6), (-2, 2), (4, 6), (5, 0), (9, 22)\}$$

دامنه قابل قبول برای $\frac{f-g}{2g}$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f-g} = \{0, 4, 5, 9\} \quad D_{2g} = \{0, -2, 4, 5, 9\}$$

$$\{D_{f-g} \cap D_{2g}\} - \{2g(x) = 0\} = \{0, 4, 5, 9\} - \{5\} = \{0, 4, 9\}$$

$$\left(\frac{f-g}{2g}\right)(0) = -\frac{1}{2} \quad \left(\frac{f-g}{2g}\right)(4) = \frac{5}{6} \quad \left(\frac{f-g}{2g}\right)(9) = \frac{1}{11}$$

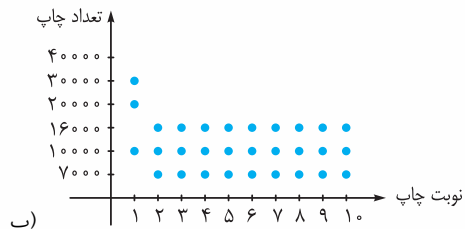
کم‌ترین مقدار به معنای کم‌ترین y است که $\frac{1}{11}$ کم‌ترین مقدار خواهد بود.

-۶

متوسط

$$f(x) = \begin{cases} 10000 & n=1 \\ 7000 & n>1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 20000 & n=1 \\ 9000 & n>1 \end{cases}$$

$$h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 30000 & n=1 \\ 16000 & n>1 \end{cases}$$



-۷

دشوار

ابتدا به دامنه $\sqrt{\frac{f}{g}}$ توجه می‌کنیم:

$$\frac{f}{g} \geq 0$$

باتوجه به شکل ریشه‌های تابع $f \Leftarrow x=0, 1, 3$ و همچنین ریشه‌های تابع $g \Leftarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
f	+	+	+	-	+	+
g	+	+	+	+	+	+
$\frac{f}{g}$	+	+	+	-	+	+

چون در دامنه نیست.

$$\frac{f}{g} \text{ دامنه } [0, 1] \cup \{3\}$$

-۸

متوسط

تابع fog یا $f(g(x))$ به معنای آن است که ابتدا x ها به‌عنوان ورودی در تابع g قرار بگیرند و $g(x)$ به‌عنوان ورودی تابع f استفاده شوند پس:

$$2 \xrightarrow{g} 11 \xrightarrow{f} 7 \Rightarrow (2, 7)$$

$$4 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} 4 \Rightarrow (4, 4)$$

$$6 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} -5 \Rightarrow (6, -5)$$

$$3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} -5 \Rightarrow (3, -5)$$

$$fog(x) = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$$

$$D_{fog(x)} = \{1, -2, 3, 2\}$$

$$gof(x) = \{(-2, -2)\}$$

$$11 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} X$$

$$-2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} -2$$

$$3 \xrightarrow{f} -5 \xrightarrow{g} X$$

$$2 \xrightarrow{f} -5 \xrightarrow{g} X$$

-۹

متوسط

با توجه به دامنه تابع g می‌توانیم آن را به صورت زوج مرتب:

$$g = \{(1, 2)(2, 4)(3, 6)(4, 8) \dots\}$$

$$f = \{(1, 2)(2, 3)(3, 5)(4, 7)\}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f + g = \{(1, 4)(2, 7)(3, 11)(4, 15)\}$$

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 4$$

$$gof = g(f(x)) \quad 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 6 = \{(1, 4)(2, 6)(3, 10)(4, 14)\}$$

$$3 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 10$$

$$4 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{g} 14$$

-۱۰

متوسط

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

 $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ دامنه‌های متفاوتی دارد چون که: $D_{f^{-1}}$ مهم است.

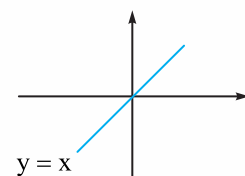
$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow$$

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow D_f \text{ مهم است}$$

$$f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{x-5}{2}\right) + 5 = x$$

$$f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = \frac{2x+5-5}{2} = x$$

ترکیب هر تابع با وارونش برابر تابع همانی می‌شود اما دامنه‌های آن‌ها متفاوت است. در این سؤال $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R}$ است پس شکل هر دو نیمساز ربع اول و سوم است.



-۱۱

دشوار

آ تابع f به معنای آن است که هر کالای گران‌تر از ۱۲۰۰ تومان، مشمول ۴۰۰ تومان تخفیف می‌شود و تابع g یعنی هر کالای گران‌تر از ۱۲۰۰ تومان، مشمول ۲۵ درصد تخفیف می‌شود چون ۷۵ درصد آن دریافت می‌شود.

$$\text{ب) } fog = f(g(x)) = 0.75x - 400$$

یعنی به ازای هر کالای گران‌تر از ۱۲۰۰ ابتدا ۲۵ درصد تخفیف و ۴۰۰ تومان دیگر نیز از بهایش کاسته می‌شود.

$$\text{ت) } 0.75x - 400 < 0.75x - 300 \Rightarrow -400 < -300$$

این نامعادله بیان می‌کند که خرید با تخفیف از نوع fog همواره ارزان‌تر از خرید با تخفیف نوع gof است.

-۱۲

دشوار

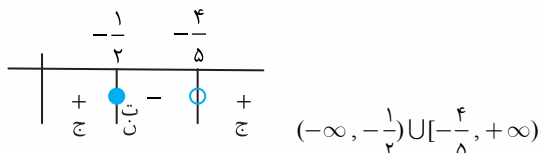
$$\text{آ) } fog = f(g(x)) = \sqrt{\frac{x+2}{2x+1}} + 2 = \sqrt{\frac{x+2+4x+2}{2x+1}} = \sqrt{\frac{5x+4}{2x+1}}$$

$$\text{ب) } D_g : x \neq -\frac{1}{2} \quad D_f : x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$D_{fog} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -\frac{1}{2} \mid \frac{x+2}{2x+1} \geq -2\}$$

$$= \{x \neq -\frac{1}{2} \mid \frac{x+2}{2x+1} + 2 \geq 0\} = \{x \neq -\frac{1}{2} \mid \frac{x+2+4x+2}{2x+1} \geq 0\}$$

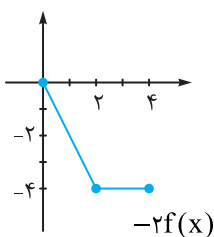
$$= \{x \neq -\frac{1}{2} \mid \frac{5x+4}{2x+1} \geq 0\} = \{x \neq -\frac{1}{2} \mid (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [-\frac{4}{5}, +\infty)\}$$



-۱۳

متوسط

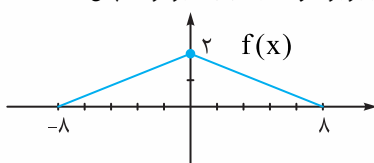
حواستون باشه! $y = kf(x)$ به معنای آن است که y ‌های تابع f در (-2) ضرب شود چون ضریب منفی است به معنای قرینه شدن تمام y ‌های شکل است و در نتیجه شکل نسبت به محور x ‌ها قرینه می‌شود. پس:



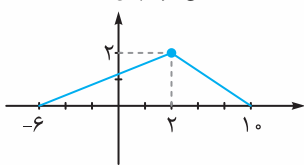
-۱۴

دشوار

حواستون باشه! ابتدا نمودار $f(x)$ را می‌خواهیم به دست بیاوریم که به معنای آن است که هر x باید دو برابر شود تا به $f(x)$ برگردد. پس:



حال هر نقطه به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌شود پس:



-۱۵

دشوار

$$\text{الف) } D_f \cap D_g = \{4\}$$

$$D_f : 4 - x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x$$

$$D_g : x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

چون فقط یک نقطه مشترک است $(f \times g)(4) = f(4) \times g(4) = 0 \times 0 = 0$

$$\text{ب) } D_{fog} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 4 \mid \sqrt{x-4} \leq 4\}$$

$$\{x \geq 4 \mid x - 4 \leq 16\}$$

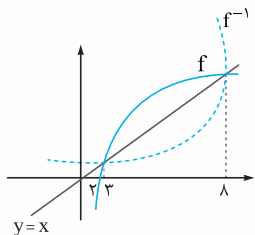
$$\{x \geq 4 \mid x \leq 20\} \Rightarrow [4, 20]$$

$$f(g(x)) = \sqrt{4 - \sqrt{x-4}}$$

متوسط

۳- گزینه «۴»

با توجه به نمودار می‌توان به راحتی f^{-1} را رسم کرد پس:



$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \text{ دامنه رادیکال}$$

$$x \geq f^{-1}(x)$$

بازه‌ای که وارون تابع f از $y = x$ پایین‌تر است دقیقاً $[3, 8]$ است.

متوسط

۴- گزینه «۴»

بسیار مراقب باشید که $D_{f^{-1} \circ f}$ با $D_{f \circ f^{-1}}$ برابر نخواهد بود.

$$D_{f^{-1} \circ f} = f^{-1}(f(x))$$

$$D_f : x^3 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$$

پس باید دامنه رسم تابع مورد نظر $x \geq 2$ باشد پس گزینه ۴ درست است.

متوسط

۵- گزینه «۱»

ابتدا g^{-1} را به دست آورید:

$$g^{-1} = \{(-1, 2)(4, -1)(-2, 3)(-3, 4)\}$$

$$g^{-1}(f(a)) = 3 \Rightarrow (f(a), 3) \in g^{-1} \Rightarrow f(a) = -2 \Rightarrow (a, -2) \in f$$

چون خروجی تابع f -2 است پس باید در ضابطه $-\sqrt{x}$ صدق کند پس:

$$-\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow -a = 4 \Rightarrow a = -4$$

متوسط

۶- گزینه «۳»

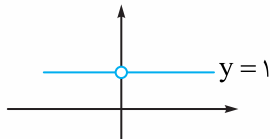
ابتدا دامنه $f \cdot g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f \cdot g = (x + \frac{1}{x})(\frac{x}{x^2 + 1}) = (\frac{x^2 + 1}{x})(\frac{x}{x^2 + 1}) = 1$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$



آسان

۷- گزینه «۴»

با توجه به مقدار توابع از روی شکل:

$$f(2) = 2$$

$$g(4) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow g(1) = -2$$

$$\text{حاصل} = \frac{2+0}{-2} = -1$$

متوسط

۱۶-

حواستون باشه‌ها اگر تابع بیرونی داده شده باشد از تعریف $f(g(x))$ استفاده

می‌کنیم یعنی:

$$f(g(x)) = 2g(x) - 5$$

$$2g(x) - 5 = 2x + 1$$

$$2g(x) = 2x + 6$$

$$g(x) = x + 3$$

آسان

۱۷-

حواستون باشه‌ها! اگر در ترکیب توابع تابع داخلی داده شود آن را t می‌گیریم:

$$g(x+3) = x^2 - 1 \xrightarrow{x+3=t} x = t-3 \Rightarrow g(t) = (t-3)^2 - 1$$

$$\text{پس } g(x) = (x-3)^2 - 1$$

متوسط

۱۸-

با استفاده از تعریف معکوس تابع:

$$f^{-1}(g(a)) = 5 \Rightarrow (g(a), 5) \in f^{-1}$$

$$(5, g(a)) \in f$$

$$f(5) = g(a) \xrightarrow{f(5)=2(5)-3} 7 = g(a)$$

$$(a, 7) \in g$$

پس a باید صفر باشد که $(0, 7) \in g$.



متوسط

۱- گزینه «۱»

ابتدا در دامنه‌های مشترک $f+g$ و $f-g$ را حساب می‌کنیم:

$$f+g = \{(1, 4)(2, 8)(4, 8)\}, f-g = \{(1, 0)(2, -2)(4, 2)\}$$

$$(f+g) \circ (f-g)$$

$$1 \xrightarrow{f-g} 0 \Rightarrow x$$

$$2 \xrightarrow{f-g} -2 \Rightarrow x$$

$$4 \xrightarrow{f-g} 2 \xrightarrow{f+g} 8$$

$$(f+g) \circ (f-g) = \{(4, 8)\}$$

متوسط

۲- گزینه «۲»

حواستون باشه‌ها! $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$

$$(f \circ g)^{-1}(a) = 8 \Rightarrow (a, 8) \in (f \circ g)^{-1} \Rightarrow (8, a) \in f \circ g$$

$$f(g(x)) = f(g(8)) = a$$

$$f(7) = a$$

پس $a = 3$ است.

۸- گزینه «ا» آسان

ابتدا با توجه به $f(g(x))$ ، $g(x)$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$f(g(x)) = (g(x) - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$(g(x) - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$

$$|g(x) - \frac{1}{2}| = |x + \frac{1}{2}|$$

$$g(x) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = x + 1$$

$$g(x) + f(x) = x^2 + 1 + x^2 - x - 2 = x^2 - 1$$

و یا:

$$g(x) - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -x$$

$$f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 - x = x^2 - 2x - 2$$

۹- گزینه «ا» آسان

$$f(x - [x]) = [x - [x]] \xrightarrow{\text{چون } [x] \text{ عدد صحیح است خارج می شود.}} [x] - [x] = 0$$

$$f(0) = [0] = 0$$

۱۰- گزینه «ا» آسان

$$f(g(1 - \sqrt{2})) = f(6 - 4\sqrt{2}) = |6 - 4\sqrt{2}| = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 = (2 - \sqrt{2})^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$g(f(1 - \sqrt{2})) = g(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 2$$

$$\text{حاصل} = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

۱۱- گزینه «ب» دشوار

$$g(f(x)) = -2 \xrightarrow{g(x) = x^2 + x - 2} g(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$-2 = (f(x) + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{4} = (f(x) + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = f(x) + \frac{1}{2}$$

$$0 = f(x)$$

$$0 = [x] + [-x]$$

می دانیم که تابع معروف $[x] + [-x]$ زمانی صفر خواهد بود که $x \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -1$$

$$[x] + [-x] = -1$$

همچنین تابع معروف $[x] + [-x] = -1$ است زمانی که $x \notin \mathbb{Z}$ با اجتماع دوجواب به دست آمده $\mathbb{R}$ جواب خواهد بود.

۱۲- گزینه «ب» آسان

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow (g(2a), 6) \in f^{-1} \Rightarrow (6, g(2a)) \in f$$

پس $g(2a) = 3$ است پس:

$$(2a, 3) \in g \Rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۱۳- گزینه «ب» آسان

می دانیم که $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ پس:

$$(f \circ g)^{-1}(a) = \lambda \Rightarrow (a, \lambda) \in (f \circ g)^{-1} \Rightarrow (\lambda, a) \in f \circ g$$

$$f(g(\lambda)) = a \xrightarrow{g(\lambda) = \sqrt{\lambda(\lambda+9)}} f(\lambda) = a \Rightarrow a = 3$$

۱۴- گزینه «ب» دشوار

ابتدا تابع g را به دست می آوریم:

$$g(f(x)) = \lambda x^2 + 22x + 20$$

$$g(2x+3) = \lambda x^2 + 22x + 20 \xrightarrow{\substack{2x+3=t \\ x = \frac{t-3}{2}}} g(t) = \lambda \left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$

$$g(t) = \lambda \left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$

$$g(t) = \lambda \frac{(t-3)^2}{4} + 22 \frac{t-3}{2} + 20 \Rightarrow g(t) = \frac{\lambda}{4}(t-3)^2 + 11(t-3) + 20$$

$$g(t) = \frac{\lambda}{4}(t^2 - 6t + 9) + 11t - 33 + 20 = \frac{\lambda}{4}t^2 - \frac{3\lambda}{2}t + \frac{9\lambda}{4} + 11t - 13$$

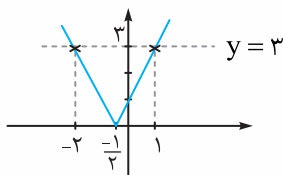
$$g(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 - x + 5$$

$$f(g(x)) = \frac{\lambda}{4}(2x^2 - x + 5) + 3 = \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x + \frac{5\lambda}{4} + 3 = \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda}{4}x + \frac{5\lambda+12}{4}$$

۱۵- گزینه «ب» دشوار

حال مساحت ناحیه محدود به $|2x+1|$ و $y=3$ را به دست می آوریم.

$$|2x+1| = 3$$



$$\begin{cases} 2x+1=3 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-3 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

پس مثلثی با $h=3$ است و قاعده $x=1$ و $x=-2$ است پس قاعده ۳ واحد

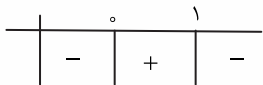
و ارتفاع ۳ واحد داریم.

$$S = \frac{3 \times 3}{2} = 4.5$$

متوسط

۲۰- گزینه «۲»

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g : x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) = 0$$



$$D_{\text{gof}} = \{D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{\mathbb{R} \mid \frac{1-x^2}{1+x^2} \in [0, 1]\} = \{\mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1\}$$

$$0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2 - (1+x^2)}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow -2x^2 \leq 0 \Rightarrow \mathbb{R}$$

از اشتراک جواب قسمت اول و دوم داریم:

$$= [-1, 1]$$



متوسط

۱-

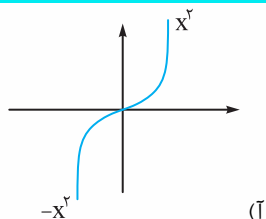
(آ) نادرست - برد باید زیرمجموعه هم‌دامنه باشد اما $[-1, 5] \not\subset [-2, 4]$

(ب) درست - چون یک‌به‌یک نیست.

(پ) نادرست - تابع معروف $y = x - [x]$ دارای برد $[0, 1)$ است پس $y = 2x - 2[x]$ دارای برد $[0, 2)$ است.

متوسط

۲-



(آ)

(ب) دارای دامنه‌های برابر و به‌ازای x ‌های برابر، $f(x) = g(x)$ باشد.

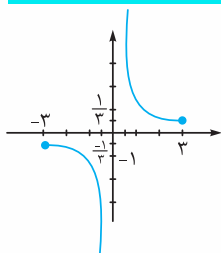
(پ) $R = y \leq 1$ و $D : 2 - x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$

(ت) ۸

(ث) $\mathbb{R} - \{3\}$

آسان

۳-



دشوار

۱۶- گزینه «۲»

چون تابع f در نقاط 6 و $-\frac{1}{4}$ ریشه دارد پس:

$$f(6) = 0$$

$$f(-\frac{1}{4}) = 0$$

$$(f \circ g)(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 6 \text{ یا } g(x) = -\frac{1}{4}$$

$$x - \sqrt{x} = 6 \text{ یا } x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0$$

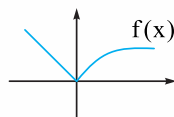
$$x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} = -2 \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{4})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

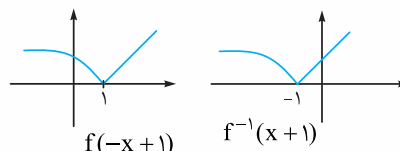
دشوار

۱۷- گزینه «۳»

ابتدا از روی $f(x-1)$ به نمودار $f(x)$ می‌رسیم:



نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به سمت چپ و سپس نسبت به محور y ‌ها قرینه می‌کنیم.



متوسط

۱۸- گزینه «۲»

با توجه به انتقال توابع می‌توان گفت: $-2 \leq x \leq 4$

$$\xrightarrow{\text{ضرب در ۵}} -2 \leq \frac{3x-2}{5} \leq 4$$

$$-10 \leq 3x-2 \leq 20 \Rightarrow -8 \leq 3x \leq 22 \Rightarrow -\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{22}{3}$$

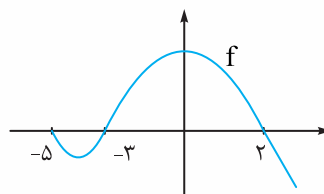
پس دامنه $(-\frac{8}{3}, \frac{22}{3}]$ ، $f(\frac{3x-2}{5})$ است.

دشوار

۱۹- گزینه «۴»

ابتدا از روی $f(x-2)$ نمودار $f(x)$ را می‌یابیم و از روی نمودار آن دامنه

$$x \cdot f(x) \geq 0 \text{ را می‌یابیم.}$$



x	-5	-3	0	2
x	-	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	-
$xf(x)$	-	+	-	-

$$[-5, -2] \cup [0, 2]$$

$$xy + 3y = 2x - 1$$

$$xy - 2x = -3y - 1$$

$$x(y - 2) = -3y - 1$$

$$x = \frac{-3y - 1}{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-3x - 1}{x - 2}$$

دشوار

-۹

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x < 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2 & -3 \leq x < 0 \\ 2x-2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f \circ g = \begin{cases} (x+2) - (-2) & -2 \leq x < 0 \\ 2 - (2x-2) & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f \circ g = \begin{cases} x+4 & -2 \leq x < 0 \\ -2x+4 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

متوسط

-۱۰

$$D_f: 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x \quad D_g: x \neq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\}$$

$$= \{(-\infty, 2) \cup (2, 4]\} - \{x = 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4]$$

$$(f \circ g)(-5) = f(-5) - 3g(-5) = 3 - 3\left(\frac{-6}{-5}\right) = 3 - \frac{18}{5} = \frac{3}{5}$$

متوسط

-۱۱

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad D_f: x \neq 0, D_g: 4-x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x$$

$$= \{x \leq 4 \mid \sqrt{4-x} \neq 0\}$$

$$\{x \leq 4 \mid 4 \neq x\} = (-\infty, 4)$$

$$\text{ب) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}$$



متوسط

-۱

آ) نادرست - چون برد دو تابع یکسان باشد الزاماً دو تابع با یکدیگر برابر نخواهند بود.

ب) نادرست - برد زیرمجموعه هم دامنه است پس هم دامنه شامل تمام اعضای برد است.

متوسط

-۴

ابتدا دامنه تابع را بررسی می‌کنیم:

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = D_g$$

حال باید به ازای x های یکسان y برابر تولید کنند.

$$g(1) = 4$$

$$f(1) = \frac{4-1}{1+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow g(1) \neq f(1)$$

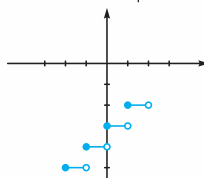
پس دو تابع برابر نیستند.

متوسط

-۵

نمودار $y = [x] - 3$ را بررسی می‌کنیم:

x	$[x]$	$[x] - 3$
$-2 \leq x < -1$	-2	-5
$-1 \leq x < 0$	-1	-4
$0 \leq x < 1$	0	-3
$1 \leq x < 2$	1	-2



آسان

-۶

اگر براکت ۵ شود یعنی داخل براکت بین ۵ تا ۶ بوده است.

$$[2x - 3] = 5 \Rightarrow [2x] - 3 = 5 \Rightarrow [2x] = 8$$

$$8 \leq 2x < 9 \Rightarrow 4 \leq x < 4.5$$

دشوار

-۷

$$[2x] = 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$[2x] = 2 \Rightarrow 2 \leq 2x < 3 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}$$

$$[2x] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2x < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$$

از اجتماع بازه‌های x خواهیم داشت:

$$x = \left[\frac{1}{2}, 2\right)$$

دشوار

-۸

تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد پس:

$$y_1 = y_2$$

$$\frac{2x_1 - 1}{x_1 + 3} = \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 3}$$

$$2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 1 = 2x_2x_1 + 6x_2 - x_1 - 1$$

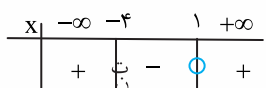
$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{یک‌به‌یک است}$$

$$y = \frac{2x - 1}{x + 3}$$

دشوار

-۵



$$D_g : (-\infty, -4) \cup [1, +\infty)$$

$$D_f : x \neq 5$$

$$D_{fog} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad D_g : \frac{x-1}{x+4} \geq 0$$

$$D_{fog} = \{(-\infty, -4) \cup [1, +\infty) \mid \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} \neq 5\}$$

$$D_{fog} = \{(-\infty, -4) \cup [1, +\infty) \mid \frac{x-1}{x+4} \neq 25\}$$

$$= \{(-\infty, -4) \cup [1, +\infty) \mid x-1 \neq 25x+100\}$$

$$\{(-\infty, -4) \cup [1, +\infty) \mid -101 \neq 24x\}$$

$$\{(-\infty, -4) \cup [1, +\infty) \mid -\frac{101}{24} \neq x\}$$

$$= (-\infty, -\frac{101}{24}) \cup (-\frac{101}{24}, -4) \cup [1, +\infty)$$

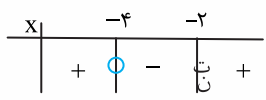
متوسط

-۶

$$D_f : 4+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > -2 = (-2, +\infty) = D_f$$

$$2+x > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$D_g : \frac{4+x}{2+x} \geq 0$$



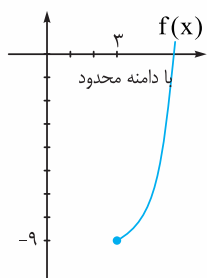
$$(-\infty, -4] \cup (-2, +\infty) = D_g$$

چون دامنه دو تابع برابر نیست پس تابع‌ها برابر نیستند.

دشوار

-۷

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9 \quad \text{محدود } D = [3, +\infty)$$



$$f(x) = (x-3)^2 - 9$$

$$D = [3, +\infty)$$

$$y+9 = (x-3)^2$$

$$\sqrt{y+9} = x-3$$

$$\sqrt{y+9} + 3 = x$$

$$\sqrt{x+9} + 3 = f^{-1}(x)$$

دشوار

-۸

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(6) = g^{-1}(f^{-1}(6))$$

ابتدا $f^{-1}(6)$ را به دست می‌آوریم:

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\sqrt{x} = -3 \quad \text{غرضی} \quad \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس: $f^{-1}(6) = 4$ است حال $g^{-1}(4)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2x+1}{x+2} = 4 \Rightarrow 2x+1 = 4x+8 \Rightarrow -7 = 2x \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

دشوار

-۹

آ) ابتدا $x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9$ را به مربع کامل تبدیل کنید:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 = (x-3)^2 - 9 \quad \text{و}$$

$$6x - x^2 = -(x^2 - 6x + 9 - 9) = -(x-3)^2 + 9$$

پس:

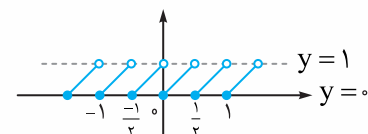
$$f(x) = [(x-3)^2 - 9] - [-(x-3)^2 + 9]$$

$$f(3 - \sqrt{5}) = [(3 - \sqrt{5} - 3)^2 - 9] - [-(3 - \sqrt{5} - 3)^2 + 9] =$$

$$= [-4] - [4] = -8$$

ب) g - دو تابع معکوس یکدیگر اگر با هم ترکیب شوند حاصل آن تابع همانی می‌شود.

پ) $(0, 1)$ با توجه به شکل معروف آن



دشوار

-۱۰

روش اول:

ابتدا fog^{-1} را معنی کنیم:

$$f(g^{-1}(x)) = \frac{1}{x^2} \cdot f(4) \rightarrow g^{-1}(x) = 4 \Rightarrow (x, 4) \in g^{-1}$$

$$(4, x) \in g \Rightarrow \frac{2(4)-1}{4-3} = x \Rightarrow \boxed{x=7}$$

$$\text{پس } f(g^{-1}(7)) = \frac{1}{7^2} \quad \text{پس:}$$

$$(fog^{-1})(7) = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

روش دوم: می‌توانیم g^{-1} را به دست آوریم:

$$y = \frac{2x-1}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = 2x - 1 \Rightarrow xy - 2x = 3y - 1$$

$$x(y-2) = 3y-1 \Rightarrow x = \frac{3y-1}{y-2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

حال $g^{-1}(x) = 4$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{3x-1}{x-2} = 4 \Rightarrow 3x-1 = 4x-8 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

$$f(4) = \frac{1}{4^2}$$

$$\text{پس } f(4) = \frac{1}{4^2} \quad \text{در نتیجه:}$$

آسان

-۱۱

$$g^{-1} = \{(4, 0)(5, 2)(3, -1)(7, 6)\} \quad \text{آ)}$$

$$f + g^{-1} = \{(4, -1)(5, 9)(3, 4)\}$$

ب) $(fog)(x) = f(g(x))$

$$0 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} -1$$

$$2 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 9$$

$$-1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 4$$

$$6 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} x$$

$$fog = \{(0, -1)(2, 9)(-1, 5)\}$$



متوسط

۱- گزینه «ا»

ابتدا f^{-1} را به دست آوریم:

$$f^{-1} = \{(2, 1)(5, 2)(4, 3)(6, 4)\}$$

f^{-1} را با g ترکیب کنیم:

$$2 \xrightarrow{f^{-1}} 1 \xrightarrow{g} x$$

$$5 \xrightarrow{f^{-1}} 2 \xrightarrow{g} 3$$

$$g \circ f^{-1} = g(f^{-1}(x))$$

$$4 \xrightarrow{f^{-1}} 3 \xrightarrow{g} 1$$

$$6 \xrightarrow{f^{-1}} 4 \xrightarrow{g} 2$$

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3)(4, 1)(6, 2)\}$$

حالا اعمال جبری $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ را با داشتن اشتراک دامنه‌های آن‌ها به دست

می‌آوریم:

$$D_g = \{2, 4, 5, 3\}$$

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{5, 4, 6\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{5, 4\} \Rightarrow \frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(5, \frac{6}{3})(4, \frac{2}{1})\}$$

$$= \{(5, 2)(4, 1)\}$$

متوسط

۲- گزینه «ب»

در ابتدا برای به دست آوردن f^{-1} باید تابع یک‌به‌یک باشد چون $f(x)$ در بازه $x \geq 1$ هست پس $f(x)$ یک‌به‌یک است. $f(x)$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4$$

$$f(x) = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow y = (x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y + 4 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4} = x-1$$

$$\sqrt{y+4} + 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = f^{-1}(x)$$

چون درباره نقطه تقاطع f^{-1} و g صحبت شده است پس باید:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x+4} + 1 = \frac{x-9}{2}$$

$$2\sqrt{x+4} + 2 = x - 9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x - 11$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(x+4) = x^2 - 22x + 121$$

$$4x + 16 = x^2 - 22x + 121 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$$

$$\Rightarrow (x-21)(x-5) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{صدق در معادله}} x_1 = 21 \Rightarrow 2\sqrt{21+4} = 21-11$$

$$x_1 = 21, x_2 = 5 \Rightarrow 10 = 10 \text{ قق}$$

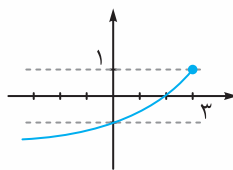
$$\longrightarrow x_2 = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5+4} = 5-11$$

$$\Rightarrow 6 = -6 \text{ غق}$$

متوسط

۹-

$$f(x) = 1 - \sqrt{3-x}$$



چون هر خط موازی محور x ها شکل را در یک نقطه قطع می‌کند پس یک‌به‌یک است.

$$y = 1 - \sqrt{3-x}$$

$$x = 1 - \sqrt{3-y}$$

$$\sqrt{3-y} = 1-x$$

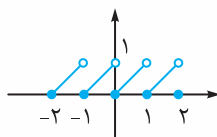
$$3-y = (1-x)^2$$

$$3 - (1-x)^2 = y \Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - (1-x)^2$$

دشوار

۱۰-

x	$[x]$	$x - [x]$	$\frac{x}{y}$	$\frac{-2}{-1}$
$-2 \leq x < -1$	-2	$x + 2$	y	0
$-1 \leq x < 0$	-1	$x + 1$	y	0
$0 \leq x < 1$	0	x	y	0
$1 \leq x < 2$	1	$x - 1$	y	0
$x = 2$	2	$x - 2$	y	0



دشوار

۱۱-

ابتدا با توجه به تعیین علامت محدوده x را مشخص می‌کنیم:

x	$\frac{-1}{3}$	2
	$-$	$+$

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6$$

$[3x]$ به معنای اعداد صحیح در این بازه است.

$$-1 < 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1$$

$$0 \leq 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0$$

$$1 \leq 3x < 2 \Rightarrow [3x] = 1$$

$$2 \leq 3x < 3 \Rightarrow [3x] = 2$$

$$3 \leq 3x < 4 \Rightarrow [3x] = 3$$

$$4 \leq 3x < 5 \Rightarrow [3x] = 4$$

$$5 \leq 3x < 6 \Rightarrow [3x] = 5$$

$$3x = 6 \Rightarrow [3x] = 6$$

دشوار

۶- گزینه «۲»

حواستون باشه! وارون کردن بعضی از توابع کار ساده‌ای نیست پس بهتر آن است که f را با نیمساز ناحیه اول و سوم قطع دهیم. به جای آن که f و f^{-1} را قطع دهیم چون اگر تابع f را قطع کرده باشد این تقاطع روی نیمساز ناحیه اول و سوم اتفاق افتاده است.

حالا چون f^{-1} و f نسبت به $y = x$ قرینه‌اند، خود f نیز $y = -x$ را قطع می‌کند.

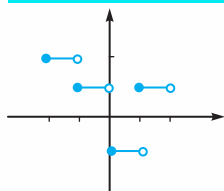
$$x - \frac{2}{x} = -x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(x) = 1$$

پس حالا که نمودار f خط $y = x$ را در نقطه $(-1, 1)$ قطع می‌کند پس f^{-1}

در نقطه $(1, -1)$ قطع می‌کند پس $x = 1$.

متوسط

۷- گزینه «۲»



$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} -\frac{3}{2} \leq 3x < \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \xrightarrow{[3x]} [3x] = -2 \Rightarrow 2|[3x]| - 1 \Rightarrow y = 3$$

$$-1 \leq 3x < 0 \xrightarrow{[3x]} [3x] = -1 \Rightarrow 2|[3x]| - 1 \Rightarrow y = 0$$

$$0 \leq 3x < 1 \xrightarrow{[3x]} [3x] = 0 \Rightarrow 2|[3x]| - 1 \Rightarrow y = -1$$

$$1 \leq 3x < \frac{3}{2} \xrightarrow{[3x]} [3x] = 1 \Rightarrow 2|[3x]| - 1 \Rightarrow y = 1$$

در نتیجه با توجه به گزینه‌ها و y های تولید شده گزینه «۲» پاسخ است.

متوسط

۸- گزینه «۴»

حواستون باشه! نقطه تلاقی دو نمودار یعنی دو نمودار x و y یکسانی دارند پس:

$$2y = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$x = \sqrt{\frac{x^2}{2} + 3} - \sqrt{\frac{x^2}{2} - 3} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$x^2 = \frac{x^2}{2} + 3 + \frac{x^2}{2} - 3 - 2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 9}$$

$$x^2 = x^2 - 2\sqrt{\frac{x^2}{4} - 9} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 9 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\text{با جای گذاری } x \text{ در عبارت } y = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

بنابراین نقطه تلاقی دو شکل $(\sqrt{6}, 3)$ است پس فاصله آن تا مبدأ مختصات:

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{6 + 9} = \sqrt{15}$$

۳- گزینه «۱»

متوسط

حل این سؤال به روش‌های مختلفی می‌تواند باشد که ما به یک روش اشاره می‌کنیم:

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(20) = g^{-1}(f^{-1}(20))$$

ابتدا مقدار $f^{-1}(20)$ را حساب می‌کنیم. $f^{-1}(20)$ یعنی در تابع f $y = 20$ است:

$$20 = x + \sqrt{x} \Rightarrow x + \sqrt{x} - 20 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 4) = 0$$

$$\sqrt{x} = -5 \text{ غلطی}, \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$\text{پس: } f^{-1}(20) = 16$$

حالا $g^{-1}(16)$ را حساب می‌کنیم که به معنای آن است که در تابع g به جای $y = 16$ جای گذاری کنیم:

$$\frac{9x + 6}{1 - x} = 16 \Rightarrow 9x + 6 = 16 - 16x \Rightarrow 25x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

برد تابع $g \circ f$ یعنی خروجی تابع $g(f(x))$ است. پس ابتدا خروجی $f(x)$ پیدا می‌کنیم.

حواستون باشه! خروجی تابع معروف $ax - [ax]$ که به نام باد در چمن معروف است $[0, 1)$ است.

خروجی تابع $f(x)$ ورودی تابع $g(x)$ است پس ورودی تابع $g(x)$ به صورت $[0, 1)$ است.

$$g(x) = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$= -((x - 2)^2 - 4) = -(x - 2)^2 + 4$$

چون در بازه $[0, 1)$ تابع $g(x)$ صعودی است پس با جای گذاری نقاط انتهایی بازه در $g(x)$ می‌توان به خروجی تابع $g(x)$ رسید پس:

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = -(-2)^2 + 4 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow g(1) = -(1 - 2)^2 + 4 = 3$$

پس خروجی نهایی به صورت $[0, 3)$ است.

متوسط

۵- گزینه «۳»

چون $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است پس $g(12)$ یعنی در تابع f به جای y ۱۲ استفاده کنیم و $g(4)$ یعنی در تابع $f(x)$ به جای y از ۴ استفاده کنیم:

$$x + \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 12 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$\sqrt{x} = -4 \text{ غلطی}, \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(12) = 9$$

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\sqrt{x} = -3 \text{ غلطی}, \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g(6) = 4$$

$$\text{پس } 13 = 9 + 4 = g(4) + g(12)$$

متوسط

۱۲- گزینه «۴»

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5x^2 + 11$$

پس با جای گذاری $f(x) = 2x$ داریم:

$$g(2x) = 5x^2 + 11$$

$$2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

$$g(t) = 5\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 11 \Rightarrow g(t) = \frac{5t^2}{4} + 11 \Rightarrow g(x-7) = \frac{5(x-7)^2}{4} + 11$$

$$g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11$$

کمترین مقدار این تابع زمانی رخ می‌دهد که $x = 7$ باشد و مقدار آن ۱۱ خواهد بود.

متوسط

۱۳- گزینه «۲»

با استفاده از تعریف ترکیب توابع اگر $g(f(g(x+2))) = 0$ باشد در مرحله به دنبال ورودی آن هستیم که در تابع g و خروجی صفر ایجاد کرده باشد که با توجه به شکل ورودی ۲ خروجی صفر تولید کرده است پس:

$$f(g(x+2)) = 2$$

در مرحله بعدی به دنبال ورودی هستیم که در تابع f خروجی ۲ تولید کرده باشند پس:

$$\begin{aligned} f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| = 2 &\Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow x = 6 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}x - 1 = -2 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

پس ورودی‌های تابع f ۶ و ۲ هستند پس:

که با توجه به شکل g محل برخورد این نقاط دو x متفاوت تولید می‌کند پس معادله

$$g(x+2) = 6$$

$$\text{و} \quad 2 \text{ ریشه دارد.} \Rightarrow$$

$$g(x+2) = -2$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$f(x) = y = (\sqrt{x} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |\sqrt{x} - 1| \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1$$

$$x = (\sqrt{y} + 1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x) = (\sqrt{x} + 1)$$

$$g \circ g(1) = g(g(1)) = g(4) = 9$$

دشواری

۱۵- گزینه «۴»

محل برخورد f^{-1} با $y = 12 - x$ نقطه‌ای است به عرض ۱۰.

با جای گذاری $y = 10$ در $y = 12 - x$ محل برخورد f^{-1} با y نقطه $(2, 10)$ به دست می‌آید پس $(10, 2)$ در تابع f صدق می‌کند.

$$2 = \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}}$$

$$4 = 10 - 2\sqrt{10m - 1}$$

$$2\sqrt{10m - 1} = 6 \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow 10m - 1 = 9 \Rightarrow 10m = 10 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

پس سؤال $f(1+4)$ را می‌خواهد در نتیجه:

$$f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5 - 1}} = \sqrt{5 - 4} = 1$$

۹- گزینه «۱»

متوسط

$$f \circ f \circ f(\sqrt{2}) = f(f(f(\sqrt{2})))$$

ابتدا $f(\sqrt{2})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(2)}{3\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس $f(f(\frac{\sqrt{2}}{2}))$ باید محاسبه شود در نتیجه این بار $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{گویا}} \sqrt{2}$$

پس $f(\sqrt{2})$ مورد سؤال قرار گرفته است که ابتدا محاسبه کردیم و برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است.

متوسط

۱۰- گزینه «۴»

ابتدا عبارت داده شده را تعیین علامت کنید:

$$\begin{array}{c|cc} & -\frac{1}{3} & 2 \\ \hline x & 3 & 2 \\ 4-2x & + & - \\ 3x-1 & - & + \\ y & - & + \end{array} \quad \left(-\frac{1}{3}, 2\right]$$

$$4 - 2x = 0 \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

پس $-\frac{1}{3} < x \leq 2$ است حال طرفین در عدد ۳ ضرب شود تا ۳x ساخته شود:

$$-1 < 3x \leq 6$$

$[3x]$ به معنای اعداد صحیح بین ۱- تا ۶ است پس:

$$[3x] = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

آسان

۱۱- گزینه «۲»

اگر (x, y) از وارون تابع f عبور کند پس (y, x) از خود تابع f عبور می‌کند پس می‌توان وارون گزینه‌ها را در صورت سؤال امتحان کرد و با رد گزینه به جواب درست رسید.

$$1) (-1, -2) \xrightarrow{f^{-1}} (-2, -1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} -1$$

$$= (-2)^3 - (-2) + 1 \Rightarrow -1 \neq -8 + 2 + 1$$

$$2) \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{f^{-1}} \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{5}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 \checkmark$$

$$3) (1, 2) \xrightarrow{f^{-1}} (2, 1) \Rightarrow 1 = 2^3 - 2 + 1 \Rightarrow 1 \neq 8 - 2 + 1$$

$$4) \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{8}\right) \xrightarrow{f^{-1}} \left(-\frac{11}{8}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq \left(-\frac{11}{8}\right)^3 - \left(-\frac{11}{8}\right) + 1$$



$$2 + 2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{2} \Rightarrow 2 - \frac{9}{2} - 3m \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{13}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{m \geq -\frac{9}{4}} \quad (1)$$

همچنین چون شرط وارون پذیری یک به یک بودن تابع است و سهمی به طور کلی یک به یک نیست پس با توجه به رأس سهمی:

$$x_s = m \Rightarrow 2 + 2m^2 - m^2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 < \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{3}{\sqrt{2}} < m < \frac{3}{\sqrt{2}}} \quad (2)$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم: $m = -2$

$$f^{-1}(19) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -19 \Rightarrow 2 - 4\alpha - \alpha^2 = -19$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 21 = 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 7) = 0$$

$$\alpha = -7 \text{ ق ق } , \alpha = 3 \text{ ق ق } \Rightarrow$$

متوسط

۱۹- گزینه «پ»

چون x باید عدد صحیح باشد پس $(y^2 - 1)$ باید شمارنده ۷۲ و از طرفی y هم باید عدد صحیح باشد پس:

$$y^2 - 1 = -1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} y^2 - 1 = 3 &\Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ y^2 - 1 = 8 &\Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \\ y^2 - 1 = 24 &\Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

x های یکسان و y متفاوت ایجاد می کنند.

پس با حذف حداقل ۳ عضو می توان f تابع باشد.

دشوار

۲۰- گزینه «پ»

چون خط را در نقطه ای به عرض $7/2$ قطع می کند پس نقطه $(x, 7/2)$ در خط صدق می کند:

$$5(7/2) - 10x = 12$$

$$36 - 12 = 10x \Rightarrow x = 2/4$$

$$\text{اگر } (2/4, 7/2) \in f^{-1} \text{ باشد پس: } (7/2, 4/4) \in f$$

$$2/4 = \sqrt{7/2} \sqrt{7/2m - 1} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 2/4 \times 2/4 = 7/2(7/2m - 1)$$

$$0/8 = 7/2m - 1 \Rightarrow 1/8 = 7/2m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{4}{m}) = f(16) = \sqrt{16} \sqrt{16(\frac{1}{4}) - 1} = (4)(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

متوسط

۱۶- گزینه «پ»

با توجه به تعریف ترکیب توابع مرحله به مرحله مقادیر خواسته شده را به دست می آوریم:

$$g(f(-\frac{5}{3}))$$

$$f(-\frac{5}{3}) = 2[-\frac{5}{3}] - (-\frac{5}{3}) = 2(-2) + \frac{5}{3} = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$f(-\frac{7}{3}) = 2[-\frac{7}{3}] - (-\frac{7}{3}) = 2(-3) + \frac{7}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$g(-\frac{11}{3}) = f[-\frac{11}{3} + f(-\frac{11}{3})] = f[-\frac{11}{3} - \frac{11}{3}] = f(-\frac{22}{3}) = 2(-\frac{22}{3}) + \frac{22}{3} = -\frac{22}{3}$$

دشوار

۱۷- گزینه «پ»

فرض کنید ریشه های $2x^2 - ax + b = 0$ و α و β باشند پس ریشه های

$$2ax^2 + ax - 6 = 0, \alpha - \frac{1}{\alpha} \text{ و } \beta - \frac{1}{\beta} \text{ خواهد بود. در هر دو معادله } P \text{ و } S$$

معادله را به دست می آوریم:

$$2x^2 - ax + b = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{a}{2}, P = \alpha\beta = \frac{b}{2}$$

$$2ax^2 + ax - 6 = 0 \Rightarrow S = \alpha - \frac{1}{\alpha} + \beta - \frac{1}{\beta} = -\frac{a}{2a}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta - 1 = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{a}{2} \text{ جایگذاری}} \frac{a}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

همچنین برای P در این معادله داریم:

$$P = (\alpha - \frac{1}{\alpha})(\beta - \frac{1}{\beta}) = \alpha\beta - \frac{1}{\alpha}\alpha - \frac{1}{\beta}\beta + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{b}{2} - \frac{1}{2}(\frac{a}{2}) + \frac{1}{\frac{b}{2}} = -\frac{3}{a}$$

$$\frac{b}{2} = -\frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{b = -6}$$

$$\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[-\frac{6}{4}\right] = \left[-1/5\right] = -2$$

دشوار

۱۸- گزینه «ا»

ضابطه $f(x)$ را مرتب می نویسیم پس:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{2} \\ 2 + 3mx - x^2 & x > -\frac{3}{2} \end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به $x \leq -\frac{3}{2}$ برد ضابطه اول را به دست می آوریم:

$$R_f = \left[-\frac{13}{2}, +\infty\right)$$

پس به ازای $x = -\frac{3}{2}$ ، y های ضابطه دوم باید کمتر از $\frac{13}{2}$ یا در نهایت

مساوی $\frac{13}{2}$ باشد پس:



۴- گزینه «۱»

ریشه‌های عبارت $xf^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$xf^{-1}(x) \geq 0$$

$$D_f = [-2, 2], R_f = [-1, 4]$$

$$x = 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow (x, 0) \in f^{-1} \\ (0, x) \in f$$

$$D_{f^{-1}} = [-1, 4], R_{f^{-1}} = [-2, 2]$$

در نتیجه $f(0) = 2$ است پس ریشه f^{-1} عدد ۲ است.

x	-۱	۰	۲	۴
x	-	+	+	+
f^{-1}	-	-	+	+
$xf^{-1}(x)$	+	-	+	+
	ج	ج	ج	ج

جواب کل: $[-1, 0] \cup [2, 4]$

۵- گزینه «۳»

ابتدا به جای x مقدار ۱ را جای‌گذاری می‌کنیم تا $f(1)$ را به دست آوریم:

$$x = 1 \Rightarrow f(f(1)) = 3f(1) \xrightarrow{f(1)=2} f(2) = 3(2) \Rightarrow f(2) = 6$$

حالا به جای x مقدار ۲ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x = 2 \Rightarrow f(2f(2)) = 3f(2) \xrightarrow{f(2)=6} f(12) = 3(6) = 18 \Rightarrow f(12) = 18$$

۶- گزینه «۲»

$$f(x) = ax + b$$

$$f(2-x) = a(2-x) + b = 2a - ax + b = -ax + 2a + b$$

$$f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b = ax - a + b$$

پس:

$$-ax + 2a + b - ax + a - b = 3x - m$$

$$-2ax + 3a = 3x - m$$

$$-2a = 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$3a = -m \Rightarrow 3(-\frac{3}{2}) = -m \Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

$$f(2m-1) = f(2(\frac{9}{2})-1) = f(8) = -\frac{3}{2}(8) + b = -12 + b$$

$$f(4m) = f(4(\frac{9}{2})) = f(18) = -\frac{3}{2}(18) + b = -27 + b$$

$$-12 + b + 27 - b = 15$$

۷- گزینه «۲»

$$f(3x-2) = 9x^2 - 12x + 4 + 3x - 2$$

$$f(3x-2) = (3x-2)^2 + (3x-2) \xrightarrow{3x-2=t}$$

$$f(t) = t^2 + t \Rightarrow f(x) = x^2 + x$$



۱- گزینه «۲»

چون دامنه f به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ است و در مخرج عبارت درجه دو نوشته

شده است پس حتماً عبارت مخرج مربع کاملی با ریشه ۲ بوده است پس:

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 8x + 8$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با عبارت موجود در مخرج کسر متوجه

می‌شویم که $c = 8$ و $b = -8$ است.

همچنین با توجه به نمودار f می‌توان متوجه شد که عبارت صورت مضربی از

عبارت مخرج بوده است و دارای ریشه ۲ است پس: $a = 3 \Leftarrow 2a - 6 = 0$

$$a^2 - b^2 + 2c = 3 - 64 + 16 = -51$$

۲- گزینه «۴»

با توجه به تابع f که رادیکال فرجه زوج در مخرج دارد دامنه آن باید

> 0 زیر رادیکال باشد پس:

$$3x^2 - bx + c > 0$$

با توجه به دامنه داده شده حتماً عبارت $3x^2 - bx + c$ همواره مثبت بوده

است و به ازای ۱ فقط صفر می‌شده است که دامنه آن را $\mathbb{R} - \{1\}$ اعلام کرده

است. پس:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 6x + 3 \Rightarrow b = 6, c = 3$$

$$|c - b| = |3 - 6| = 3 \text{ در نتیجه:}$$

۳- گزینه «۲»

با توجه به دامنه رادیکال فرجه زوج در صورت:

$$(3 - [x])([x] - 1) \geq 0$$

$$3 - [x] \geq 0 \Rightarrow 3 \geq [x] \Rightarrow [x] = 3, 2, 1, 0, -1, \dots \xrightarrow{\text{اشتراک}} [x] = 1, 2, 3$$

$$[x] - 1 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 1 \Rightarrow [x] = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

$$[x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$3 - [x] \leq 0 \Rightarrow 3 \leq [x] \Rightarrow [x] = 3, 4, 5, \dots \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{تهی}$$

$$[x] - 1 \leq 0 \Rightarrow [x] \leq 1 \Rightarrow [x] = 1, 0, -1, \dots$$

اجتماع بازه جواب‌ها $(1, 4)$

از اجتماع دو مجموعه جواب به دست آمده $[1, 4)$ جواب نهایی است.



۱۳- گزینه «ا»

وارون تابع $f(x) = -x^2$ با دامنه محدود $(-\infty, 0]$ به صورت:

$$y = -x^2 \Rightarrow -y = x^2 \Rightarrow \sqrt{-y} = -x \Rightarrow -\sqrt{-y} = x$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$$

محل برخورد دو تابع به صورت:

$$-x - 6 = -\sqrt{-x}$$

$$-x + \sqrt{-x} - 6 = 0 \xrightarrow{\sqrt{-x}=t} t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow t = -3 \text{ غنق}, t = 2$$

$$\sqrt{-x} = 2 \Rightarrow -x = 4 = -4y = -2 \Rightarrow A(-4, -2)$$

$$(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(-2) = -4$$

۱۴- گزینه «ب»

ضابطه $f = \frac{1}{x}$ با دامنه محدود $(0, +\infty)$ است و ضابطه $g(x)$ با توجه به

نقطه شروع شکل و محل تقاطع آن با محور y ها به صورت:

$$g(x) = -2 - \sqrt{x+4}$$

است پس:

$$g(f(6)) = g\left(\frac{1}{6}\right) = -2 - \sqrt{\frac{1}{6} + 4} = -2 - \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{6} - 5}{\sqrt{6}} \times \sqrt{6} = -2\sqrt{6} - 5$$

۱۵- گزینه «ب»

می‌دانیم که ترکیب هر تابعی با وارون آن تابع همانی را تولید می‌کند اما دامنه آن $\mathbb{R}$ نخواهد بود پس:

$$D_{f \circ f^{-1}} = \{D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_f\} \xrightarrow[D_{f^{-1}}: x \neq 3]{D_f: x \neq 2} \{x \neq 3 \mid \frac{2x-5}{x-3} \neq 2\}$$

$$\{x \neq 3 \mid 2x - 5 \neq 2x - 6\}$$

$$\{x \neq 3 \mid -5 \neq -6\}$$

$$\{x \neq 3 \mid \mathbb{R}\}$$

$$x \neq 3$$

پس تابع همانی با دامنه $x \neq 3$ باید جواب سؤال باشد.

۱۶- گزینه «ب»

تابع g تابعی خطی با ضابطه $g(x) = x + 2$ ، $-2 \leq x \leq 4$ است و تابع f سهمی با ضابطه:

$$f(x) = a(x+2)(x-4) \Rightarrow -2 = a(2)(-4) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 8) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 \quad D_f = [-4, 6]$$

پس:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{4}(x+2)^2 - \frac{1}{2}(x+2) - 2$$

$$= \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) - \frac{1}{2}x - 1 - 2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 - \frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$$

$$D_{f \circ g} = \{D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{[-2, 4] \mid -4 \leq x+2 \leq 6\}$$

$$= [-2, 4] \cap [-6, 4] = [-2, 4]$$

۸- گزینه «ا»

ابتدا f را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \xrightarrow[D: [-\frac{1}{4}, +\infty)]{D: [\frac{1}{4}, +\infty)} f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

۹- گزینه «ب»

$$f(x) = 3 - \sqrt{1-x} \Rightarrow f^{-1}(x) = -(-x+3)^2 + 1$$

$$D_f: 1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x \quad f^{-1}(x) = -(x^2 - 6x + 9) + 1$$

$$R_f: (-\infty, 3] \quad f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 9 + 1$$

$$f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad D_{f^{-1}}: x \leq 3$$

۱۰- گزینه «ب»

قرینه تابع f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به معنای یافتن وارون تابع f است.

$$f^{-1}(x) = \frac{+3x-6}{4x-1} = g(x)$$

$$g(x-1) = \frac{3(x-1)-6}{4(x-1)-1} = \frac{3x-3-6}{4x-4-1} = \frac{3x-9}{4x-5}$$

محل برخورد با محور x ها به معنای $y=0$ است پس:

$$\frac{3x-9}{4x-5} = 0$$

$$3x-9=0 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

۱۱- گزینه «ب»

محل برخورد وارون f با محور x ها نقطه ۳ است پس:

$$(3, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, 3) \in f \Rightarrow a - 2\sqrt{a} = 3, a - 2\sqrt{a} - 3 = 0$$

$$(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+1) = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = 3, \sqrt{a} = -1 \text{ غنق}$$

$$a = 9$$

پس نقطه $(9, 3) \in f$ و $(3, 9) \in f^{-1}$ است.

$$g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(9)$$

$$9 = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow 9x - 27 = x - 2 \Rightarrow 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8} = 3 \frac{1}{8}$$

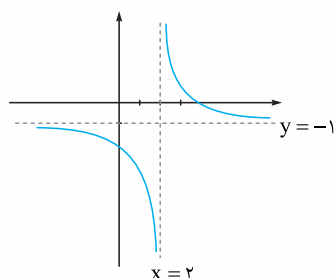
۱۲- گزینه «ا»

در ابتدا ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را با توجه به معادله خطها می‌نویسیم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = x - 2 \xrightarrow{\text{پس}} \frac{g}{f} = \frac{-x}{x-2} \quad D: x \neq 2$$

$$g(x) = ax + b \Rightarrow g(x) = -x$$

این تابعی هموگرافیک است پس:





۱۷-۵ گزینه «۲»

$$f^{-1}(2) = a \Rightarrow (2, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, 2) \in f \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 2$$

می‌دانیم این معادله فقط به‌ازای $a = 1$ برابر ۲ می‌شود پس:

$$(1, 2) \in \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1}$$

$$g^{-1}(1) \xrightarrow{(1, 2)} g^{-1}(1) = 2$$

۱۸-۵ گزینه «۲»

ابتدا نمودار $g(x)$ را بصورت تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم و همچنین ضابطه $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}, \quad f(x) = 5x + 2, D_f = [-1, 1]$$

$$x < 2 \Rightarrow fog = f(g(x)) = 5(-x^2 + 2x) + 2$$

$$= -5x^2 + 10x + 2, D_{fog} = [1 - \sqrt{2}, 2)$$

$$x \geq 2 \Rightarrow fog = f(g(x)) = 5(x^2 - 2x) + 2 = 5x^2 - 10x + 2,$$

$$D_{fog} = [2, 1 + \sqrt{2})$$

۱۹-۵ گزینه «۳»

حاصل جمع دو براکت که عدد صحیح است عددی صحیح باید باشد پس x عددی صحیح است.

همچنین چون می‌دانیم عدد صحیح از داخل براکت خارج می‌شود پس:

$$x + \left[\frac{3}{x}\right] + 2x + \left[-\frac{24}{x}\right] = x + 6$$

$$3x - 4 = x + 6 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

در نتیجه حاصل:

$$\left[\frac{-5+2}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}\right] = [-1/5] = -2$$

۲۰-۵ گزینه «۲»

$$6 \leq 2x^2 - 3 < 7$$

$$6 \leq x^2 + 1 < 7$$

طرفین را با هم جمع می‌کنیم:

$$12 \leq 3x^2 - 2 < 14$$

پس $[3x^2 - 2]$ شامل اعداد صحیح ۱۲ و ۱۳ خواهد بود.