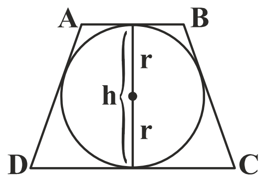
هندسه

۱- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. قطر دایره محاطی برابر قطر ذوزنقه است. اکنون می‌توان نوشت:



$$S = \frac{۱}{۲}h(AB + CD)$$

$$۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times (AB + CD)$$

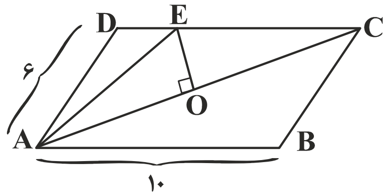
$$۲۰ = AB + CD$$

چون ذوزنقه محیطی است، پس مجموع ضلع‌های مقابل در آن با هم برابرند؛ یعنی:

$$AD + BC = AB + CD \xrightarrow{AD=BC} ۲BC = ۲۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

یعنی طول ساق ذوزنقه برابر ۱۰ است. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ چندضلعی محیطی ـ مساحت ذوزنقه)

۲- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون O (محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع) وسط AC است، پس OE عمودمنصف AC است، در نتیجه $AE = EC$. اکنون می‌توان نوشت:



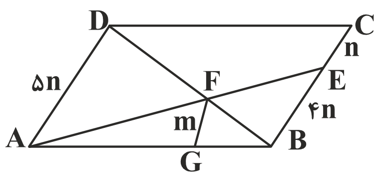
$$AC \text{ روی عمودمنصف } E \Rightarrow EA = EC$$

$$\text{محیط مثلث } ADE = AE + ED + AD = EC + ED + AC$$

$$= DC + AC = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع ـ ویژگی عمودمنصف)

۳- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. باید نسبت $\frac{GF}{AD}$ یا $\frac{m}{۵n}$ را به‌دست آوریم. می‌توان نوشت:

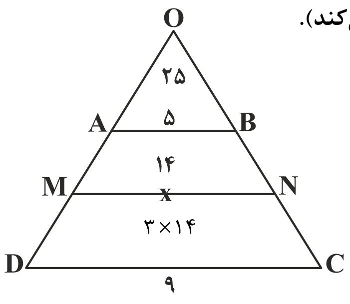


$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}: \dfrac{FG}{AD} = \dfrac{BG}{AB} \\ \overset{\Delta}{ABE}: \dfrac{FG}{BE} = \dfrac{AG}{AB} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} \frac{m}{۵n} + \frac{m}{۴n} = ۱ \Rightarrow \frac{m}{n} \times \frac{۹}{۲۰} = ۱ \Rightarrow \frac{m}{۵n} = \frac{۴}{۹}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ تالس)

۴- گزینه «۱» ـ دو ساق را امتداد می‌دهیم تا در نقطه O یکدیگر را قطع کنند. چون دو مثلث OAB و ODC متشابه هستند، پس:

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{۲۵}{۸۱}$$



فرض می‌کنیم $S_{OAB} = ۲۵$ و $S_{OCD} = ۸۱$ (توجه کنید که این فرض کلیت مسئله را دچار مشکل نمی‌کند).

چون $S_{ABNM} = \frac{۱}{۳}S_{MNCD}$، پس:

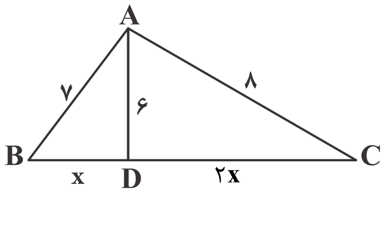
$$S_{ABNM} = ۱۴, S_{MNCD} = ۴۲$$

اکنون از تشابه دو مثلث OAB و OMN به‌دست می‌آید:

$$\frac{AB}{MN} = \sqrt{\frac{S_{OAB}}{S_{OMN}}} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \sqrt{\frac{۲۵}{۳۹}} \Rightarrow x = \sqrt{۳۹}$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل دوم ـ تشابه)

۵- گزینه «۱» ـ بنابر رابطه استوارت:



$$۲x \times ۴۹ + x \times ۶۴ = ۳x(۳۶ + ۲x^۲)$$

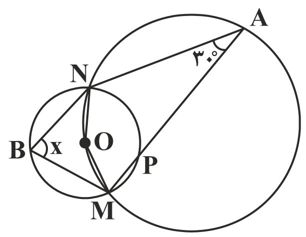
$$۹۸ + ۶۴ = ۱۰۸ + ۶x^۲ \Rightarrow ۵۴ = ۶x^۲$$

$$x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ روابط طولی)

۶- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چهارضلعی AMON محاطی است، پس:

$\hat{O} = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ$



بنابراین $\overparen{NPM} = ۱۵۰^\circ$ و در نتیجه:

$$\hat{B} = \frac{۱}{۲}\overparen{NPM}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۱۵۰^\circ = ۷۵^\circ$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ چهارضلعی محاطی و زاویه‌ها در دایره)

۷- گزینه «۳» ـ بنابر روابط طولی $HB \times HA = HC \times HD$، یعنی:

$$۴ \times (HE + ۲) = ۳ \times ۸ \Rightarrow HE = ۴$$

اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث EHC:

$$EC = \sqrt{HC^۲ + HE^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

در نهایت بنابر رابطه طولی در دایره $EC \times EF = EA \times EB$، در نتیجه:

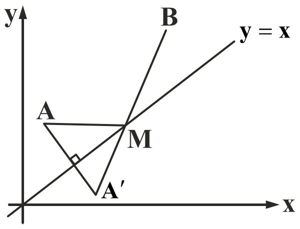
$$۵ \times EF = ۲ \times ۸ \Rightarrow EF = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$

پس:

$$FC = FE + EC = ۳/۲ + ۵ = ۸/۲$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ روابط طولی)

۸- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه هرون اگر A' بازتاب A نسبت به $y = x$ باشد، کمترین مقدار $MA + MB$ برابر طول پاره‌خط $A'B$ است.

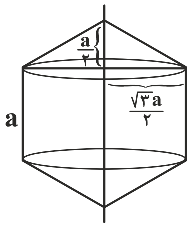


$$A' = (۴,۱), B = (۱۲,۱۶)$$

$$\Rightarrow \min(MA + MB) = A'B = \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} = ۱۶$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ کاربرد تبدیلات هندسی (بازتاب))

۹- گزینه «۳» ـ



شکل حاصل از دو مخروط برابر و یک استوانه تشکیل شده است. شعاع قاعده مخروط‌ها و استوانه نصف طول قطر کوچک شش ضلعی است و قطر کوچک شش ضلعی به ضلع a برابر $a\sqrt{۳}$ است. ارتفاع هریک از مخروط‌ها برابر $\frac{a}{۲}$ و ارتفاع استوانه برابر a است. اکنون حجم شکل حاصل را به‌دست می‌آوریم:

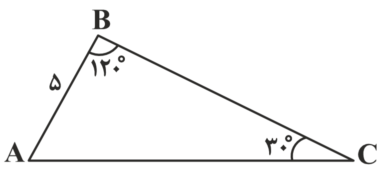
$$\underbrace{۲ \times \frac{۱}{۳} \times \pi \times (\frac{\sqrt{۳}a}{۲})^۲ \times \frac{a}{۲}}_{\text{حجم مخروط}} + \underbrace{\pi(\frac{\sqrt{۳}a}{۲})^۲ \times a}_{\text{حجم استوانه}} = \frac{\pi a^۳}{۴} + \frac{۳\pi a^۳}{۴} = \pi a^۳$$

در نتیجه:

$$\pi a^۳ = ۸\pi \Rightarrow a = ۲$$

(هویدی) (پایه دهم ـ فصل سوم ـ دوران)

۱۰- گزینه «۳» ــ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه سینوس‌ها:



$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۵}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow AC=۵\sqrt{۳}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل سوم ــ روابط طولی ــ قضیه‌ی سینوس‌ها)

۱۱- گزینه «۴» ــ چون $a+b$ ، $a-b$ بر هم عمودند، پس متوازی‌الاضلاعی که روی a و b ایجاد می‌شود، لوزی است و در نتیجه $|a|=|b|$.

$$\sqrt{m^۲+۴+۱}=\sqrt{۴۱}\ \Rightarrow\ m^۲+۵=۴۱\ \xrightarrow{m>۰}\ m=۶$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ بردار در فضا ــ جمع بردارها)

۱۲- گزینه «۱» ــ می‌توان نوشت:

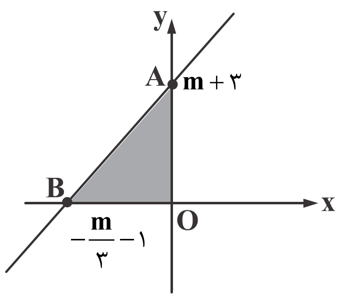
$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ m & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ m & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-m & -۲\\ ۲m & ۱-m\end{bmatrix}$$

بنابر فرض $A^۲=\begin{bmatrix}a & b\\ -۶ & c\end{bmatrix}$، در نتیجه:

$$۲m=-۶\Rightarrow m=-۳$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ ضرب ماتریس‌ها)

۱۳- گزینه «۱» ــ قطر دایره از مرکز دایره یعنی $O'=(-۱\,,۳)$ می‌گذرد. شیب خط را m فرض می‌کنیم:



$$y-۳=m(x+۱)$$

محل برخورد این قطر با محورها را به‌دست می‌آوریم:

$$x=۰\Rightarrow y=m+۳$$

$$y=۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{m}-۱$$

چون $m>۰$، پس $m+۳>۰$ و $-\frac{۳}{m}-۱<۰$. مساحت مثلث OAB برابر ۶ است، پس:

$$\frac{۱}{۲}|(m+۳)(-\frac{۳}{m}-۱)|=۶\ \xrightarrow{m>۰}\ (m+۳)^۲=۱۲m\Rightarrow m=۳$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ دایره (مقاطع مخروطی))

۱۴- گزینه «۳» ــ می‌توان نوشت:

$$a\cdot b=\frac{۱۸}{۵}\Rightarrow |a||b|\cos\theta=\frac{۱۸}{۵}\Rightarrow ۳\times۲\times\cos\theta=\frac{۱۸}{۵}\Rightarrow\cos\theta=\frac{۳}{۵}$$

به‌دست می‌آید:

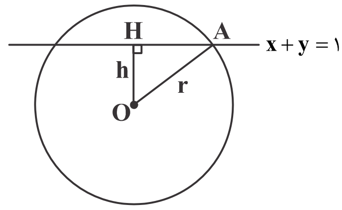
$$\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^۲\theta}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

در نهایت مساحت مثلث به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}(a\times b)=\frac{۱}{۲}\times|a|\times|b|\times\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۳\times۲\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

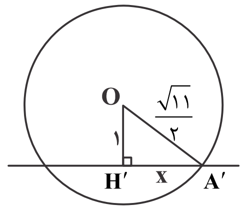
(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ بردار ــ کاربرد ضرب خارجی)

۱۵- گزینه «۳» ـ ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط را به‌دست می‌آوریم و از رابطه فیثاغورس شعاع دایـره را محاسبه می‌کنیم:



$$h=\frac{|-۱-۱-۱|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$\overset{\Delta}{OAH}: r=\sqrt{OH^{۲}+AH^{۲}}=\sqrt{\frac{۹}{۲}+۱}=\sqrt{\frac{۱۱}{۲}}$$



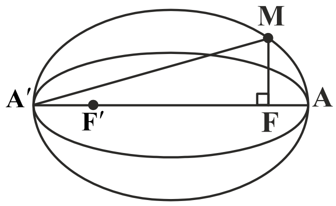
اکنون با رابطه فیثاغورس طول $A'H'$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A'H'=\sqrt{\frac{۱۱}{۲}-۱}=\sqrt{\frac{۹}{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین طول وتری که روی محور x ایجاد می‌شود برابر $۲A'H'=۳\sqrt{۲}$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ دایره مقاطع مخروطی)

۱۶- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم:



چون $a=۵$ و $b=۳$، پس $c=۴$.

می‌دانیم:

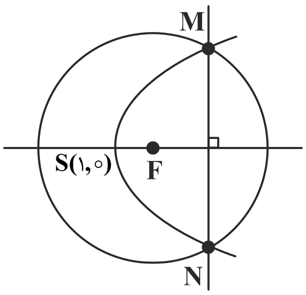
$$MF=b=۳\ ,\ A'F=a+c=۹$$

اکنون در مثلث MFA' بنابر قضیه فیثاغورس:

$$MA'=\sqrt{A'F^{۲}+MF^{۲}}=\sqrt{۸۱+۹}=۳\sqrt{۱۰}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ بیضی)

۱۷- گزینه «۱» ـ از معادله سهمی به‌دست می‌آید:



$$y^{۲}=۴(x-۱)$$

$$a=۱\ ,\ S\left|\begin{matrix}۱\\ ۰\end{matrix}\right.\Rightarrow F\left|\begin{matrix}\alpha+a=۲\\ \beta=۰\end{matrix}\right.$$

اکنون معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹$$

محل برخورد سهمی و دایره را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}(x-۲)^{۲}+y^{۲}=۹\\ y^{۲}=۴(x-۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M=(۳,۲\sqrt{۲})\\ N=(۳,-۲\sqrt{۲})\end{cases}$$

در نتیجه $MN=۴\sqrt{۲}$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ سهمی)

۱۸- گزینه «۴» ـ از دو طرف برابری داده شده دترمینان می‌گیریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}۳|A| & ۱\\ ۲ & |A|\end{vmatrix}\Rightarrow|A|=۳|A|^{۲}-۲\Rightarrow ۳|A|^{۲}-|A|-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\ |A|=-\frac{۲}{۳}\xrightarrow{|A|>۰}|A|=۱\end{cases}$$

یعنی $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، در نتیجه:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{\underbrace{|A|}_{۱}}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ وارون و دترمینان)

۱۹- گزینه «۳» ـ از برابری $BA^n = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید:

$$|BA^n| = \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱۰ & ۱۲ \end{vmatrix} \Rightarrow |B||A|^n = -۱۲ - ۲۰ = -۳۲ \Rightarrow (-۱+۲)(۰-۲)^n = (-۲)^۵ \Rightarrow (-۲)^n = (-۲)^۵$$

یعنی $n = ۵$. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دترمینان)