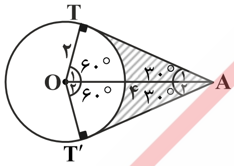
هندسه ۲

۱- گزینه «۲» ـ

$\hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{۱}{۲}\widehat{TAT'}=\frac{۱}{۲}\times ۶۰^\circ=۳۰^\circ$



$\hat{O}_1=\hat{O}_2=۹۰^\circ-۳۰^\circ=۶۰^\circ$

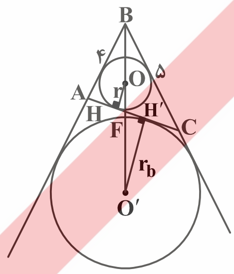
$\overset{\Delta}{AOT}:۳۰^\circ$ رو به $OT=\frac{۱}{۲}OA=\frac{۱}{۲}\times ۴=۲$

$S_{\text{هاشورخورده}}=S_{ATOT'}-S_{\text{قطاع } TOT'}=۲\times\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۴\times\sin ۶۰^\circ-\frac{۱۲۰}{۳۶۰}\pi\times ۲^۲$

$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}}=۴\sqrt{۳}-\frac{۴\pi}{۳}$

(علوی) (روابط طولی در دایره ـ مساحت ناحیه بین دو مماس و دایره) (متوسط)

۲- گزینه «۴» ـ



$P=\frac{۴+۶+۵}{۲}=۷/۵$

$\overset{\Delta}{HOF}\sim\overset{\Delta}{FO'H'}\Rightarrow\frac{OH}{O'H'}=\frac{OF}{O'F}$

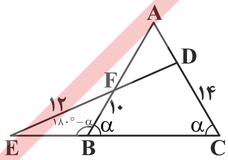
$\Rightarrow\frac{OF}{O'F}=\frac{r}{r_b}=\frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P-b}}=\frac{P-b}{P}$

$\Rightarrow\frac{OF}{O'F}=\frac{۷/۵-۶}{۷/۵}=\frac{۱/۵}{۷/۵}=\frac{۱}{۵}$

(علوی) (چندضلعی‌های محاطی و محیطی ـ شعاع دایره محاطی داخلی و خارجی مثلث) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ـ

$AB=AC\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=\alpha\Rightarrow\widehat{FBE}=۱۸۰^\circ-\alpha$



$\overset{\Delta}{BEF}$ در قضیه سینوس ها : $\frac{EF}{\sin(۱۸۰^\circ-\alpha)}=\frac{BF}{\sin\hat{E}}\Rightarrow$

$\frac{۱۲}{\sin\alpha}=\frac{۱۰}{\sin\hat{E}}$

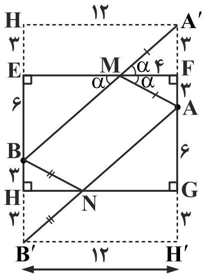
$\overset{\Delta}{EDC}$ در قضیه سینوس ها : $\overset{\Delta}{EDC}$ در قضیه سینوس ها : $\frac{ED}{\sin\alpha}=\frac{DC}{\sin\hat{E}}\Rightarrow$

$\frac{۱۲+FD}{\sin\alpha}=\frac{۱۴}{\sin\hat{E}}$

$\xrightarrow{\div}\frac{۱۲}{۱۲+FD}=\frac{۱۰}{۱۴}\Rightarrow ۱۲+FD=۱۶/۸\Rightarrow FD=۴/۸$

(علوی) (قضیه سینوس‌ها ـ روابط طولی در مثلث) (دشوار)

۴- گزینه «۳» ـ برای این‌که محیط چهارضلعی AMBN کم‌ترین مقدار باشد. باید مطابق شکل مقدار $AM+MB$ و همچنین $AN+NB$ کم‌ترین مقدار ممکن باشد. اکنون برای یافتن نقاط M و N، باید قرینه‌های A و B را نسبت به طول‌های مستطیل یافته و مسئله هرون را در شکل ایجاد کنیم.



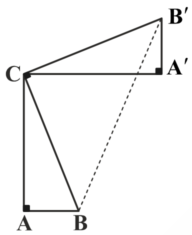
$MANB$ محیط $=MA+MB+BN+NA$

$=(MA'+MB)+(B'N+NA)=A'B+B'A$

$=\sqrt{۹^۲+۱۲^۲}+\sqrt{۹^۲+۱۲^۲}=۱۵+۱۵=۳۰$

(علوی) (کاربرد تبدیلات ـ کاربرد تبدیل بازتاب (مسئله هرون)) (دشوار)

۵- گزینه «۱» ـ ضلع BC به اندازه ۹۰° دوران پیدا کرده تا ضلع $B'C$ به‌دست آید، پس مثلث BCB' قائم‌الزاویه است. همچنین چون $B'C=BC$، نتیجه می‌گیریم که مثلث BCB' قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس طول وتر BB'، $\sqrt{۲}$ برابر ضلع BC است.



$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۳^۲+۶^۲=۴۵\Rightarrow BC=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$

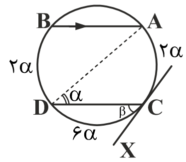
$BB'=\sqrt{۲}BC=\sqrt{۲}\times ۳\sqrt{۵}=۳\sqrt{۱۰}$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (تبدیلات هندسی ـ دوران) (آسان)

۶- گزینه «۳» ـ تجانس در هر حالتی شیب خط را حفظ می‌کنند.

(کتاب همراه علوی با تغییر) (تبدیلات هندسی ـ تجانس) (آسان)

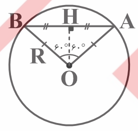
۷- گزینه «۳» ـ



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \\ \alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۲\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۲\alpha$$

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow ۳\alpha = \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = ۶\alpha$$

$$\overset{\frown}{BDC} = ۱۹۲^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۶\alpha = ۱۹۲^\circ \Rightarrow ۸\alpha = ۱۹۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴^\circ$$



$$\overset{\frown}{AB} + ۲\alpha + ۲\alpha + ۶\alpha = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + ۱۰\alpha = ۳۶۰^\circ$$

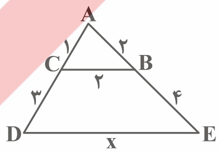
$$\underline{\alpha = ۲۴^\circ} \quad \overset{\frown}{AB} + ۱۰ \times ۲۴^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$$

$\overset{\triangle}{BOH}: ۶۰^\circ$ روبه‌رو به $BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$

$$AB = ۲BH = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}R = \sqrt{۳}R$$

(کنکور با تغییر) (زاویه در دایره ـ ویژگی کمان محدود به دو وتر موازی، زاویه ظلی و محاطی) (متوسط)

۸- گزینه «۱» ـ



قضیه کسینوس‌ها در ABC: $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \times AC \cos\hat{A}$

$$\Rightarrow ۲^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ - ۲(۱)(۲)\cos\hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۱}{۴}$$

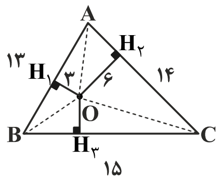
به‌طور مشابه طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ADE داریم:

$$DE^۲ = AD^۲ + AE^۲ - ۲AD \times AE \times \cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$x^۲ = ۴^۲ + ۶^۲ - ۲(۴)(۶)\cos\hat{A} \Rightarrow x^۲ = ۱۶ + ۳۶ - ۴۸ \times \frac{۱}{۴} = ۴۰ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۱۰}$$

(کنکور با تغییر) (قضیه کسینوس‌ها ـ روابط طولی در مثلث) (متوسط)

۹- گزینه «۲» ـ مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون می‌یابیم:



$$P = \frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲} = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱$$

$$S = \sqrt{۲۱ \times (۲۱-۱۵)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۳)} = \sqrt{۲۱ \times ۶ \times ۷ \times ۸} = ۸۴$$

$$S_{ABC} = S_{\overset{\triangle}{AOB}} + S_{\overset{\triangle}{AOC}} + S_{\overset{\triangle}{BOC}} \Rightarrow$$

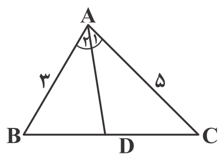
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}OH_۱ \times AB + \frac{۱}{۲}OH_۲ \times AC + \frac{۱}{۲}OH_۳ \times BC$$

$$\Rightarrow ۸۴ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱۳ + \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۴ + \frac{۱}{۲}OH_۳ \times ۱۵ \xrightarrow{\times ۲}$$

$$۱۶۸ = ۳۹ + ۸۴ + ۱۵OH_۳ \Rightarrow OH_۳ = ۳$$

(کتاب درسی) (رابطه طولی در مثلث ـ قضیه هرون) (متوسط)

۱۰- گزینه «۱» ـ



$$\overset{\triangle}{ABC}: \text{نیمساز } AD \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}} \frac{۳+۵}{۵} = \frac{BD+DC}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۵} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{۸}{۵} = \frac{۷}{DC} \Rightarrow DC = \frac{۳۵}{۸}$$

$$BD = ۷ - \frac{۳۵}{۸} = \frac{۲۱}{۸}$$

$$AD^۲ = AB \times AC - BD \times DC = ۳ \times ۵ - \frac{۳۵}{۸} \times \frac{۲۱}{۸} = ۱۵ - \frac{۷۳۵}{۶۴} = \frac{۲۲۵}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

(کتاب درسی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها) (متوسط)