ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ

$$y = 2x-1 \Rightarrow \frac{y+1}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \xrightarrow{f^{-1}(x)=2x+1} \frac{x+1}{2} = 2x+1 \Rightarrow x+1 = 4x+2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

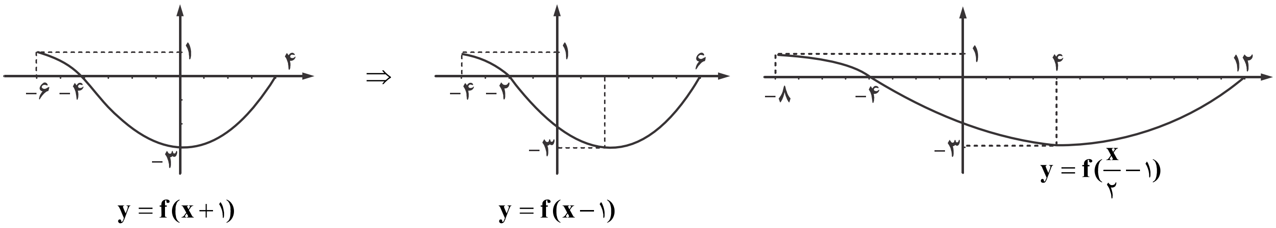
(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ تابع وارون)

۲- گزینه «۲» ـ

$$D_f = [-2, 2], g^{-1} = \{(3,1), (4,2), (1,5), (0,-3)\} \Rightarrow fog^{-1} = \{(3, \sqrt{3}), (4, 0)\}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ تابع وارون)

۳- گزینه «۳» ـ



(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ تبدیل نمودار تابع)

۴- گزینه «۴» ـ

$$D_y = D_{f(x)} \quad \text{و} \quad -3 \le x < 7 \Rightarrow \frac{-1}{2} \le \frac{x}{2}+1 < \frac{9}{2} \Rightarrow D_f = [-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ دروس دوم ـ تبدیل نمودار تابع)

۵- گزینه «۳» ـ

$$D_f = (-\infty, 1] \quad , \quad D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \neq \pm 1\} = \{x \in (-\infty, 1] \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ دامنه تابع مرکب)

۶- گزینه «۴» ـ سوال را در دو حالت $x \in Z$ و $x \notin Z$ حل می‌کنیم.

$$1)\ x \in Z \ : \ g(f(x)) = x^2 - 4x \xrightarrow{f(x)=0} x^2 - 4x = g(0) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$

$$2)\ x \notin Z \ : \ g(f(x)) = x^2 - 4x \xrightarrow{f(x)=-1} x^2 - 4x = g(-1) = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

پس مجموعه جواب معادله $\{0, 4, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع)

۷- گزینه «۲» ـ با توجه به نمودار داده شده نمودار g به‌صورت $g(x) = a(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ است، با توجه به این که $g(0) = -1$ است مقدار a برابر ۱ـ به‌دست می‌آید پس:

$$g(x) = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = x^2 + x - 1$$

حال داریم:

$$\begin{cases} gof(x) = f^2(x) + f(x) - 1 \\ gof(x) = x^4 - x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow f^2(x) + f(x) - 1 = x^4 - x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f^2(x) + f(x) - x^4 + x^2 = 0 \Rightarrow (f(x) + x^2)(f(x) - x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x^2 \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ ترکیب توابع)

۸- گزینه «۳» ـ بررسی گزینه‌ها:

در گزینه «۴»، کمترین مقدار تابع ۱ـ است، اما در نمودار داده شده، کمترین مقدار تابع صفر است. پس این گزینه رد می‌شود.

گزینه «۱» و «۲» در همسایگی راست صفر صعودی هستند، پس این گزینه‌ها هم حذف می‌شوند. بنابراین گزینه «۳» درست است.

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ توابع صعودی و نزولی و فصل دوم ـ درس اول ـ نمودار توابع مثلثاتی)

۹- گزینه «۱» ـ با توجه به نمودار دوره تناوب تابع برابر است با:

$$T=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi$$

بنابراین گزینه‌های «۳» و «۴» رد می‌شوند. در گزینه «۱»، به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ داریم $y=1$ و در گزینه «۲» به‌ازای $x=\frac{\pi}{6}$ داریم $y=-\frac{1}{2}$. بنابراین گزینه «۲» هم رد می‌شود و تنها گزینه ممکن گزینه «۱» است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۱۰- گزینه «۲» ـ با توجه به نمودار داریم: $a=-2$

به‌ازای $x=\frac{27\pi}{5}$، داریم $y=-2$.

$$-2=-2\cos(\frac{27\pi}{5}b+c)\ \Rightarrow\ \frac{27\pi}{5}b+c=2\pi$$

نقطه $x=\frac{9\pi}{10}$، اولین نقطه‌ای است که کسینوس در آن صفر شده است. بنابراین:

$$\frac{9\pi}{10}b+c=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\frac{27\pi}{5}b+c=2\pi\\ \frac{9\pi}{10}b+c=\frac{\pi}{2}\end{cases}\ \Rightarrow\ b=\frac{1}{3}\,,\,c=\frac{\pi}{5}\ \Rightarrow\ abc=\frac{-2\pi}{15}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تناوب)

۱۱- گزینه «۱» ـ با توجه به اینکه تابع $y=\tan x$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\,,\,k\in\mathbb{Z}$ تعریف نشده است. و همچنین تابع $\tan x$ در هر بازه‌ای که تعریف می‌شود صعودی اکید است. تابع $\tan x$ در بازه $[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}]$ در بین گزینه‌ها تعریف می‌شود. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ تانژانت)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$5\sin x=3\cos x+3\ \Rightarrow\ 5\sin x=3(\cos x+1)\ \Rightarrow\ 5\times 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=3(2\cos^2\frac{x}{2})\ \xrightarrow[\cos\frac{x}{2}\neq 0]{\div 2\cos^2\frac{x}{2}}\ 5\tan\frac{x}{2}=3$$

$$\Rightarrow\ \tan\frac{x}{2}=\frac{3}{5}\ \Rightarrow\ \tan^2\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}-4=\frac{9}{25}+\frac{9}{5}-4=-\frac{46}{25}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$\begin{cases}\sin\frac{x}{2}=-\cos\frac{x}{3}\\ -\cos\frac{x}{3}=-\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{3})=\sin(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2})\end{cases}\ \Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}=\sin(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2})\ \Rightarrow\ \begin{cases}\frac{x}{2}=2k\pi+\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ x=12k\pi-3\pi\\ \frac{x}{2}=2k\pi+\pi-\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{12k\pi}{5}+\frac{9\pi}{5}\end{cases}$$

تنها جواب معادله در بازه $[0\,,\,2\pi]$، $x=\frac{9\pi}{5}$ است. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۴- گزینه «۲» ـ

$$-\cos 2x+3\sin x+2=0\ \Rightarrow\ 2\sin^2 x+3\sin x+1=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\sin x=-1\ \Rightarrow\ x=-\frac{\pi}{2}\\ \sin x=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=-\frac{\pi}{6}\,,\,-\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ معادلات مثلثاتی)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$2x-1=5\ \Rightarrow\ x=3\ \Rightarrow\ \text{بازه}=(5\,,\,15)$$

بازه $(5\,,\,15)$ همسایگی چپ ۱۵ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ همسایگی)

۱۶- گزینه «۳» ـ $f(x)$ بر $3x+1$ بخش‌پذیر است، پس $f(\frac{-1}{3})=0$

$$f(-\frac{1}{3})=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}+3=0\ \Rightarrow\ \frac{25}{9}=\frac{2}{3}a\ \Rightarrow\ a=\frac{25}{6}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ بخش‌پذیری)

۱۷- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\tan x}{\sin^{۳}\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin^{۳}\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(\cos x-۱)}{\cos x\sin^{۳}\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(-۲\sin^{۲}\frac{x}{۲})}{\cos x\sin^{۳}\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۴\sin^{۳}\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}{\cos x\sin^{۳}\frac{x}{۲}}=-۴$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد توابع کسری)

۱۸- گزینه «۳» ـ صورت و مخرج کسر به‌ازای $x=۲$ برابر صفرند. بنابراین صورت بر $x-۲$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}-۵x^{۲}+۵x+۲ & x-۲ \\ \cline{2-2} \underline{-x^{۳}+۲x^{۲}} & x^{۲}-۳x-۱ \\ -۳x^{۲}+۵x+۲ & \\ \underline{۳x^{۲}-۶x} & \\ -x+۲ & \\ \underline{x-۲} & \\ ۰ & \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^{۲}-۳x-۱)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x^{۲}-۳x-۱)=-۳$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد توابع کسری)

۱۹- گزینه «۱» ـ

حد چپ: $\lim_{x\to ۱^-}\frac{[x-۱]}{\sqrt{x}-x}=\frac{[۱^-]-۱}{\sqrt{۱^-}-۱^-}=\frac{۰-۱}{۰^+}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۲۰- گزینه «۱» ـ چون حاصل حد برابر یک عدد حقیقی غیرصفر شده است پس:

$$\begin{cases} b+۱=۲ \\ \frac{m-۱}{۲}=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ m=۹ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{m+b-۱۱}{x^{۲}+۸x-m}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{-۱}{(x-۱)(x+۹)}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ دروس دوم و اول ـ حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت)

۲۱- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{۱+۴x^{۲}}-\sqrt[۳]{۱+۳x^{۲}}}{۲x-\sqrt[۳]{۳-x^{۳}}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|۲x|}{۲x+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۲x}{۳x}=\frac{-۲}{۳}$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)

۲۲- گزینه «۲» ـ

$$x^{۲}-x-۱۲=۰ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۳ & & ۴ & \\ \hline \frac{x}{x^{۲}-x-۱۲} & + & \circ & - & \circ & + \end{array} \qquad \lim_{x\to(-۳)^+}f(x)=\frac{-۷}{۰^-}=+\infty$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ حد بی‌نهایت)

۲۳- گزینه «۴» ـ

الف) $\lim_{x\to +\infty}(f[f(x)])=f[۱^-]=f(۰)=۱$

ب) $\lim_{x\to -\infty}f(f(x))=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=+\infty$

پ) $\lim_{x\to(-۱)^+}f(f(x))=\lim_{x\to -\infty}f(x)=۲$

بنابراین فقط مورد (پ) درست محاسبه شده بودند. (جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ حد در بی‌نهایت)

۲۴- گزینه «۳» ـ می‌دانیم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲)-f(۲-۵h)}{۳h}=-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-۵h)-f(۲)}{۳h}=\underbrace{-\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-۵h)-f(۲)}{-۵h}}_{-f'(۲)}\times\underbrace{(\frac{-۵h}{۳h})}_{\frac{-۵}{۳}}=\frac{۵}{۳}f'(۲)=\frac{۵}{۳}\times ۳=۵$$

(جعفری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس اول ـ تعریف مشتق)

۲۵- گزینه «۲» ــ

الف) با توجه به این که شیب نمودار در نقطه $x = d$ بیشتر از شیب نمودار در نقطه $x = e$ است یعنی: $f'(d) > f'(e)$.

ب) چون شیب نمودار در نقطه $x = c$، صفر و در نقطه $x = b$، مثبت است، پس $f'(b) > f'(c)$.

پ) شیب نمودار در نقطه $x = a$، منفی و در نقطه $x = b$ مثبت است، پس $f'(a) < f'(b)$.

بنابراین موارد (ب) و (پ) درست بود.

(جعفری) (پایه دوازدهم ــ فصل چهارم ــ درس اول ــ مفهوم مشتق)