هندسه

۱- گزینه «۱» ـ از برابری $۳AB + BA = \bar{O}$ نتیجه می‌گیریم:

$$AB = (-\frac{۱}{۳})BA \quad (۱)$$

از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$AB^۲ = (-\frac{۱}{۳})BAB \xrightarrow{(۱)} AB^۲ = (-\frac{۱}{۳})B(-\frac{۱}{۳}BA) = \frac{۱}{۹}B^۲A$$

مجدداً از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم.

$$AB^۳ = \frac{۱}{۹}B^۲AB \xrightarrow{(۱)} AB^۳ = \frac{۱}{۹}B^۲(-\frac{۱}{۳}BA) = -\frac{۱}{۲۷}B^۳A$$

اکنون با مقایسه $AB^۳ = -\frac{۱}{۲۷}B^۳A$ و $AB^۳ = k.B^۳A$ به‌دست می‌آید.

$$k = -\frac{۱}{۲۷}$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس اول ـ ضرب ماتریس ۴)

۲- گزینه «۲» ـ به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+b & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱+۲+\cdots+n & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ \frac{n(n+۱)}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$$

چون درایه سطر دوم، ستون اول A برابر ۵۵ است، پس:

$$\frac{n(n+۱)}{۲} = ۵۵ \Rightarrow n = ۱۰$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس اول ـ ضریب ماتریس‌ها)

۳- گزینه «۴» ـ از برابری $AX + ۲I = ۴A$ بدست می‌آید $AX = ۴A - ۲I$ در نتیجه:

$$X = ۲A^{-۱}(۲A - I)$$

اکنون می‌نویسیم:

$$X = ۲\times\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۸ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های X برابر ۸ است. (هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۴- گزینه «۱» ـ چون A وارون‌پذیر نیست، پس $|A| = ۰$ یعنی:

$$۳a + ۳ - ۲a + ۲ = ۰ \Rightarrow a = -۵$$

بنابراین: $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}$.

اکنون می‌نویسیم:

$$B^{-۱} = \frac{۱}{۳+۵}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۸} & -\frac{۱}{۸} \\ \frac{۵}{۸} & \frac{۱}{۸} \end{bmatrix}$$

در نهایت:

$$B^{-۱} \text{ مجموع درایه های } = \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۸} + \frac{۵}{۸} + \frac{۱}{۸} = ۱$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ وارون ماتریس)

۵- گزینه «۱» ـ چون دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد، پس:

$$\frac{m-۱}{۳} \neq \frac{۵}{m+۱} \Rightarrow m^۲ - ۱ \neq ۱۵ \Rightarrow m^۲ \neq ۱۶$$

در نتیجه: $m \neq \pm۴$

(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ دستگاه معادلات)

۶- گزینه «۴» ـ چون $x+y+z=۳$ ، فرض می‌کنیم $z=۳$, $x=y=۰$. اکنون دترمینان را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۳ \\ ۰ & a & ۳ \\ ۰ & ۰ & a+۳ \end{bmatrix} = a^۲(a+۳)$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ دترمینان)

۷- گزینه «۱» ـ می‌نویسیم:

$$|-\frac{۱}{۱۵}A^۳B| = (-\frac{۱}{۱۵})^۳\,|A|^۳|B| = (-\frac{۱}{۱۵})^۳\times ۱۵^۳\times ۵ = -۵$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ دترمینان)

۸- گزینه «۲» ـ می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} -۳ & ۱ & ۴ \\ a & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{vmatrix} = m$$

بسط برحسب ستون سوم $= ۴(۳a-۱)+۱(۳-a) = ۱۲a-۴+۳-a = ۱۱a-۱$

یعنی: $۱۱a-۱=m$.

از طرف دیگر بسط برحسب ستون دوم به‌دست می‌آید.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ -۱ & ۰ & a-۱ \end{vmatrix} = -۱(a-۱-۳)+۴(۳a-۳-۱) = -a+۴+۱۲a-۱۶ = ۱۱a-۱۲$$

در نتیجه:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ -۱ & ۰ & a-۱ \end{vmatrix} = ۱۱a-۱۲ = m-۱۱$$

(هویدی) (فصل اول ـ درس دوم ـ دترمینان)

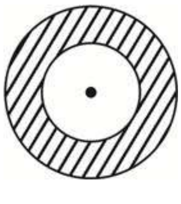
۹- گزینه «۴» ـ مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره‌خط AB است. این خط (عمود منصف پاره‌خط AB) دایره را حداکثر در ۲ نقطه قطع می‌کند. (هویدی) (فصل دوم ـ درس اول ـ مکان هندسی)

۱۰- گزینه «۲» ـ مرکز و شعاع هر دو دایره به‌دست می‌آید:

$$O_۱ = (۱, -\frac{۳}{۲}) \qquad r_۱ = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$$

$$O_۲ = (۱, -\frac{۳}{۲}) \qquad r_۲ = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

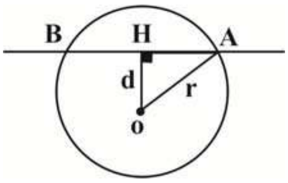
دو دایره هم مرکز هستند. اکنون مساحت محصور بین دو دایره را به‌دست می‌آوریم.



مساحت محصور $=|S_۱-S_۲| = |\pi r_۱^۲-\pi r_۲^۲| = \pi\,|\frac{۱۵}{۴}-\frac{۱۳}{۴}| = \frac{\pi}{۲}$

(هویدی) (فصل دوم ـ درس دوم ـ محاسبه شعاع و مرکز دو دایره)

۱۱- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم.



$$O = (-۱ , ۱) \Rightarrow r = \sqrt{۱+۱+۱} = \sqrt{۳}$$

$$d = \frac{|-۱+۱-۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

به‌دست می‌آید.

$$AH = \sqrt{r^{۲} - d^{۲}} = \sqrt{۳ - \frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۵}{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

در نتیجه: $AB = ۲AH = \sqrt{۱۰}$

(هویدی) (فصل دوم ـ درس دوم ـ وضع خط و دایره)

۱۲- گزینه «۳» ـ مرکز و شعاع دو دایره را به‌دست می‌آوریم:

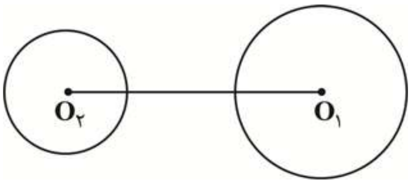
$O_۱ = (۱ , -۲) \qquad r_۱ = ۲$

$O_۲ = (۰ , ۱) \qquad r_۲ = ۱$

$O_۱O_۲ = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰}$

چون $\sqrt{۱۰} > ۱ + ۲$ پس: $r_۱ + r_۲ < O_۱O_۲$

در نتیجه دو دایره متخارج هستند.



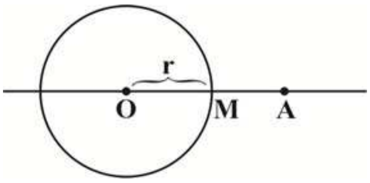
(هویدی) (فصل دوم ـ درس دوم ـ وضع دو دایره)

۱۳- گزینه «۲» ـ ابتدا مرکز و شعاع دایره را به‌دست می‌آوریم:

$O = (۱ , -۱) \qquad r = ۳$

$OA = \sqrt{۳^{۲} + ۴^{۲}} = ۵$

چون $r < OA$ پس A خارج دایره است. کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از دایره به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$MA = OA - r = ۵ - ۳ = ۲$$

(هویدی) (فصل دوم ـ درس دوم ـ وضع نقطه و دایره)