

ریاضیات گسسته

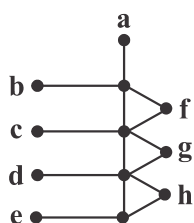
۱- گزینه «۳» - مجموعه D به شرطی یک مجموعه احاطه‌گر گراف شکل داده شده است که از دو سر هر یال حداقل یکی را داشته باشد، در نتیجه از $\binom{8}{6}$ مجموعه شش عضوی از رأس‌های گراف فقط فقط چهار مجموعه شش عضوی احاطه‌گر نیستند (مجموعه‌های شش عضوی که دو سر یکی از چهار یال را ندارد)، بنابراین پاسخ برابر است با:

$$\binom{8}{6} - 4 = 28 - 4 = 24$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - احاطه‌گر)

۲- گزینه «۳» - می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند، پس در این گراف هر رأس $4 = 3 + 1$ رأس را احاطه می‌کند. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - احاطه‌گری)

۳- گزینه «۴» - مجموعه زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو است.



$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

توجه کنید که با حذف هر رأس دیگر آن رأس خودش احاطه نمی‌شود.

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - احاطه‌گر مینیمال)

۴- گزینه «۲» - در هر گراف کامل K_p هر رأس به تنهایی یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، پس تعداد مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم این گراف برابر تعداد رأس‌ها یعنی p است، بنابراین تعداد $7 - p$ مجموعه در گراف K_6 برابر ۶ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - احاطه‌گر مینیمم)

۵- گزینه «۲» - کافی است رأس a را با یکی از رئوس مثلث سمت راست انتخاب کنیم؛ یعنی مجموعه‌های $\{a, b\}$ ، $\{a, c\}$ و $\{a, d\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم شامل رأس a هستند. توجه کنید که انتخاب رأس a با هر یک از رأس‌های f و e نمی‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر دو عضوی ایجاد کند. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم - فصل دوم - درس دوم - احاطه‌گر مینیمم)

۶- گزینه «۳» - توجه کنید که اگر x یکی از رئوس یک گراف باشد و D مجموعه احاطه‌گر گراف باشد، همواره $D \cap N[x] \neq \emptyset$. به بیان دیگر برای احاطه شدن x از بین x و رئوس مجاور آن حداقل یک عضو باید در مجموعه احاطه‌گر باشد، چون در غیر این صورت رأس x احاطه نمی‌شود. در

گراف داده شده چون $N[b] = \{h, g, d\}$ ، پس هر مجموعه احاطه‌گر با این مجموعه عضو مشترک دارد. (هویدی) (فصل دوم - درس دوم - احاطه‌گر)

۷- گزینه «۱» - مسأله را دسته‌بندی می‌کنیم:

دسته اول: فقط هزارگان برابر ۵ باشد.

$$\boxed{1} \boxed{9} \boxed{9} \boxed{9} \Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 9^3$$

دسته دوم: فقط صدگان برابر ۵ باشد.

$$\boxed{8} \boxed{1} \boxed{9} \boxed{9} \Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = 8 \times 9^2$$

دسته سوم و چهارم: فقط دهگان برابر ۵ باشد یا فقط یکان برابر ۵ باشد. تعداد حالت‌های هر یک از این دو دسته هم مانند دسته دوم

برابر 8×9^2 است. در نهایت تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$9^3 + 3 \times 8 \times 9^2 = 9^2(9 + 3 \times 8) = 9^2 \times 33$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - یادآوری ترکیبات)

۸- گزینه «۴» - برای محاسبه تعداد عددهای سه رقمی حالت بندی می کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} (1) 1, 3, 7 \rightarrow 3! = 6 \\ (2) 1, 1, 3 \\ (3) 1, 1, 7 \\ (4) 3, 3, 1 \\ (5) 3, 3, 7 \\ (6) 7, 7, 1 \\ (7) 7, 7, 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{هر مورد } \frac{3!}{2!}} 6 \times \frac{3!}{2!} = 18$$

بنابراین تعداد کل عددها برابر $6 + 18 = 24$ است. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - جایگشت با تکرار)

۹- گزینه «۲» - ابتدا دو عبارت \tan را در یک دسته در نظر می گیریم:

$\tan \tan i i n e r o l$

تعداد حالت ها برابر تعداد جایگشت های حروف باقی مانده و این دو دسته است.

$$\frac{9!}{2!2!}$$

به دو مطلب در این سؤال دقت بفرمایید:

۱- در این سؤال نگفته است حروف کلمه \tan کنار هم باشند، بلکه خواسته ایم واژه \tan ظاهر شود.

۲- در شمارش پاشخ دو دسته \tan و \tan هم عضو تکراری به حساب می آید. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - جایگشت با تکرار)

۱۰- گزینه «۱» - اگر x_i را تعداد گل های نفر i ام در نظر بگیریم، پاسخ این سؤال معادل است با تعداد جواب های معادله زیر با شرط های نوشته شده:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4$$

تعداد جواب های این معادله برابر است با:

$$\binom{15 + (4-1) - 1 - 2 - 3 - 4}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - معادله خطی با ضرایب واحد)

۱۱- گزینه «۳» - هر یک از x_i ها را به فرم $5^{m_i} \times 11^{n_i}$ در نظر می گیریم. می توان نوشت:

$$x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = 5^{m_1} \times 11^{n_1} \times 5^{m_2} \times 11^{n_2} \times 5^{m_3} \times 11^{n_3} \times 5^{m_4} \times 11^{n_4} = 5^{m_1+m_2+m_3+m_4} \times 11^{n_1+n_2+n_3+n_4}$$

بنابراین تعداد جواب ها برابر تعداد جواب های صحیح و نامنفی دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3 \end{cases}$$

بنابراین تعداد جواب های معادله داده شده برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times \binom{6}{3} = 4 \times 20 = 80$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - معادله خطی با ضرایب واحد)

۱۲- گزینه «۳» - در مربع لاتین مرتبه ۶ هر یک از عددهای ۱ تا ۶ دقیقاً در ۶ خانه ظاهر شده اند، بنابراین برای انتخاب دو خانه با عددهای برابر، ابتدا

یکی از ۶ عدد را انتخاب می کنیم، سپس دو خانه شامل این عدد را انتخاب می کنیم، در نتیجه پاسخ برابر است با:

$$6 \times \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - مربع لاتین)

۱۳- گزینه «۳» - بنابر متن کتاب درسی (مسئله ۶۷ کتاب درسی را ببینید) اگر $n \neq 1, 2, 6$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد و

برای $n = 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد. (هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس اول - دو مربع لاتین متعامد)

۱۴- گزینه «۲» - مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند A، اعداد بخش پذیر بر ۵ را B و اعداد بخش پذیر بر ۶ را C بنامیم. تعداد عضوهای $A' \cap B' \cap C'$ جواب است. می توان نوشت:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C| = 350 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= 350 - \left(\left[\frac{350}{4} \right] + \left[\frac{350}{5} \right] + \left[\frac{350}{6} \right] - \left[\frac{350}{20} \right] - \left[\frac{350}{12} \right] - \left[\frac{350}{30} \right] + \left[\frac{350}{60} \right] \right) = 350 - (87 + 70 + 58 - 17 - 29 - 11 + 5) = 187$$

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - اصل شمول و عدم شمول)

۱۵- گزینه «۳» - تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه ۱۲ برابر $\binom{12}{2} = 66$ است، پس ۶۶ یال با هفت رنگ، رنگ شده‌اند. چون $66 > 7 \times 9$ ، پس طبق

اصل لانه کبوتری حداقل $9 + 1 = 10$ یال هم‌رنگ وجود دارد. در ضمن چون $66 \leq 7 \times 10$ ، می‌توانیم یال‌ها را به گونه‌ای رنگ کنیم که هر رنگ حداکثر در ده یال به کار رود، پس بزرگ‌ترین عدد k به طوری که همواره k یال هم‌رنگ وجود داشته باشد، برابر ۱۰ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم - فصل سوم - درس دوم - اصل لانه کبوتر)