ریاضی و آمار

۱-گزینه «۴» ـ

$$2x^2-ax-8=0 \Rightarrow a=2\,,\ b=-a\,,\ c=-8$$

برای آنکه معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta>0$ باشد:

$$\Delta=b^2-4ac=(-a)^2-4(2)(-8)=a^2+64$$

عبارت a^2+64 یک عبارت همواره مثبت است. پس به ازای هر مقدار a این معادلـه دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

(یگانه) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ معادلات درجه ۲ ـ معادله درجه دو و کاربردها) (متوسط)

۲-گزینه «۴» ـ می‌دانیم اگر $A^2=B^2$ باشد، آن‌گاه $A=\pm B$ است. در اینجـا از طـرفین تساوی جذر می‌گیریم:

$$(x-1)=\pm 2(x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=2x+2 \Rightarrow x-2x=2+1 \Rightarrow -x=3 \Rightarrow x=-3 \\ x-1=-2x-2 \Rightarrow x+2x=-2=-2+1 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

قدرمطلق تفاضل دو ریشه برابر است با:

$$\left|-3-(-\frac{1}{3})\right|=\left|-3+\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-9+1}{3}\right|=\left|-\frac{8}{3}\right|=\frac{8}{3}$$

(یگانه) (پایه دهم ـ درس دوم ـ معادله درجه ۲ ـ معادله درجه دو و کاربردها) (متوسط)

۳-گزینه «۱» ـ فرض کنیم α و β ریشه‌های ایـن معادلـه باشـند. پس طـبق فـرض مسـئله داریم: $\alpha=2\beta$. از طرفی مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-9}{2}$$

پس:

$$\alpha+\beta=-\frac{9}{2} \xrightarrow{\alpha=2\beta} 2\beta+\beta=-\frac{9}{2}$$

$$3\beta=-\frac{9}{2} \xrightarrow{\times 2} 6\beta=-9 \Rightarrow \beta=-\frac{9}{6}=-\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha=2(-\frac{3}{2})=-3$$

ریشه‌های معادله اعداد ۳- و $-\frac{3}{2}$ هستند که حتماً در معادله صدق می‌کنند:

$$\xrightarrow[\text{صدق در معادلـه}]{x=-3} 2(-3)^2+9(-3)+a=0 \Rightarrow 18-27+a=0 \Rightarrow a=9$$

(یگانه) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ روابط بین ریشه‌ها ـ معادله درجه دو و کاربردها) (متوسط)

۴-گزینه «۱» ـ

$$ax^2+5x+2-a=0 \Rightarrow a=a\,,\ b=5\,,\ c=2-a$$

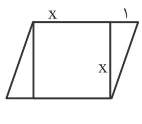
$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}=\frac{2-a}{a}=3 \Rightarrow 3a=2-a \Rightarrow 3a+a=2$$

$$\Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{a}=\frac{-5}{\frac{1}{2}}=-10$$

(یگانه) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ روابط بین ریشه‌ها ـ معادله درجه دو، حل معادله درجه دو) (متوسط)

۵-گزینه «۳» ـ ضلع مربع را x درنظر می‌گیریم:



$$S_{\square}=\text{مساحت مربع}=x^2\,,\ S_{\triangle}=\text{مساحت مثلث}=\frac{x\times 1}{2}=\frac{x}{2}$$

طبق فرض مسئله داریم:

$$S_{\square}=\frac{3}{4}S_{\triangle}+\frac{27}{32} \Rightarrow x^2=\frac{3}{4}(\frac{x}{2})+\frac{27}{32}$$

$$\xrightarrow{\times 32} 32x^2-12x-27=0 \xrightarrow{\div 4} 8x^2-3x-\frac{27}{4}=0$$

$$\Delta=(-3)^2-4(8)(-\frac{27}{4})=9+216=225$$

$$x_1x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{225}}{2(8)}=\frac{3\pm 15}{16}$$

$$x_1=\frac{3+15}{16}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8} \qquad x_2=\frac{3-15}{16}\ \text{غ ق ق} \Rightarrow \text{قاعـده متـوازی الاضلاع}=x+1=\frac{9}{8}+1=\frac{17}{8}$$

(سراسری ۱۴۰۱) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس دوم ـ کاربرد معادله درجه دو ـ معادله درجه دو و کاربردها) (دشوار)

۶-گزینه «۱» ـ تجزیه شده عبارت x^2+x-2 به صورت $(x-1)(x+2)$ است که خود مخرج مشترک بین مخرج‌ها است. پس طرفین تساوی را در این مخرج مشترک ضرب می‌کنیم:

$$(x-1)(x+2)(\frac{2x}{x-1}+\frac{9}{(x-1)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2})$$

$$2x(x+2)+9=(x-1)^2 \Rightarrow 2x^2+4x+9=x^2-2x+1$$

$$2x^2+4x+9-x^2+2x-1=0 \Rightarrow x^2+6x+8=0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{matrix}$$

عدد ۲- مخرج کسر را صفر می‌کند پس غیرقابل قبول است و در نتیجه معادلـه فقـط یـک جواب منفی دارد.

(یگانه) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات گویا ـ معادله درجه دو، معادلات گویا) (دشوار)

۷-گزینه «۴» ـ می‌دانیم ریشه هر معادله در معادله صدق می‌کند. پس بـه جـای t عـدد ۳- را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-68}=\frac{4-(-3)}{2-2(-3)} \Rightarrow \frac{27+k}{100-68}=\frac{7}{8}$$

$$8(27+k)=7(32) \xrightarrow{\text{تقسیم بر طرفین ۸}} 27+k=7\times 4$$

$$k=28-27 \Rightarrow k=1$$

(کتاب درسی) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ معادلات گویا ـ معادله درجه دو و معادلات گویا) (آسان)

۸-گزینه «۳» ـ تعدا افراد اولیه n نفر بوده است و سهم هر کدام از آن‌ها $\frac{1}{n}$، تعـداد افـراد در حالت جدید $n+1$ نفر بوده است و سهم هر کدام از آن‌ها $\frac{1}{n+1}$ حال مـی‌دانـیم اخـتلاف مقدار حالت اولیه و حالت جدید $\frac{1}{12}$ است:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{12} \xrightarrow{\times 12n(n+1)} 12(n+1)-12n=n(n+1)$$

$$\Rightarrow 12n+12-12n=n^2+n \Rightarrow n^2+n-12=0$$

$$\Rightarrow (n-3)(n+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} n-3=0 \Rightarrow n=3\ \text{ق ق} \\ n+4=0 \Rightarrow n=-4\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تعداد افراد در حالت اولیه ۳ نفر و در حالت جدید $n+1=3+1=4$ نفر است.

(یگانه) (پایه دهم ـ فصل اول ـ درس سوم ـ کاربرد معادلات گویا ـ معادله درجه دو، معادلات گویا) (متوسط)

۹-گزینه «۲» ـ مسیر رفت و برگشت به صورت زیر است:

$$A \xrightarrow[\text{۳ حالت}]{} B \xrightarrow[\text{۲ حالت}]{} D \xrightarrow[\substack{\text{۱ حالت}\\ \text{(یکی کم می‌شود)}}]{} B \xrightarrow[\substack{\text{۲ حالت}\\ \text{(یکی کم می‌شود)}}]{} A$$

طبق اصل ضرب تعداد حالات خواسته شده برابر است با:

$$3\times 2\times 1\times 2=12$$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل ضرب ـ آمار و احتمال، شمارش) (آسان)

۱۰-گزینه «۲» ـ

$$\boxed{3}\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{2}=36$$

همه ارقام به جز صفر و رقم به کار رفته در یکان

ارقام ۱ یا ۵

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل ضرب ـ آمار و احتمال، شمارش) (آسان)

۱۱-گزینه «۱» ـ

$\boxed{\text{دانش}}$ گ ا ه

کلمه دانش را نگه داشته که به همراه ۳ حرف دیگر کلاً ۴ شـی داریـم و جایگشـت ۴ شـی برابر !۴ است.

$$4!=4\times 3\times 2\times 1=24$$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۲-گزینه «۳» ـ

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}=\frac{1}{n(n+1)}$$

می‌دانیم: $0/05=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$ است پس:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{20} \Rightarrow n(n+1)=20 \Rightarrow n^2+n-20=0$$

$$\Rightarrow (n+5)(n-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} n+5=0 \Rightarrow n=-5\ \text{غ ق ق} \\ n-4=0 \Rightarrow n=4\ \text{ق ق} \end{cases}$$

به جای n عدد ۴ را قرار می دهیم:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=\frac{(4+3)!}{(4+1)!}=\frac{7!}{5!}=\frac{7\times 6\times 5!}{5!}=42$$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ فاکتوریل ـ آمار و احتمال، شمارش) (دشوار)

۱۳-گزینه «۴» ـ هر حرف S در ۴ وضعیت مختلف می‌تواند حضور داشته باشد. و پنج حرف دیگر به $۵\times۴\times۳=۶۰$ حالت می‌توانند قرار بگیرند. پس تعداد کل حالات برابر است با:

$۴\times۶۰=۲۴۰$

$$\begin{array}{llll} \underline{S} & \underline{\ \ } & \underline{\ \ } & \underline{\ \ } \\ ۱\times & ۵\times & ۴\times & ۳=۶۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \underline{\ \ } & \underline{S} & \underline{\ \ } & \underline{\ \ } \\ ۵\times & ۱\times & ۴\times & ۳=۶۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \underline{\ \ } & \underline{\ \ } & \underline{S} & \underline{\ \ } \\ ۵\times & ۴\times & ۱\times & ۳=۶۰ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \underline{\ \ } & \underline{\ \ } & \underline{\ \ } & \underline{S} \\ ۵\times & ۴\times & ۳\times & ۱=۶۰ \end{array}$$

(سراسری ۹۷) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۴-گزینه «۳» ـ دو حالت در نظر می‌گیریم: (دقت کنید که چون تکرار مجاز نیست برای پر شدن هر جایگاه از تعداد حالات قبلی کم می‌شود.)

الف) رقم یکان صفر باشد:

$$\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}}=۶۰$$

ب) رقم یکان ۵ باشد:

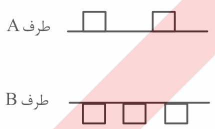
$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\text{همه ارقام به جز صفر ۵}}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{\text{فقط ۵}}=۴۸$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$۶۰+۴۸=۱۰۸$

(سراسری ۹۸) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ اصل ضرب و اصل جمع ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۵-گزینه «۳» ـ راهرو هتل به صورت مقابل است:



دو حالت درنظر می‌گیریم:

الف) علی و حسن در طرف A و ۳ نفر دیگر در طرف B باشند:

$$\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت علی و حسن}}\times\overbrace{۳!}^{\text{جایگشت ۳ نفر}}=۲\times۶=۱۲$$

ب) علی و حسن در طرف B و ۲ نفر در طرف A:

$$\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت علی و حسن}}\times\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت ۲ بسته}}\times\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت ۳نفر}}=۲\times۲\times۶=۲۴$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$۱۲+۲۴=۳۶$

(سراسری ۱۴۰۱) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت ـ آمار و احتمال، شمارش) (دشوار)

۱۶-گزینه «۱» ـ ارقام فرد را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را یک شی در نظر می‌گیریم که به همراه دو رقم دیگر کلاً به !۳ طریق جایگشت دارند. از طرفی ۳ رقم فرد داخل بسته نیز خود به !۳ طریق جایگشت دارند و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر است با: $\boxed{۳,۵,۷},۴,۶$

$۳!\times۳!=۶\times۶=۳۶$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۷-گزینه «۲» ـ ۳ حرف A و ۳ حرف غیر A داریم و با توجه به خواسته مسئله با دو وضعیت مواجه هستیم:

$$\begin{array}{llllll} \underline{A} & \underline{\ \ } & \underline{A} & \underline{\ \ } & \underline{A} & \underline{\ \ } \\ ۱\times & ۳\times & ۱\times & ۲\times & ۱\times & ۱=۶ \end{array}$$

یا

$$\begin{array}{llllll} \underline{\ \ } & \underline{A} & \underline{\ \ } & \underline{A} & \underline{\ \ } & \underline{A} \\ ۳\times & ۱\times & ۲\times & ۱\times & ۱\times & ۱=۶ \end{array}$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالات برابر است با:

$۶+۶=۱۲$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت‌های یک در میان ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۸-گزینه «۳» ـ

جایگشت ۴ نفر بین خواهرها !۴ و جایگشت (جابه‌جایی) خواهرها در اول و آخر صف نیز !۲ خواهد بود و طبق اصل ضرب داریم:

$۴!\times۲!=(۴\times۳\times۲\times۱)\times(۲\times۱)=۲۴\times۲=۴۸$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ جایگشت ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)

۱۹-گزینه «۴» ـ از بین ۱۰ فیلم باید ۳ فیلم را به ترتیب انتخاب کنیم:

$$p(n,r)=p(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲۰$$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل ـ آمار و احتمال، شمارش) (آسان)

۲۰-گزینه «۳» ـ می‌دانیم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$p(n,n-۱)=\frac{n!}{(n-(n-r))!}=\frac{n!}{(n-n+r)!}=\frac{n!}{۱!}=\frac{n!}{۱}=n!$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۲»:

$$p(n,۱)=\frac{n!}{(n-۱)!}=\frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!}=n$$

گزینه «۳»:

$$p(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=\frac{n!}{۱}=n!$$

گزینه «۴»:

$$p(n,۰)=\frac{n!}{(n-۰)!}=\frac{n!}{n!}=۱$$

(یگانه) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ تبدیل ـ آمار و احتمال، شمارش) (متوسط)