

هندسه

۱- گزینه «۲» -

$$C_{12} = (A \text{ سطر اول ماتریس}) \times (B \text{ ستون دوم ماتریس}) = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & -1 & 2 \end{bmatrix} = 8 \Rightarrow m - 1 + 4 = 8 \Rightarrow m = 5$$

$$(A \text{ ستون اول ماتریس}) \times (B \text{ سطر اول ماتریس}) = \text{درایه‌های سطر اول و ستون اول}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} = 10 + 2 = 12$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ماتریس و اعمال روی ماتریس) (متوسط)

۲- گزینه «۴» -

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 7 & 12 & 19 \\ 13 & 19 & 27 \end{bmatrix}$$

$$a = 7 + 13 + 19 = 39 \Rightarrow a - b = 0$$

$$b = 7 + 13 + 19 = 39$$

روش دوم: با کمی دقت می‌توان فهمید که درایه‌های این ماتریس نسبت به قطر اصلی متقارن هستند. (چون با عوض کردن جای ۱ و ۲ تغییری در حاصل عبارت ایجاد نمی‌شود.

برای مثال $a_{12} = a_{21}$ بنابراین مجموع عناصر بالای قطر اصلی با مجموع عناصر پایین قطر اصلی برابر است. (یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ماتریس و اعمال روی ماتریس) (آسان)

۳- گزینه «۲» - می‌دانیم A و I تعویض‌پذیرند بنابراین اتحادها روی آن‌ها صادق است.

$$A^2 = 4A$$

$$(A - 2I)^4 = \left[(A - 2I)^2 \right]^2 = (A^2 - 4A + 4I)^2 = (4A - 4A + 4I)^2 = (4I)^2 = 16I$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ماتریس و اعمال روی ماتریس) (متوسط)

۴- گزینه «۳» - از آن‌جا که حاصل این ضرب یک ماتریس 3×3 است. ماتریس A باید 1×3 باشد:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ -2x & -2y & -2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \Rightarrow a + b + f = 3x + 2y - 2z = 9 - 2 - 4 = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ماتریس و اعمال روی ماتریس) (دشوار)

۵- گزینه «۱» -

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2^x \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2^x \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2^x \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A^{\text{زوج}} = I \\ A^{\text{فرد}} = A \end{cases}$$

$$B = A^2 + A^2 + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2^x \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2^x \\ 2^{-x} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2^x \\ 2^{-x} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{حاصل ضرب درایه‌ها} = 2 \times 2^x \times 2^{-x} \times 2 = 4$$

(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ماتریس و اعمال روی ماتریس) (متوسط)

۶- گزینه «۴» -

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A + B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم:

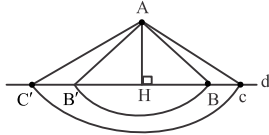
$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 = (A + B)^2 - (AB + BA) = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 18 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 8 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 3 + 5 = 8$$

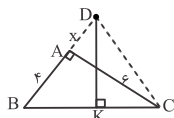
(یاقوتی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ماتریس و اعمال روی ماتریس) (آسان)

۷- گزینه «۴» - با معلومات گزینه‌های «۱» و «۲» و «۳» دقیقاً یک مثلث رسم می‌شود. در مورد گزینه «۴» برای رسم مثلث با داشتن ۲ ضلع و ارتفاع ضلع سوم ابتدا خط d که ضلع مثلث روی آن قرار می‌گیرد را رسم می‌کنیم. سپس خطی عمود بر آن و به اندازه ارتفاع داده شده خارج می‌کنیم تا به نقطه A برسیم. به مرکز A و شعاع‌های برابر با اندازه اضلاع داده شده ۲ کمان می‌زنیم تا خط d را قطع کنند. مثلث‌های ABC و $AB'C$ می‌توانند جواب‌های مسأله باشند که باهم همنهشت نیستند. پس ۲ مثلث با این شرایط قابل رسم خواهد بود.



(یاقوتی) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - ترسیم‌های هندسی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» - D روی عمودمنصف BC است بنابراین:



$$DB = DC = 4 + x$$

$$\triangle DAC \text{ در مثلث قائم الزاویه } DC^2 = AC^2 + AD^2 \Rightarrow (4 + x)^2 = 2^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 16 + 8x + x^2 = 4 + x^2 \Rightarrow x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5$$

(یاقوتی) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - ترسیم‌های هندسی) (متوسط)

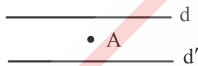
۹- گزینه «۴» -

$$\hat{A} = \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه است و محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائم (B) قرار دارد. (یاقوتی) (پایه دهم - فصل اول - درس اول - ترسیم‌های هندسی) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» - نقاطی که به فاصله ℓ از نقطه A قرار دارند روی دایره به مرکز A و شعاع ℓ قرار می‌گیرند. محل‌های برخورد این دایره با خطوط d و d' جواب مسأله هستند. این دایره ممکن است هیچ‌کدام از ۲ خط را قطع نکند. ($k = 0$) و یا بر هر دو خط مماس شود. ($k = 2$) و یا اینکه هر دو خط را قطع کند. بنابراین k می‌تواند ۳ مقدار مختلف داشته باشد.



(یاقوتی) (پایه دهم - فصل اول - درس دوم - استدلال) (دشوار)