

ریاضیات گسسته

- ۱- گزینه «۲» - گزاره «الف» درست است. اثبات در کتاب درسی آمده است.
 گزاره «ب» درست است. اثبات در کتاب درسی آمده است.
 گزاره «پ» نادرست است. مثال نقض $n = 4$ است.
 گزاره «ت» نادرست است. مثال نقض $x = 16$ و $y = 9$ است.
 (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - اثبات مستقیم و مثال نقض (آسان)

- ۲- گزینه «۳» - اگر $a = b$ باشد می توان طرفین را به توان ۳ رساند و اگر $a^3 = b^3$ می توان از طرفین ریشه سوم گرفت. پس گزینه «۳» درست است و سایر گزینه ها با مثال نقض رد می شوند. (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - گزاره های هم ارز (آسان)
- ۳- گزینه «۲» - گزاره «الف» نادرست است.

- گزاره «ب» درست است و به طور مستقیم اثبات می شود.
 گزاره «پ» درست است و به روش برهان خلف اثبات می شود. (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - برهان خلف (آسان)
- ۴- گزینه «۴» - هم ارزی بیان شده اثبات به روش در نظر گرفتن همه حالت های ممکن است.
 (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - گزاره های هم ارزی (آسان)

۵- گزینه «۴» - بررسی گزینه ها:

گزینه «۱»: اول است و باقی مانده تقسیم بر ۸ برابر ۳ است.

گزینه «۲»: $91 = 13 \times 7$ پس اول نیست.

گزینه «۳»: اول است و باقی مانده تقسیم بر ۸ برابر ۳ است.

گزینه «۴»: اول است ولی باقیمانده تقسیم آن بر ۸ برابر ۳ نیست. (مثال نقض)
 (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - مثال نقض (آسان)

۶- گزینه «۲» - عبارت $n^2 + n + 97$ به ازای $n = 97$ اول نیست زیرا:

$$n = 97 \Rightarrow 97^2 + 97 + 97 = 97(97 + 1 + 1) = 97 \times 99$$

یعنی $n^2 + n + 97$ بر ۹۷ بخش پذیر است. پس اول نیست.

عبارت $n^2 + n + 97 = 101$ و $n = 71$ به ازای اول است. (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - مثال نقض (متوسط)

۷- گزینه «۴» - بررسی گزینه ها:

$$1) x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0$$

$$2) x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$$

$$3) x^2 + y^2 + xy \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \frac{3x^2}{4} \geq 0$$

بنابراین گزینه «۴» هم ارز حکم نیست. (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - بازگشتی (متوسط)

۸- گزینه «۳» - بررسی گزینه ها:

گزینه «۱» و «۲» تمرین کتاب درسی هستند که به روش بازگشتی برای تمام متغیرهای حقیقی درست هستند.

گزینه «۳» در صورتی که x و y هم علامت نباشند، نادرست است.

گزینه «۴»:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \geq \frac{1}{4}ab \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{4}ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{4} \geq \frac{ab}{4}$$

(ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - بازگشتی (متوسط)

۹- گزینه «۳» -

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

گزاره همیشه درست است (ابراهیم پور) پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - بازگشتی (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - می‌دانید که: زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند. بنابراین چون $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است پس $\frac{n(n+1)}{2}$ نیز زوج است.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2K \Rightarrow n(n+1) = 4K$$

یعنی $n(n+1)$ باید مضرب ۴ شود و این زمانی حاصل می‌شود که n به صورت $4K$ یا $4K-1$ باشد. حال باید از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ عددهایی که به فرم $4K$ یا $4K-1$ هستند را شمارش کنیم.

$$1 \leq 4K \leq 100 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq K \leq 25 \Rightarrow K \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$$

$$1 \leq 4K-1 \leq 100 \Rightarrow 2 \leq 4K \leq 101 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq K \leq \frac{101}{4} \Rightarrow K \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$$

$$\text{تعداد کل} = 25 + 25 = 50$$

(ابراهیم پور) (پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - روش مستقیم) (دشوار)

۱۱- گزینه «۲» -

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 + z^2 - 2xz) + (y^2 + z^2 - 2yz) = 0$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$$

بنابراین سه تایی‌های مرتب به صورت $(10, 10, 10)$, $(9, 9, 9)$, \dots , $(-10, -10, -10)$ که تعداد آنها برابر ۲۱ است.

(ابراهیم پور) (پایه دوازدهم - استدلال ریاضی - روش مستقیم) (دشوار)