ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۲» ـ بنابر مثال صفحه ۶ کتاب درسی ثابت می‌شود این عدد، عددی زوج است.

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ برهان خلف) (دشوار)

۲- گزینه «۱» ـ در گزاره داده شده در گزینه «۱» هم‌ارز نیستند. مثلاً به‌ازای $A=\{۱\}$، $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$ گزاره $A\cap C=B\cap C$ درست است، امّا گزاره $A=B$ نادرست است. (سراسری خارج از کشور ریاضی ـ ۹۶ با تغییر) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ گزاره‌های هم‌ارز) (آسان)

۳- گزینه «۲» ـ می‌توان ثابت کرد اگر عددی به‌صورت ۲^n باشد، نمی‌توان آن را به‌صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت، بنابراین $۲^۶=۶۴$ کلیت این گزاره را نقض می‌کند. می‌توان سایر گزینه‌ها را به‌صورت زیر نوشت:

$$۵۶=۱۲+۱۳+۱۴+۱۵$$
$$۷۲=۲۳+۲۴+۲۵$$
$$۷۴=۱۷+۱۸+۱۹+۲۰$$

(سراسری ریاضی ـ ۹۲) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ مثال نقض) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ـ بنابر مطالب صفحه ۴ کتاب درسی این گزاره توجیه اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها است.

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ روش اشباع) (آسان)

۵- گزینه «۲» ـ به روش اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها می‌توان نوشت:

$$a=۱ \Rightarrow a^۲-a=۱-۱=۰ \checkmark$$
$$a=۲ \Rightarrow a^۲-a=۴-۲=۲ \times$$
$$a=۳ \Rightarrow a^۲-a=۹-۳=۶ \checkmark$$
$$a=۴ \Rightarrow a^۲-a=۱۶-۴=۱۲ \checkmark$$
$$a=۵ \Rightarrow a^۲-a=۲۵-۵=۲۰ \times$$
$$a=۶ \Rightarrow a^۲-a=۳۶-۶=۳۰ \checkmark$$

در بین ۶ عدد فوق، ۴ عدد مضرب ۳ هستند، پس احتمالِ مطلوب برابر $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ روش اشباع) (آسان)

۶- گزینه «۳» ـ فرض خلف، همان نقیض گزاره « $n^۳$ بر ۲ بخش‌پذیر است یا $n+۳$ عددی زوج است» است. نقیض این گزاره نیز هم‌ارز با گزاره « $n^۳$ بر ۲ بخش‌پذیر نیست و $n+۳$ عددی فرد است» است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ برهان خلف) (متوسط)

۷- گزینه «۲» ـ گزاره بیان شده در گزینه «۲» نادرست است. چون عدد $۲^n+۳$ به ازای $n=۴$ نیز عددی اول است، چون $۲^۴+۳=۱۹$.

(هویدی) (پایه دوازهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ مثال نقض) (متوسط)

۸- گزینه «۱» ـ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: اگر a کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت باشد، چون $a>۰$، پس $۰<\frac{a}{۲}<a$؛ یعنی عددی حقیقی کوچک‌تر از a وجود دارد و این با فرض اولیه در تناقض است.

گزینه «۲»: با اثبات بازگشتی ثابت می‌شود:

$$a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \xleftrightarrow{a>۰} a^۲+۱\geq ۲a \Leftrightarrow a^۲-۲a+۱\geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲\geq ۰$$

گزینه «۳»: به روش مستقیم ثابت می‌شود:

$$a=x^۲+y^۲ \Rightarrow ۲a=۲x^۲+۲y^۲=(x+y)^۲+(x-y)^۲$$

گزینه «۴»: به روش مستقیم ثابت می‌شود:

$$a=۲k+۱=(k^۲+۲k+۱)-k^۲=(k+۱)^۲-k^۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ برهان خلف، اثبات مستقیم و اثبات بازگشتی) (دشوار)

۹- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy \Leftrightarrow ۲xy=۰ \Leftrightarrow xy=۰$$

برابری $xy=۰$ زمانی برقرار است که حداقل یکی از مقادیر x یا y برابر صفر باشند، بنابراین بی‌شمار جواب وجود دارد.

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل اول ـ درس ۱ ـ اثبات بازگشتی) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» ــ به دو روش می‌توان این نابرابری را ثابت کرد:

راه اول: $a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$

به‌طور مشابه می‌توان به نابرابریِ درستِ $(\frac{a}{2}+b)^2+\frac{3a^2}{4}\geq 0$ **پی برد.**

راه دوم: $a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2\geq 0$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ اثبات بازگشتی) **(متوسط)**

۱۱- گزینه «۲» ــ عبارت $[\frac{(n+3)(n+4)}{2}]^2$ **زمانی زوج است که** $\frac{(n+3)(n+4)}{2}$ **زوج باشد یا** $(n+3)(n+4)$ **مضرب ۴ باشد. این عبارت به‌ازای** $n=4k$ **یا** $n=4k+1$ **برقرار است و در مجموعه داده شده عددهای** $\{20, 17, 16, 13, 12, 9, 8, 5, 4, 1\}$ **این ویژگی را دارند.**

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ اثبات با در نظر گرفتن تمام حالت‌ها) **(دشوار)**

۱۲- گزینه «۲» ــ عبارت را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$(a^2-2a)+(4b^2+8b)+(9c^2-12c)\geq -k \Leftrightarrow$$

$$(a^2-2a+1)+(4b^2+8b+4)+(9c^2-12c+4)\geq -k+1+4+4 \Leftrightarrow$$

$$(a-1)^2+(2b+2)^2+(3c-2)^2\geq 9-k \Leftrightarrow$$

این نابرابری به‌ازای $9-k\leq 0$ **برقرار است و** $k\geq 9$**، پس کمترین مقدار** k **برابر ۹ است.**

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل اول ــ درس ۱ ــ اثبات بازگشتی) **(متوسط)**