

ریاضی و آمار

۱- گزینه «۳» -

گزینه «۱»:

$$x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow$$

$$x^3 - 2x^2 + x = x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x - x^3 + 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x - 4 = 0$$

گزینه «۲»:

$$(x+3)^2 - (x-2)^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x + 4 - 4x = 0 \Rightarrow 6x + 13 = 0$$

گزینه «۳»:

$$x(2x+2)^2 = 4x^3 - 8x^2 + 16 \Rightarrow 4x^3 + 8x^2 + 4x = 4x^3 - 8x^2 + 16 \Rightarrow 16x^2 + 4x - 16 = 0$$

گزینه «۴»:

$$4(x+3)^2 + 2 = (2x+7)^2 \Rightarrow 4x^2 + 24x + 36 - 4x^2 - 28x - 49 = 0 \Rightarrow -4x - 11 = 0$$

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - درس اول - تشخیص معادله درجه دوم)

۲- گزینه «۲» - چون $x = 2$ یک ریشه معادله است پس باید در معادله صدق کند، پس:

$$(2)^2 - 3(2) + \sqrt{k^2 - 7k + 16} = 0 \Rightarrow 4 - 6 + \sqrt{k^2 - 7k + 16} = 0 \Rightarrow \sqrt{k^2 - 7k + 16} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

پس معادله به صورت زیر می شود:

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - حل معادله درجه دوم)

۳- گزینه «۲» -

$$x^2 - 4mx + 2m - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16m^2 - 8m + 8$$

عبارت $16m^2 - 8m + 8$ همواره مثبت است، زیرا دلتای آن منفی می باشد و ضریب m^2 مثبت پس به ازای هر مقدار m دلتای معادله اصلی

مثبت است و در نتیجه معادله همواره دو ریشه حقیقی دارد. (عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - تعداد ریشه های معادله درجه دوم)

۴- گزینه «۳» -

$$-x^2 + 7x - 3 = 0 \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{\gamma}{-1} = 7 \\ \alpha\beta = \frac{-3}{-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta} = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} =$$

$$\sqrt{(7)^2 - 4(3)} = \sqrt{49 - 12} = \sqrt{37}$$

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - روابط بین ریشه ها)

۵- گزینه «۱» - اگر ریشه های معادله α, β باشند داریم:

$$x^2 - 2x + \Delta = 0 \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha\beta = \Delta \end{cases}$$

قرینه و معکوس ریشه ها برابر $\frac{-1}{\alpha}, \frac{-1}{\beta}$ است پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{\alpha} + \frac{-1}{\beta} &= \frac{-(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{-2}{\Delta} \\ \frac{(-1)}{\alpha} \cdot \frac{(-1)}{\beta} &= \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 + \frac{2}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 0$$

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - روابط بین ریشه ها)

۶- گزینه «۴» -

$$\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{3x-6+x+2}{x^2-4} = \frac{-12}{x^2-4} \Rightarrow 4x-4 = -12 \Rightarrow x = -2$$

ولی $x = -2$ مخرج کسر را صفر کرده و قابل قبول نمی باشد، پس معادله جواب ندارد.

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - معادلات گویا)

۷- گزینه «۴» -

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x-3} + 3 \xrightarrow{\text{بتوان}} x-1 = x-3+9+6\sqrt{x-3}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{x-3} = -7 \Rightarrow$$

جواب رادیکال با فرجه زوج نمی تواند منفی باشد، پس معادله جواب ندارد.

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - معادلات رادیکالی)

۸- گزینه «۳» - در مربع داریم؛

$$(x+3)^2 + (x+3)^2 = (x+5)^2 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = x^2 + 10x + 25$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+28}}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} -1-2\sqrt{2} \\ -1+2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طول ضلع} = x+3 = 2\sqrt{2}+2$$

(عزیزی) (پایه دهم - فصل دوم - درس سوم - کاربرد معادله درجه دوم)

۹- گزینه «۱» -

$$\Delta x - \frac{1}{8}x^2 = k \Rightarrow \frac{1}{8}x^2 - \Delta x + k = 0$$

برای اینکه آن عدد وجود داشته باشد پس باید معادله ریشه داشته باشد، یعنی دلتای معادله ≥ 0 باشد.

$$\Delta = 25 - 4\left(\frac{1}{8}\right)(k) \geq 0 \Rightarrow 25 \geq \frac{k}{2} \Rightarrow k \leq 50$$

(سراسری انسانی - ۹۴ با اندکی تغییر) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - تعداد ریشه های معادله درجه دوم)

۱۰- گزینه «۱» - اگر تعداد محصول اضافی تولید شده x باشد؛

$$\text{فروشنده} = \frac{-\Delta}{2a} = \frac{-\Delta}{4a} \xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ منفی است}} \text{فروشنده} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{(400)^2 - 4(-5)(10000)}{4(-5)} = \frac{160000 + 200000}{-20} = -18000$$

(سراسری خارج از کشور انسانی - ۹۳ با اندکی تغییر) (پایه دهم - فصل دوم - درس دوم - کاربرد معادله درجه دوم)

۱۱- گزینه «۴» - در آزمون ۲ گزینه ای: تعداد حالت پاسخ به هر سؤال ۳ است. (گزینه «۱» یا گزینه «۲» یا بدون پاسخ)

$$\frac{3^5}{2^5} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \text{پس جواب برابر } \frac{3^5}{2^5}$$

(عزیزی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - اصل ضرب)

۱۲- گزینه «۲» -

$$\frac{(n!)^2}{(n+1)!} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{n! \times n!}{(n+1)! \times (n-1)!} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \times n = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{n}{n+1} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 7$$

(عزیزی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - فاکتوریل)

۱۳- گزینه «۳» -

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} &\Rightarrow \text{حالت ۶} \\ \frac{3}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} &\Rightarrow \text{حالت ۶} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حالت ۱۲}$$

(عزیزی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - اصل ضرب و اصل جمع)

۱۴- گزینه «۱» - ۵ نفر از ۱۰ نفر را انتخاب می کنیم و در یک تیم قرار می دهیم و ۵ نفر باقیمانده را در تیم دیگر و یک تقسیم بر ۲ نیاز دارد زیرا اگر

افراد را از ۱ تا ۱۰ نامگذاری کنیم. اگر از ۱ تا ۵ را اول انتخاب کنیم و بعد ۶ تا ۱۰ را انتخاب کنیم با اینکه اول ۶ تا ۱۰ را انتخاب کنیم بعد ۱ تا ۵ را، تفاوتی ندارد و یک حالت است پس جواب برابر است با:

$$\frac{\binom{10}{5} \binom{5}{5}}{2} = \frac{\binom{10}{5}}{2}$$

(عزیزی) (پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب)

۱۵- گزینه «۴» - نکته:

$$\binom{b}{a} + \binom{b}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}$$

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

طبق نکته بالا داریم؛

(عزیزی) پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - ترکیب

۱۶- گزینه «۲» -

$$p(n, 3) - c(n, 3) = 50 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} - \frac{n!}{(n-3)!3!} = 50$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} - \frac{1}{6} \times \frac{n!}{(n-3)!} = 50 \Rightarrow \frac{5}{6} \frac{n!}{(n-3)!} = 50 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 60 \Rightarrow n = 5$$

(عزیزی) پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تبدیل و ترکیب

۱۷- گزینه «۳» - تعداد مثلث‌ها برابر $\binom{8}{3}$ می‌باشد.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

(عزیزی) پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تبدیل

۱۸- گزینه «۲» -

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 10 \times 4 + 5 \times 6 = 40 + 30 = 70$$

دقت شود نمی‌توان ۳ نقطه را از روی یک خط انتخاب کرد. (چرا؟) (عزیزی) پایه دوازدهم - فصل اول - درس اول - تبدیل

۱۹- گزینه «۱» -

$$n(s) = 6^2 \times 2^3 = 36 \times 8 = 288$$

(عزیزی) پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - فضای نمونه

۲۰- گزینه «۱» - مجموع دو تاس عددی بین ۲ تا ۱۲ است. اعداد اول بین ۲ تا ۱۲ برابر گزینه «۱» - مجموع دو تاس عددی بین ۲ تا ۱۲ است. اعداد اول بین ۲ تا ۱۲ برابر؛ ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ می‌باشد. پس تعداد اعضا برابر؛

مجموع تاس‌ها

۲ \Rightarrow ۱, ۱ \Rightarrow حالت ۱

۳ \Rightarrow ۱, ۲ یا ۲, ۱ \Rightarrow حالت ۲

۵ \Rightarrow ۱, ۴ یا ۲, ۳ یا ۴, ۱ یا ۳, ۲ \Rightarrow حالت ۴

۷ \Rightarrow ۱, ۶ یا ۲, ۵ یا ۳, ۴ یا ۶, ۱ یا ۵, ۲ یا ۴, ۳ \Rightarrow حالت ۶

۱۱ \Rightarrow ۵, ۶ یا ۶, ۵ \Rightarrow حالت ۲

$$\Rightarrow \text{کل حالات} = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$$

(عزیزی) پایه دوازدهم - فصل اول - درس دوم - پیشامد تصادفی