

ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» -

$$\frac{1}{x-1} = t \Rightarrow t^2 + 3t = 4 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Rightarrow x=2 \\ t=-4 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = -4 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} = 1/5$$

(گروه مؤلفان علوی) (معادله درجه ۲) (متوسط)

۲- گزینه «۱» -

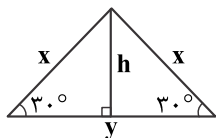
$$S = \alpha + \beta = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = -\frac{1}{3}$$

$$S' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} \Rightarrow -\frac{-k}{27} = \frac{10}{27} \Rightarrow k = 10$$

(گروه مؤلفان علوی) (مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲) (متوسط)

۳- گزینه «۳» -



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x \quad (2)$$

$$S = \frac{h \times y}{2} \xrightarrow{(1), (2)} S(x) = \frac{\frac{x}{2}(12-2x)}{2} \Rightarrow S(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x$$

$$S_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{9}{2} = 4/5$$

(گروه مؤلفان علوی) (ماکزیم و مینیمم تابع درجه ۲) (دشوار)

۴- گزینه «۴» - S نقطه ماکزیمم سهمی است. بنابراین:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow 2 = -\frac{3}{2a} \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 2$$

با توجه به معادله سهمی، عرض از مبدأ سهمی ۲ است، بنابراین C(0, 2) است. پس:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2 \times |B-A|}{2} = \frac{|B-A|}{1} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{3^2 - 4\left(-\frac{3}{4}\right)(2)}}{\left|-\frac{3}{4}\right|} = \frac{\sqrt{15}}{\frac{3}{4}} = 4\sqrt{\frac{5}{3}}$$

(گروه مؤلفان علوی) (صفرهای تابع درجه ۲) (دشوار)

۵- گزینه «۱» -

$$\frac{3x+5}{x(x+5)} + \frac{x(x+4)}{x(x+5)} = \frac{(x+5)(x+1)}{x(x+5)} \Rightarrow 3x+5+x(x+4) = (x+5)(x+1) \Rightarrow 3x+5+x^2+4x = x^2+6x+5 \Rightarrow x=0$$

اما چون $x=0$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، قابل قبول نیست. (گروه مؤلفان علوی) (معادلات گویا) (آسان)

۶- گزینه «۲» - فرض می‌کنیم ماشین A، کار را به تنهایی در x ساعت انجام دهد.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow 18(x+15) + 18x = x(x+15) \Rightarrow 18x + 270 + 18x = x^2 + 15x \Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=30 \\ x=-9 \end{cases} \quad (\text{غ ق ق})$$

(گروه مؤلفان علوی) (معادلات گویا) (متوسط)

۷- گزینه «۳» -

$$\underbrace{\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3}}_{\text{منفی (نامنفی)}} = -1 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

(گروه مؤلفان علوی) (معادلات رادیکالی) (آسان)

۸- گزینه «۲» -

$$-4\sqrt{x^2+2} + x^2 + 2 = -3 \xrightarrow{\sqrt{x^2+2}=t} -4t + t^2 = -3$$

$$\Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+2}=1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ t=3 \Rightarrow \sqrt{x^2+2}=3 \Rightarrow x^2=7 \Rightarrow x=\pm\sqrt{7} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول اند، بنابراین:

$$\text{ضرب ریشه‌ها} = \sqrt{7} \times (-\sqrt{7}) = -7$$

(گروه مؤلفان علوی) (معادلات رادیکالی) (دشوار)

۹- گزینه «۱» - در مستطیل طلایی اگر x طول و y عرض باشد، داریم:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

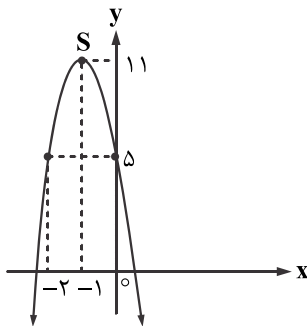
می‌دانیم محیط دو برابر مجموع طول و عرض مستطیل است، بنابراین:

$$x+y=10 \Rightarrow y=10-x \Rightarrow \frac{x+10-x}{x} = \frac{x}{10-x} \Rightarrow \frac{10}{x} = \frac{x}{10-x} \Rightarrow 100-10x=x^2 \Rightarrow x^2+10x-100=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{500}}{2} = \frac{-10 \pm 10\sqrt{5}}{2} = -5 \pm 5\sqrt{5} \xrightarrow{x>0} x = -5 + 5\sqrt{5}$$

(کتاب همراه علوی) (معادلات گویا) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - با توجه به سه نقطه داده شده، معادله سهمی را می‌نویسیم:

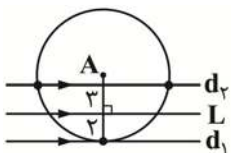


$$y = a(x+1)^2 + 11 \xrightarrow{(0, 5)} 5 = a(0+1)^2 + 11 \Rightarrow a = -6$$

$$y = -6(x+1)^2 + 11 \xrightarrow{\text{بررسی گزینه‌ها}} \begin{cases} x = 1 \\ y = -13 \end{cases}$$

(کتاب همراه علوی) (معادله درجه دوم) (متوسط)

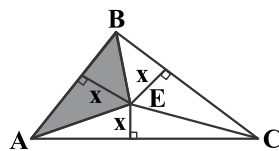
۱۱- گزینه «۴» -



(گروه مؤلفان علوی) (ترسیم‌های هندسی) (آسان)

۱۲- گزینه «۴» - در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع‌ها یکدیگر را روی محیط مثلث و در رأس زاویه قائمه قطع می‌کنند. (گروه مؤلفان علوی) (استدلال) (آسان)

۱۳- گزینه «۳» - می‌دانیم فاصله هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است. پس:



$$S_{\triangle ABC} = 28 \Rightarrow \frac{7 \times x}{2} = 28 \Rightarrow x = 8 \quad (1)$$

$$7 + BC + AC = 25 \Rightarrow BC + AC = 18 \quad (2)$$

$$S = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ACE} = \frac{BC \times x}{2} + \frac{AC \times x}{2} = \frac{x}{2}(BC + AC) \xrightarrow{(1), (2)} 4 \times 18 = 72$$

(گروه مؤلفان علوی) (ترسیم‌های هندسی و استدلال) (متوسط)

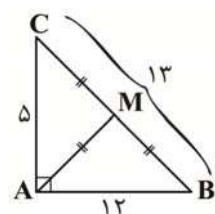
۱۴- گزینه «۱» - طول اضلاع در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند. $13^2 = 12^2 + 5^2$

بنابراین مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه می‌باشد. اما می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه:

(۱) محل برخورد ارتفاع‌ها روی رأس زاویه قائمه قرار دارد.

(۲) محل برخورد عمودمنصف‌ها در وسط وتر قرار دارد.

بنابراین باید طول AM را بیابیم. اما می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس:



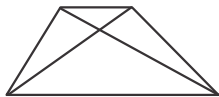
(گروه مؤلفان علوی) (ترسیم‌های هندسی و استدلال) (دشوار)

۱۵- گزینه «۴» -

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k'$$

(گروه مؤلفان علوی) (استدلال) (آسان)

۱۶- گزینه «۴» - اگر یک چهارضلعی قطرهایش برابر باشند، الزاماً آن چهارضلعی مستطیل نیست. مثال نقض (ذوزنقه متساوی الساقین قطرهایش برابر است).



(کتاب همراه علوی) (استدلال) (آسان)

۱۷- گزینه «۳» - الف) نادرست است، b می تواند مساوی a هم باشد.

ب) درست است.

پ) درست است.

(کتاب همراه علوی) (استدلال) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» -

$$\frac{a+b}{2a-b} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2(2a-b) = 3(a+b) \Rightarrow 4a - 2b = 3a + 3b$$

$$\Rightarrow 4a - 3a = 3b + 2b \Rightarrow a = 5b \Rightarrow a = \frac{5}{2}b$$

$$\frac{2a+b}{4a-b} = \frac{2(\frac{5}{2}b)+b}{4(\frac{5}{2}b)-b} = \frac{5b+b}{10b-b} = \frac{6b}{9b} = \frac{2}{3}$$

(کتاب همراه علوی) (نسبت و تناسب) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» -

$$\left. \begin{array}{l} FE \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{3}{3+x} = \frac{AE}{AC} \\ DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{3+x}{9+x} = \frac{AE}{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{3+x} = \frac{3+x}{9+x}$$

$$\Rightarrow (3+x)^2 = 3(9+x) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 3x + 27 \Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \text{ (غ ق)} \\ x = 3 \end{cases}$$

(گروه مؤلفان علوی) (تعمیم قضیه تالس) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» -

$$\text{قضیه تالس} \Rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow x^2 + x = x^2 + 3x - 18 \Rightarrow x = 9$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{x}{2x+6} = \frac{y}{y+4} \Rightarrow \frac{x}{2x+6} = \frac{y}{y+4} \Rightarrow 8y = 2y + 12 \Rightarrow y = 2/4$$

$$\Rightarrow xy = 9 \times 2/4 = 21/6$$

(گروه مؤلفان علوی) (قضیه تالس و تعمیم آن) (متوسط)