ریاضی ۲

۱- گزینه «۲» ـ

$$S=\alpha+\beta=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۳}+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$P=\alpha\cdot\beta=(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۳})(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۳})=\frac{۱-۵}{۹}=\frac{-۴}{۹}$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰ \Rightarrow x^{۲}-\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۹}=۰$$

$$۹x^{۲}-۶x-۴=۰$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (آسان)

۲- گزینه «۴» ـ

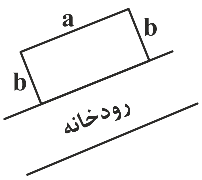
$$x^{۲}=t: ۲t^{۲}-۷t-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{۱}{۲} \\ t=۴ \end{cases}$$

$$x^{۲}=-\frac{۱}{۲}\ \text{غقق}\ ,\ x^{۲}=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$$

$$P=(-۲)(۲)=-۴ \Rightarrow P^{۲}+P=(-۴)^{۲}+(-۴)=۱۲$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ حل معادله به روش تفسیر متغیر) (متوسط)

۳- گزینه «۲» ـ



$$\text{محیط}\ P=a+۲b \Rightarrow a+۲b=۱۰۰ \Rightarrow a=۱۰۰-۲b$$

$$S=a\cdot b \Rightarrow S=(۱۰۰-۲b)\times b \Rightarrow S=-۲b^{۲}+۱۰۰b$$

بنا به نمودار درجه دوم:

$$S_{max}=\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{-(۱۰۰^{۲}-۰)}{۴(-۲)}=\frac{۱۰۰۰۰}{۸}=۱۲۵۰\ m^{۲}$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ـ مقدار ماکزیمم تابع درجه دوم) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ

$a<۰ \rightarrow$ نمودار max دارد.

$\frac{-b}{۲a}>۰ \rightarrow b>۰$

$c>۰ \rightarrow$ محل تلاقی f با محور yها

$\Delta>۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشه حقیقی دارد. $\Leftarrow$ چون صفرهای تابع f دو تا می‌باشد.

$$\underset{(-)}{a}\cdot\underset{(+)}{b}\cdot\underset{(+)}{c}-\underset{(+)}{b}\cdot\underset{(+)}{c}\cdot\underset{(+)}{\Delta}=(-)-(+)=(-)$$

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ـ علامت ضرایب درجه دوم) (متوسط)

۵- گزینه «۲» ـ

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{۱}{۳}\ ,\ P=\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\text{عبارت}=\alpha^{۲}\beta+\alpha\beta^{۲}=\alpha\beta(\alpha+\beta)=P\cdot S=\frac{۱}{۳}\times\frac{-۱}{۳}=\frac{-۱}{۹}$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ـ رابطه بین ضرایب و ریشه‌ها) (آسان)

۶- گزینه «۴» ــ

$$2x^2-4x-1=0 \qquad \{\alpha,\beta\} \qquad \{\alpha+2,\beta+2\}$$

$$S=\alpha+\beta=2\ ,\ P=\alpha\cdot\beta=\frac{-1}{2}$$

معادله جدید $= S_1=x_1+x_2=(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4=2+4=6$

معادله جدید $= P_1=x_1\times x_2=(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=P+2S+4=-\frac{1}{2}+2(2)+4=\frac{15}{2}$

$$x^2-S_1x+P_1=0 \ \Rightarrow\ x^2-6x+\frac{15}{2}=0 \ \Rightarrow\ 2x^2-12x+15=0$$

(میرزایی) (معادله درجه دوم ــ طریقه نوشتن معادله درجه دوم) (متوسط)

۷- گزینه «۱» ــ

رأس سهمی: $A\left|\begin{array}{l} x=\frac{-6}{2(-1)}=3 \\ y=-9+18-5=4 \end{array}\right.$

$$f(x)=0: -x^2+6x-5=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} x=1 & B\left|\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right. \\ x=5 & C\left|\begin{array}{l}5\\0\end{array}\right. \end{cases}$$

$S_{ABC}=\frac{BC\times h}{2}$ $\Rightarrow$ مساحت مثلث ABC $S_{ABC}=\frac{(4)(4)}{2}=8$ ارتفاع مثلث h

(میرزایی) (نمودار درجه دوم ــ صفرهای تابع و رأس سهمی) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ــ

ک.م.م مخرج‌ها $=x(x+5)$

طرفین معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کنید:

$$x(x+4)+(3x+5)=(x+1)(x+5) \ \Rightarrow\ x^2+4x+3x+5=x^2+6x+5$$

$7x+5=6x+5 \ \Rightarrow\ x=0$ غ‌ق‌ق (چون ریشه مخرج است.)

(میرزایی) (معادلات گویا و گنگ ــ حل معادلات گویا) (آسان)

۹- گزینه «۲» ــ

صدق ریشه در معادله: $x=-1: \frac{-2}{-1-3}+\frac{-1+A}{-1+4}=\frac{-1-A}{-1-3}$

$$\frac{1}{2}+\frac{-1+A}{3}=\frac{1+A}{4} \ \Rightarrow\ A=1$$

$$\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3} \ \Rightarrow\ 2x(x+4)+(x+1)(x-3)=(x-1)(x+4)$$

$2x^2+6x-3=3x-4 \ \Rightarrow\ 2x^2+3x+1=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} x=-1 \text{ ق ق} \\ x=-\frac{1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$

(میرزایی) (معادلات گویا و گنگ ــ حل معادلات گویا) (متوسط)

۱۰- گزینه «۴» ــ

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{4}$$

$$t_2=t_1+15: \frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_1+15}=\frac{1}{4} \ \Rightarrow\ 4t_1(t_1+15)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_1+15}=\frac{1}{4}\right)$$

$$4(t_1+15)+4t_1=t_1(t_1+15) \ \Rightarrow\ 4t_1+60+4t_1=t_1^2+15t_1 \ \Rightarrow\ t_1^2+7t_1-60=0$$

$(t_1+12)(t_1-5)=0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} t_1=-12 \text{ غ ق ق} \\ t_1=5 \text{ ق ق} \end{cases}$

(کتاب همراه علوی) (معادلات گویا و گنگ ــ کاربرد معادلات گویا) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» ـ

$$\sqrt{x-۳}+\sqrt{۲x+۳}=-۲$$

سمت چپ معادله همواره مثبت و سمت راست آن همواره منفی است، پس بدون ریشه حقیقی می‌باشد.

(میرزایی) (معادلات گنگ و گویا ـ حل معادله گنگ) (آسان)

۱۲- گزینه «۳» ـ

$$\sqrt{۲x-۵}=\sqrt{x+۱}-۱$$

به توان ۲ برسانید:

$$۲x-۵=x+۱+۱-۲\sqrt{x+۱} \Rightarrow ۲\sqrt{x+۱}=۷-x$$

به توان ۲ برسانید:

$$۴(x+۱)=۴۹-۱۴x+x^۲ \Rightarrow x^۲-۱۸x+۴۵=۰$$

بررسی جواب‌ها:

$$(x-۱۵)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱۵:\sqrt{۱۵+۱}-\sqrt{۳۰-۵}=۱ \Rightarrow -۱\neq ۱ \text{ غ ق ق} \\ x=۳:\sqrt{۳+۱}-\sqrt{۶-۵}=۱ \Rightarrow ۱=۱\checkmark \end{cases}$$

پس $a=۳$ می‌باشد:

$$\frac{۲a+۱}{a}=\frac{۲(۳)+۱}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

(میرزایی) (معادلات گویا و گنگ ـ حل معادلات گنگ) (متوسط)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x-۲$$

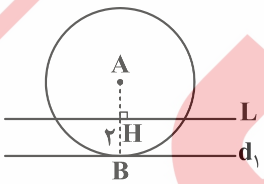
به توان ۲ برسانید:

$$۲x^۲-۵x+۲=x^۲-۴x+۴$$

$$x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \text{ غ ق ق (در معادله اولیه صدق نمی کند.)} \\ x=۲ \text{ ق ق} \end{cases}$$

(میرزایی) (معادلات گویا و گنگ ـ حل معادلات گنگ) (متوسط)

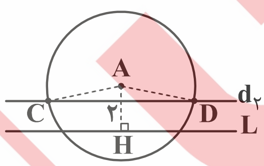
۱۴- گزینه «۴» ـ A مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر است.



$AH=۳$

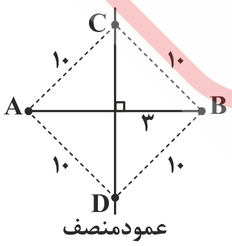
خط $d_۱$ مماس بر دایره و شرایط مسئله را دارا است، پس نقطه B یکی از نقاط می‌باشد.

خط $d_۲$ با خط L، ۲ cm فاصله دارد و شرایط مسئله را دارا است و نقاط C و D دیگر نقاط موردنظر مسئله می‌باشد.



(میرزایی) (هندسه ـ ترسیم‌های هندسی) (متوسط)

۱۵- گزینه «۲» ـ با توجه به تعریف عمودمنصف، ۲ نقطه C و D می‌توان یافت:



(میرزایی) (هندسه ـ ترسیم‌های هندسی) (آسان)

۱۶- گزینه «۳» ـ B روی نیمساز است، پس داریم:

$$BH = BH'$$

$$x^۲ = ۵x + ۶ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ غ ق ق} \\ x = ۶ \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$BH = x^۲ = ۶^۲ = ۳۶ , AH = ۳(۶) = ۱۸$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow AB^۲ = (۳۶)^۲ + (۱۸)^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱۸^۲ \times ۴ + ۱۸^۲ = ۱۸^۲(۴+۱) = ۱۸^۲ \times ۵ \Rightarrow AB = ۱۸\sqrt{۵}$$

(کتاب همراه علوی) (هندسه ـ ترسیم‌های هندسی) (دشوار)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$\frac{a-b}{۲a+b} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳(a-b) = ۲(۲a+b) \Rightarrow ۳a - ۳b = ۴a + ۲b \Rightarrow a = -۵b$$

$$\frac{۳a-b}{a-۲b} = \frac{۳(-۵b)-b}{-۵b-۲b} = \frac{-۱۶b}{-۷b} = \frac{۱۶}{۷}$$

(میرزایی) (هندسه ـ نسبت و تناسب) (متوسط)

۱۸- گزینه «۴» ـ بنا به قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{۸}{۱۲} = \frac{۳b+۳}{۳b+۹} = \frac{۶}{۴a+۱} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۳b+۳}{۳b+۹} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{b+۱}{b+۳} = \frac{۲}{۳} \\ ۳b+۳ = ۲b+۶ \Rightarrow b = ۳ \\ \frac{۶}{۴a+۱} = \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۶}{۴a+۱} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۸a+۲ = ۱۸ \Rightarrow a = ۲ \end{cases} \Rightarrow a+b = ۲+۳ = ۵$$

(میرزایی) (هندسه ـ قضیه تالس) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» ـ بنا به قضیه تالس داریم:

$$\left.\begin{aligned} BE \parallel CF &\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \\ CE \parallel DF &\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{۵}{۳} = \frac{۸}{CD} \Rightarrow CD = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸$$

(میرزایی) (هندسه ـ قضیه تالس) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» ـ **چون اگر یک چهارضلعی قطرهایش برابر باشند، الزاماً آن چهارضلعی مستطیل نیست، مثال نقض: ذوزنقه متساوی‌الساقین که قطرهایش با هم برابر هستند.** (میرزایی) (هندسه ـ استدلال در هندسه) (متوسط)