هندسه ۳

۱- گزینه «۲» ـ چون M روی بیضی است، پس

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰$$

دو طرف برابری را به توان ۲ می‌رسانیم

$$MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF' = ۱۰۰$$

می‌دانیم $MF \times MF' = ۳۲$ ، درنتیجه

$$MF^۲ + MF'^۲ + ۶۴ = ۱۰۰$$

یعنی

$$MF^۲ + MF'^۲ = ۳۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ مفهوم تعریف بیضی)

۲- گزینه «۲» ـ در هر بیضی فاصله دو کانون را با $۲c$ نشان می‌دهیم:

$$۲c = FF' = ۲ \Rightarrow c = ۱$$

از طرف دیگر مجموع فاصله هر نقطه از دو کانون برابر $۲a$ است:

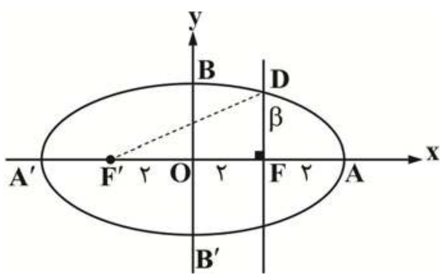
$$MF + MF' = ۲a \Rightarrow \sqrt{۱+۴} + \sqrt{۱+۴} = ۲a \Rightarrow a = \sqrt{۵}$$

اکنون از برابری $a^۲ = b^۲ + c^۲$ به‌دست می‌آید:

$$b = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۵-۱} = ۲$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی)

۳- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. طول نقطه D همان طول نقطه F است:



$$\alpha = ۲^\circ$$

چون $OA = a = ۴$ و $DF + DF' = ۲a$

بنابراین

$$DF' = ۸ - \beta$$

اکنون بنابر قضیه فیثاغورس در مثلث DFF' به‌دست می‌آید.

$$DF'^۲ = DF^۲ + FF'^۲ \Rightarrow (۸-\beta)^۲ = \beta^۲ + ۱۶$$

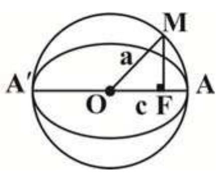
یعنی $\beta = ۳$.

در نهایت به‌دست می‌آید.

$$D \text{ مجموع مختصات } = \alpha + \beta = ۲ + ۳ = ۵$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ اجزای بیضی ـ تعریف بیضی)

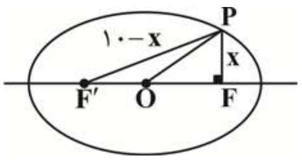
۴- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری روبه‌رو استفاده می‌کنیم. در مثلث OMF بنابر قضیه فیثاغورس



$$MF = \sqrt{OM^۲ - OF^۲} = \sqrt{a^۲ - c^۲} = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ روابط اجزای بیضی)

۵- گزینه «۳» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم.



بنابر فرض:

$$a = ۵ \, , b = ۳ \xrightarrow{c=\sqrt{a^۲-b^۲}} c = ۴$$

نقطه P روی بیضی است، پس $PF + PF' = ۲a$ یعنی با فرض $PF = x$ به دست می‌آید.

$$PF' = ۱۰ - x$$

در مثلث قائم‌الزاویه PFF'، بنا بر قضیه فیثاغورس،

$$(۱۰ - x)^۲ = x^۲ + ۸^۲$$

به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{۹}{۵}$$

اکنون می‌نویسیم:

$$S_{OPF} = \frac{۱}{۲} PF \times OF = \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۵} \times ۴ = \frac{۱۸}{۵} = ۳/۶$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ روابط اجزای بیضی)

۶- گزینه «۳» ـ می‌دانیم نسبت $\frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی است. با فرض $e = \frac{c}{a}$ و به توان ۲ رساندن دو طرف برابری به‌دست می‌آید:

$$e^۲ = \frac{c^۲}{a^۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{a^۲} = ۱ - (\frac{b}{a})^۲$$

یعنی:

$$e = \sqrt{۱ - (\frac{b}{a})^۲}$$

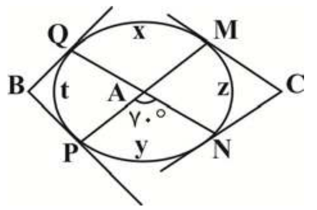
بنا بر فرض مسئله $\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲}$، پس:

$$e = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ بیضی ـ خروج از مرکز)

هندسه ۱ و ۲

۱- گزینه «۳» ــ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. بنا بر روابط زاویه‌ها در دایره می‌نویسیم:



$$\hat{B}=\frac{x+z+y-t}{۲}$$

و

$$\hat{C}=\frac{x+t+y-z}{۲}$$

پس:
$$\hat{B}+\hat{C}=\frac{x+z+y-t+x+t+y-z}{۲}=x+y \quad (۱)$$

از طرف دیگر:
$$\hat{A}=\frac{x+y}{۲} \Rightarrow ۷۰°=\frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y=۱۴۰° \quad (۲)$$

از برابری‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید.:
$$\hat{B}+\hat{C}=۱۴۰°$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ روابط بین زاویه‌ها)

۲- گزینه «۱» ــ مساحت قطاع OAB به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

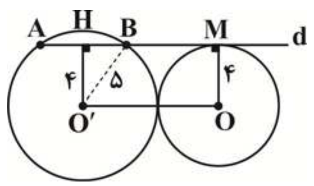
$$\frac{۳۰}{۳۶۰}\times\pi\times ۶^{۲}=۳\pi$$

مساحت مثلث OAB برابر است با:
$$\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times \sin ۳۰°=۹$$

اکنون می‌توان نوشت:
مساحت قطعه = (مساحت قطاع OAB) − (مساحت مثلث OAB) = $۳\pi-۹=۳(\pi-۳)$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ قطعه)

۳- گزینه «۳» ــ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم که در آن از O و O' عمودهایی بر خط d رسم کرده‌ایم.



چون d بر دایره C مماس است پس OM بر دایره C مماس است پس OM بر d عمود است. $O'H$ هم وتر AB را نصف می‌کند.

$OO'HM$ مستطیل است، پس:
$$O'H=OM=۴$$

در مثلث $O'HB$ بنا بر قضیه فیثاغورس:
$$HB=\sqrt{O'B^{۲}-O'H^{۲}}=\sqrt{۵^{۲}-۴^{۲}}=۳$$

در نتیجه:
$$AB=۲HB=۲\times ۳=۶$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل اول ــ وتر ــ مماس ــ وضع و دایره)

۴- گزینه «۲» ـ اگر TT' مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، بنا بر فرمول

$$TT' = \sqrt{oo'^{۲} - (r - r')^{۲}}$$

$$۱۰ = \sqrt{(r + ۶)^{۲} - (r - ۴)^{۲}}$$

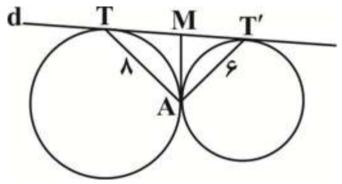
$$۱۰۰ = \underbrace{(r + ۶)^{۲} - (r - ۴)^{۲}}_{\text{مزدوج}}$$

$$۱۰۰ = (r + ۶ + r - ۴)(r + ۶ - r + ۴)$$

$$۱۰۰ = (۲r + ۲)(۱۰)$$

به‌دست می‌آید $r = ۴$. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ مماس مشترک خارجی)

۵- گزینه «۴» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم.



M محل برخورد مماس مشترک داخلی این دو دایره با خط d است.

می‌دانیم اگر از نقطه‌ای خارج دایره مماس‌هایی بر دایره رسم کنیم. طول این مماس‌ها باهم برابرند:

$$\left.\begin{array}{l} MA = MT \\ MA = MT' \end{array}\right\} \Rightarrow MT = MT' = AM$$

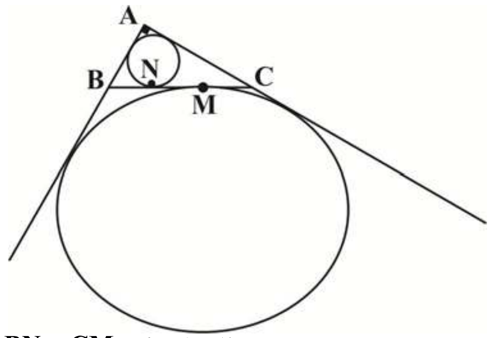
در نتیجه در مثلث ATT' ، AM میانه وارد بر ضلع TT' است و برابر نصف این ضلع است. بنابراین این مثلث قائم‌الزاویه است.

اکنون مساحت مثلث قائم‌الزاویه ATT' را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ATT'} = \frac{۱}{۲} AT \times AT' = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ = ۲۴$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ وضع دو دایره ـ مماس مشترک)

۶- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. می‌دانیم:



$$BN = P - b$$

و

$$CM = P - b$$

که در آن P نصف مقدار محیط مثلث است.

$$P = \frac{a + b + c}{۲} = \frac{۵ + ۴ + ۳}{۲} = ۶$$

می‌نویسیم:

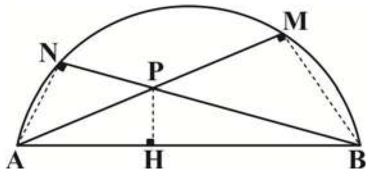
$$BN = CM = ۶ - ۴ = ۲$$

در نهایت:

$$MN = BC - (BN + CM) = ۵ - (۲ + ۲) = ۱$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ دایره محاطی و محیطی مثلث)

۷- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم، که در آن از P عمود PH را بر AB رسم می‌کنیم.



چهارضلعی‌های NPHA و PMBH محاطی هستند چون در هر کدام دو زاویه مقابل مکمل هستند:

$$\hat{N}+\hat{H}=\hat{M}+\hat{H}=۱۸۰^\circ$$

اکنون بنا بر روابط طولی در دایره‌های محیطی این دو چهار ضلعی (NPHA و PMBH) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} AP\times AM=AH\times AB \\ BP\times BN=BH\times BA \end{cases}$$

می‌نویسیم:

$$AP\times AM+BP\times BN=AH\times AB+BH\times AB=AB\times(AH+BH)=AB\times AB=AB^{۲}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ روابط طولی ـ چهارضلعی محاطی)