ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» ـ

$$\frac{\sin ۱۰۴^\circ + \cos ۳۷۴^\circ}{\sin ۱۶۶^\circ + \cos ۱۹۴^\circ} = \frac{\cos ۱۴^\circ + \cos ۱۴^\circ}{\sin ۱۴^\circ - \cos ۱۴^\circ} = \frac{۲\cos ۱۴^\circ}{\sin ۱۴^\circ - \cos ۱۴^\circ} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را بر } \cos ۱۴^\circ} \frac{۲}{\tan ۱۴^\circ - ۱} = -۲/۶ \Rightarrow \tan ۱۴^\circ = \frac{۳}{۱۳}$$

طبق رابطه $۱ + \tan^۲ \alpha = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha}$ داریم:

$$\cos^۲ ۱۴^\circ = \frac{۱۶۹}{۱۷۸} = ۰/۹۴$$

$$\Rightarrow \cos^۲ ۷۰۶^\circ = \cos^۲(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۴^\circ) = \cos^۲ ۱۴^\circ = ۰/۹۴$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

۲- گزینه «۱» ـ روش اول:

$$\cos(\frac{\pi}{۵} - x) = \cos(\frac{\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۱۰} - x) = \sin(\frac{۳\pi}{۱۰} + x) \Rightarrow \sin(۲x - \frac{\pi}{۱۲}) = \sin(\frac{۳\pi}{۱۰} + x) \Rightarrow ۲x - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۳\pi}{۱۰} + x \Rightarrow x = \frac{۲۳}{۶۰}\pi$$

روش دوم: می‌دانیم اگر $\sin x = \cos y$، آن‌گاه $x + y = \frac{\pi}{۲}$، بنابراین:

$$۲x - \frac{\pi}{۱۲} + \frac{\pi}{۵} - x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۲۳\pi}{۶۰}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

۳- گزینه «۴» ـ

$$\cot ۸۵۵^\circ = \cot(۵ \times ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵ = -۱$$

$$\sin ۱۳۵۰^\circ = \sin(۷ \times ۱۸۰^\circ + ۹۰^\circ) = -۱$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

۴- گزینه «۳» ـ

$$x + y + z = ۹۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۲y = ۱۸۰^\circ - ۲z \Rightarrow \sin(۲x + ۲y) = \sin(۱۸۰^\circ - ۲z) = \sin ۲z$$

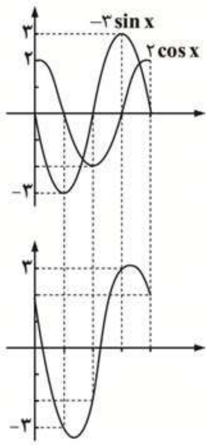
(جعفری) (فصل چهارم ـ درس دوم ـ نسبت‌های مثلثاتی)

۵- گزینه «۱» ـ

$$\cos(۷\pi - x) = -\cos x \,,\, \cos(۱۱\pi + x) = -\cos x \Rightarrow \cos(۷\pi - x) + \cos(۱۱\pi + x) = -۲\cos x$$

در نتیجه نمودار آن به شکل گزینه «۱» خواهد بود. (جعفری) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ توابع مثلثاتی)

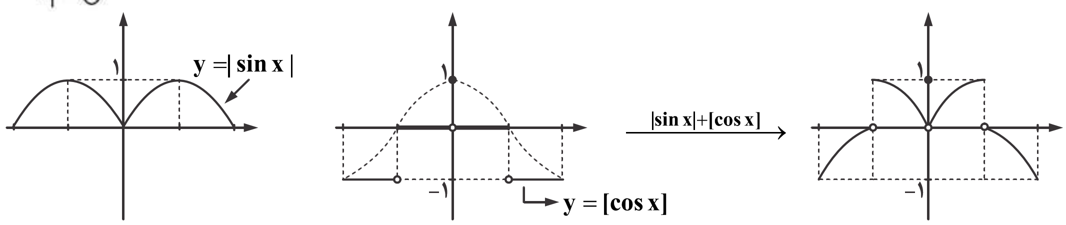
۶- گزینه «۳» ـ



بررسی سایر گزینه‌ها: توجه کنید که اگر $y = \sin x + ۲\cos x$ یا $y = ۲\sin x + ۲\cos x$، آن‌گاه $-۳ < y < ۳$ یعنی مقدار y به ۳ یا ۳- نمی‌رسد، بنابراین گزینه‌های «۱» و «۴» رد می‌شوند. هم‌چنین اگر $y = \cos x + ۲\cos x = ۳\cos x$، به‌ازای $x = ۰$ داریم $y = ۳$ درصورتی که در نمودار داده شده در سوال مقدار y در $x = ۰$، کمتر از ۳ است، پس گزینه «۲» نیز رد می‌شود.

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ توابع مثلثاتی)

۷- گزینه «۴» ـ



توجه شود که:

$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \sin x \geq ۰ \\ -\sin x & \sin x < ۰ \end{cases}$$

(جعفری) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ توابع مثلثاتی)

۸- گزینه «۳» ـ برای به‌دست آوردن ماکزیمم $y = ۱ - ۲\sin(x - \frac{\pi}{۲})$، باید مقدار $\sin(x - \frac{\pi}{۲})$ کمترین باشد:

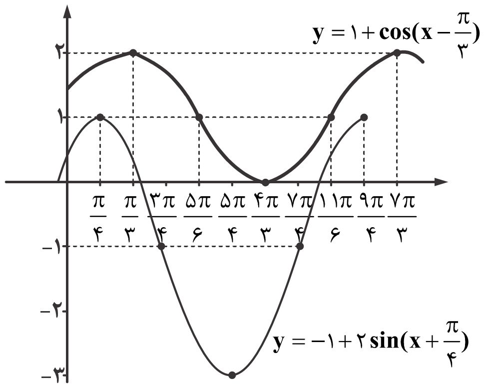
$$\sin(x-\frac{\pi}{۲}) = -۱ \xrightarrow{x\in[-\frac{۳\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}]} \begin{cases} x-\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x=۲\pi \text{ غ ق ق} \\ x-\frac{\pi}{۲}=-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=۰ \text{ ق ق} \end{cases} \Rightarrow y_{max}=۱+۲=۳ \Rightarrow (۰\,,۳) \text{ نقطه ماکزیمم}$$

هم‌چنین برای این‌که $y = \cos x - |\sin x|$ ماکزیمم شود، باشد $|\sin x|$، کمترین شود. بنابراین:

$$\sin x = ۰ \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=۱ \Rightarrow (۰\,,۱) \text{ نقطه ماکزیمم} \\ x=\pi \Rightarrow y=-۱ \text{ غ ق ق} \\ x=-\pi \Rightarrow y=-۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

معادله خط گذرنده از نقاط $(۰\,,۱)$ و $(۰\,,۳)$، برابر است با: $x=۰$. (جعفری) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ توابع مثلثاتی)

۹- گزینه «۲» ـ همان‌طور که در شکل مشخص شده است، دو نمودار در هیچ نقطه‌ای یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند.



(جعفری) (فصل چهارم ـ درس سوم ـ توابع مثلثاتی)

۱۰- گزینه «۴» ـ ابتدا دامنه را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} ۲^x - ۳^x \geq ۰ \Rightarrow ۲^x \geq ۳^x \Rightarrow x \leq ۰ \\ ۳^{\frac{x}{۲}} > ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار} \end{cases} \Rightarrow x \leq ۰$$

$$\sqrt{۲^x - ۳^x} = ۳^{\frac{x}{۲}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲^x - ۳^x = ۳^x \Rightarrow ۲^x = ۲\times ۳^x \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^x = ۲ \Rightarrow x = \log_{\frac{۲}{۳}} ۲$$

با توجه به اینکه $\log_{\frac{۲}{۳}} ۲ < ۰$ جواب به‌دست آمده $x = \log_{\frac{۲}{۳}} ۲$ در دامنه تابع صدق می‌کند. (جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول و دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۱- گزینه «۲» ـ اگر داشته باشیم $y = \log_{g(x)} f(x)$ دامنه آن برابر است با:

$$D_y = \begin{cases} f(x) > ۰ \\ g(x) > ۰ \\ g(x) \neq ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_y = \begin{cases} -x^۲ + ۳x + ۲۸ > ۰ \Rightarrow x \in (-۴\,,۷) & (۱) \\ x^۲ - ۱ > ۰ \Rightarrow x \in (-\infty\,,-۱) \cup (۱\,,+\infty) & (۲) \\ x^۲ - ۱ \neq ۱ \Rightarrow x^۲ \neq ۲ \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{۲} & (۳) \end{cases} \xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} x \in (-۴\,,-\sqrt{۲}) \cup (-\sqrt{۲}\,,-۱) \cup (۱\,,\sqrt{۲}) \cup (\sqrt{۲}\,,۷)$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع لگاریتمی)

۱۲- گزینه «۳» ـ

$$\log(۲-\sqrt{۳}) = -\log(۲-\sqrt{۳})^{-۱} = -\log\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}} = -\log(۲+\sqrt{۳})$$

$$\log(۷+۴\sqrt{۳}) = \log(۴+۳+۴\sqrt{۳}) = \log(۲+\sqrt{۳})^۲ = ۲\log(۲+\sqrt{۳})$$

$$\log(۲۶+۱۵\sqrt{۳}) = \log(۲+\sqrt{۳})^۳ = ۳\log(۲+\sqrt{۳}) \Rightarrow -\log(۲+\sqrt{۳}) + ۲\log(۲+\sqrt{۳}) = ۳\log(۲+\sqrt{۳}) + \log x$$

$$-۲\log(۲+\sqrt{۳}) = \log x \Rightarrow (۲+\sqrt{۳})^{-۲} = x \Rightarrow x = \frac{۱}{(۲+\sqrt{۳})^۲} = \frac{۱}{۷+۴\sqrt{۳}} = ۷-۴\sqrt{۳}$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ معادلات لگاریتمی)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$\sqrt[2x]{\log_{(x-4)}(x^2-8x+16)}=\sqrt[2x]{\log_{(x-4)}(x-4)^2}=\sqrt[2x]{2}\Rightarrow \sqrt[2x]{2}=5 \xrightarrow{\text{به توان } x} \sqrt{2}=5^x \Rightarrow x=\log_5\sqrt{2}$$

با توجه به این‌که:

$$1<\sqrt{2}<5 \Rightarrow \log_5 1<\log_5\sqrt{2}<\log_5 5 \Rightarrow 0<\log_5\sqrt{2}<1 \Rightarrow 0<x<1$$

بنابراین $x=\log_5\sqrt{2}$ قابل قبول نیست. زیرا به‌ازای $0<x<1$، مبنای لگاریتم داده شده در معادله منفی خواهد شد.

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول و دوم ـ توابع لگاریتمی)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$(\sqrt{2})^{x^2-1}\times 4^x-\frac{1}{4\sqrt{2}}=0 \Rightarrow 2^{\frac{x^2-1}{2}}\times 2^{2x}=2^{\frac{-5}{2}} \Rightarrow \frac{x^2-1+4x}{2}=\frac{-5}{2} \Rightarrow x^2+4x+4=0 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$-5^{-y}+5^{y+1}-x=0 \Rightarrow \frac{-1}{5^y}+5\times 5^y+2=0 \xrightarrow{\times 5^y} 5\times 5^{2y}+2\times 5^y-1=0 \xrightarrow{5^y=t} 5t^2+2t-1=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \begin{cases} 5^y=\dfrac{-1-\sqrt{6}}{5} \ \text{غ ق ق} \\ 5^y=\dfrac{-1+\sqrt{6}}{5} \xrightarrow{\times 5} 5^{y+1}=-1+\sqrt{6} \Rightarrow y=(\log_5(-1+\sqrt{6}))-1 \end{cases} \Rightarrow y-\frac{x}{2}=\log_5(-1+\sqrt{6})$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول و دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۵- گزینه «۱» ـ با توجه به این‌که $25=(0/2)^{-2}$، داریم:

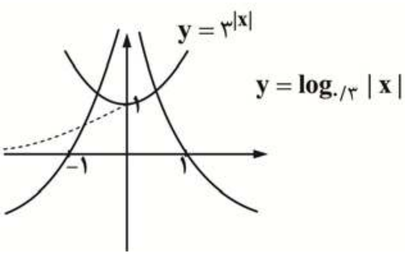
$$(0/2)^{x^2-6x+10}<(0/2)^{x-2} \Rightarrow x^2-6x+10>x-2 \Rightarrow x^2-7x+12>0 \Rightarrow x\in(-\infty,3)\cup(4,+\infty) \quad (1)$$

$$\log_{/3}x^2<\log_{/3}x \Rightarrow x^2>x \Rightarrow x^2-x>0 \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \xrightarrow{\text{دامنه لگاریتم } x>0 \text{ است.}} x\in(1,+\infty) \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} (1,3)\cup(4,+\infty)$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول و دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۶- گزینه «۲» ـ همان‌طوری که در شکل می‌بینیم تعداد نقاط برخورد ۲تاست.



(جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول و دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۷- گزینه «۳» ـ

$$y=\log_{\frac{1}{2}}x \Rightarrow \frac{1}{2}^y=x \Rightarrow y^{-1}=(\frac{1}{2})^x \Rightarrow f(x)=\log(\frac{1}{3}-2(\frac{1}{2})^x)$$

$$3^{-1}-2(\frac{1}{2})^x>0 \Rightarrow 2^{-x+1}<3^{-1} \Rightarrow -x+1<\log_2 3^{-1} \Rightarrow x>1+\log_2 3$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول و دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۸- گزینه «۲» ـ

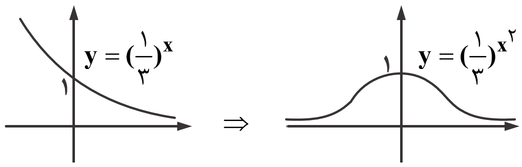
$$f(1)=1 \Rightarrow \log_2 a-b=1 \Rightarrow a-b=2 \Rightarrow a=2+b$$

$$\xrightarrow{f(-1)=g(-1)} \log_2 -a-b=\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2^{\frac{-1}{2}}=-a-b \xrightarrow{a=2+b} 2^{-\frac{1}{2}}=-2-2b$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{1}{2}}=2(-1-b) \Rightarrow 2^{-\frac{3}{2}}=-1-b \Rightarrow b=-1-\frac{1}{\sqrt{8}}$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع لگاریتمی)

۱۹- گزینه «۴» ـ



توجه کنید اگر نمودار $y = (\frac{1}{3})^{|x|}$ را می‌خواست، پاسخ گزینه «۳» بود. (جعفری) (فصل پنجم ـ درس اول ـ توابع نمایی)

۲۰- گزینه «۳» ـ از دو طرف معادله $\log_2$ می‌گیریم.

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 x^2 \Rightarrow (\log_2 x)(\log_2 x) = 2\log_2 x \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4 \\ \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع لگاریتمی)