هندسه

۱- گزینه «۳» ـ رأس سهمی نزدیک‌ترین نقطه سهمی به کانون سهمی است. پس در این سوال رأس سهمی را می‌خواهیم.

$$x^{۲}-۶x+۹=-۶y+۹ \Rightarrow (x-۳)^{۲}=-۶(y-\frac{۳}{۲}) \Rightarrow S=\left|\begin{array}{l}۳\\ \frac{۳}{۲}\end{array}\right.$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ مفهوم سهمی)

۲- گزینه «۳» ـ ابتدا معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$x^{۲}-۲x+۱=-۴y-۹+۱ \Rightarrow (x-۱)^{۲}=-۴(y+۲)$$

یعنی $S\left|\begin{array}{l}h=۱\\ k=-۲\end{array}\right.$ و $a=۱$ در نتیجه:

معادله خط هادی: $y=k+a=-۲+۱=-۱$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ مفهوم سهمی)

۳- گزینه «۴» ـ چون سهمی قائم است و از نقطه $M(۱۲\,,۹)$ می‌گذرد پس معادله سهمی به صورت $x^{۲}=۴ay$ است. نقطه M در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$۱۲^{۲}=۴a\times ۹ \Rightarrow a=۴$$

پس فاصله کانون از خط هادی برابر $۲a=۸$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ مفاهیم اولیه سهمی)

۴- گزینه «۴» ـ ابتدا معادله سهمی را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$y^{۲}+py+\frac{p^{۲}}{۴}=-qx+\frac{p^{۲}}{۴} \Rightarrow (y+\frac{p}{۲})^{۲}=-q(x-\frac{p^{۲}}{۴q}) \Rightarrow S=\left|\begin{array}{l}\frac{p^{۲}}{۴q}=۱=h\\ -\frac{p}{۲}=-۱=k\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}p=۲\\ q=۱\end{cases}$$

اکنون معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$(y+۱)^{۲}=-(x-۱)$$

درنتیجه:

$$F=\left|\begin{array}{l}h-a=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\\ k=-۱\end{array}\right.$$

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ کانون سهمی)

۵- گزینه «۳» ـ محل برخورد سهمی با محور xها را $A(x\,,\circ)$ می‌نامیم. چون A روی سهمی است پس فاصله آن از کانون F و خط هادی $y=x$ برابر است. یعنی:

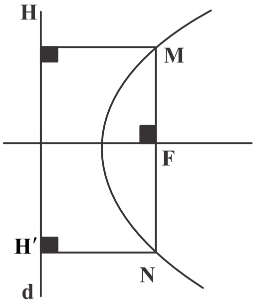
$$\sqrt{(x-۱)^{۲}+۱}=\frac{|x|}{\sqrt{۲}} \Rightarrow (x-۱)^{۲}+۱=\frac{x^{۲}}{۲} \Rightarrow x^{۲}-۴x+۴=\circ \Rightarrow x=۲$$

یعنی این سهمی محور xها را در نقطه $A(۲\,,\circ)$ قطع می‌کند. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ تعریف سهمی)

۶- گزینه «۴» ـ ابتدا معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = -my + 3 \Rightarrow (x-1)^2 = -m(y - \frac{4}{m})$$

از طرف دیگر طول $MN = 4a$ (شکل را ببینید.)

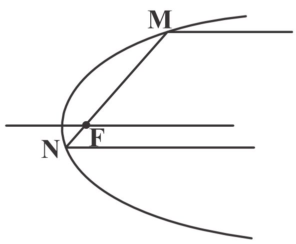


اکنون بنابر علامت m می‌توان نوشت:

$$|m| = 8 \Rightarrow m = \pm 8$$

در بین گزینه‌ها فقط ۸- درست است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ وتر کانونی)

۷- گزینه «۲» ـ ابتدا معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم و کانون آن را به دست می‌آوریم:



معادله استاندارد: $(y+1)^2 = 6(x - \frac{1}{2})$

در نتیجه مختصات کانون برابر $F = \left| \begin{array}{l} a+h = 2 \\ k = -1 \end{array} \right.$

پس معادله شعاع نور برابر است با:

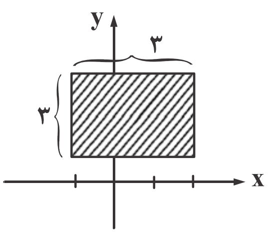
$$y + 1 = 1(x-2) \Rightarrow y = x - 3$$

اکنون این خط و سهمی را قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y^2 + 2y - 6x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 4y - 14 = 0 \Rightarrow y = 2 \pm 3\sqrt{2}$$

بنابراین معادله خطوط بازتاب برابر $y = 2 + 3\sqrt{2}$ و $y = 2 - 3\sqrt{2}$ است. (هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ ویژگی بازتابندگی سهمی)

۸- گزینه «۳» ـ ناحیه مورد نظر به صورت روبه‌رو است. مساحت این ناحیه برابر است با:



$$S = 3 \times 3 = 9$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ معادله و مختصات)

۹- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$A = (4, -2, 6)$ $\begin{cases} A' = (4, 2, -6) : \text{قرینه } A \text{ نسبت به محور } x \text{ ها} \\ A'' = (0, -2, 6) : \text{تصویر } A \text{ روی صفحه } yoz \end{cases}$

چون M وسط $A'A''$ است پس:

$$M = \frac{A' + A''}{2} = (2, 0, 0)$$

در نهایت به دست می‌آید:

فاصله M از محور yها: $\sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ مختصات نقطه در فضا)

۱۰- گزینه «۳» ـ فاصله نقطه A از صفحات مختصات برابر $|a|$ ، $|b|$ و $|c|$ است. چون نقطه A در ناحیه اول قرار دارد پس مختصات مؤلفه‌های آن مثبت است. در نتیجه بنابر فرض سوال می‌توان نوشت:

$$a + b + c = 9, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$$

دو طرف برابری $a + b + c = 9$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 81 \xrightarrow{a^2+b^2+c^2=49} 49 + 2(ab + ac + bc) = 81 \Rightarrow ab + ac + bc = 16$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ مختصات نقطه در فضا)

۱۱- گزینه «۱» ـ بنابر قضیه سینوس‌ها:

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{\sin B}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین $\hat{B}=۶۰^\circ$ یا $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ در نتیجه $\hat{C}=۹۰^\circ$ یا $\hat{C}=۳۰^\circ$.

اکنون طول ضلع AB را در هر دو حالت به دست می‌آوریم:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB=\frac{BC\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{۲\sin C}{\frac{۱}{۲}}=۴\sin C \Rightarrow \begin{cases}\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow AB=۴\\ \hat{C}=۳۰^\circ \Rightarrow AB=۲\end{cases}$$

پس اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای AB برابر $۴-۲=۲$ است. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ قضیه سینوس‌ها)

۱۲- گزینه «۴» ـ بنابر قضیه کسینوس‌ها:

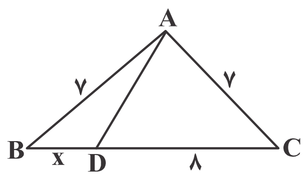
$$a^۲=b^۲+c^۲-۲b\cdot c\cdot\cos A \Rightarrow ۱۶=۱۶+۲۰\sqrt{۳}-۲b\cdot c\cdot\frac{۱}{۲} \Rightarrow bc=۲۰\sqrt{۳}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}b\cdot c\cdot\sin A=\frac{۱}{۲}\times۲۰\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۵$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ قضیه کسینوس‌ها)

۱۳- گزینه «۱» ـ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. بنابر قضیه استوارت می‌توان نوشت:



$$b^۲\times BD+c^۲\times CD=a(AD^۲+BD\times DC)$$
$$\Rightarrow ۴۹\times x+۴۹\times ۸=(x+۸)(۲۵+۸x)$$
$$\Rightarrow x^۲+۵x-۲۴=۰$$

معادله دو ریشه دارد: $x=-۸$ و $x=۳$. چون x باید مثبت باشد پس $x=۳$. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ قضیه استورات)

۱۴- گزینه «۲» ـ در هر مثلث زاویه مقابل به بزرگ‌ترین ضلع بزرگ‌ترین زاویه مثلث است. بنابراین اگر در مثلث ABC ، $AB=۲۴$ ، $AC=۴۰$ و $BC=۵۶$ آن‌گاه زاویه A مقابل به بزرگ‌ترین ضلع این مثلث است. اکنون بنابر قضیه نیمسازها می‌توان نوشت:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{۳}{۵} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{۵۶}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow BD=۲۱$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ قضیه نیمسازها)

۱۵- گزینه «۱» ـ با داشتن طول سه ضلع می‌توان برای محاسبه مساحت مثلث از قضیه هرون استفاده کرد:

$$P=\frac{۱۵+۱۶+۱۷}{۲}=۲۴$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۲۴\times۹\times۸\times۷}=۲۴\sqrt{۲۱}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ دستور هرون)