

۱- گزینه «۲» - می دانیم: $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$(\tan 1) \cdot (\tan 7) \sin 7 = \left(\frac{\sin 1}{\cos 1} + \frac{\sin 7}{\cos 7}\right) \sin 7 = \frac{(\sin 1) \cdot \cos 7 + \sin 7 \cdot \cos 1}{\cos 1 \cdot \cos 7} \times \sin 7 = \left(\frac{\sin 8}{\cos 1 \cdot \cos 7}\right) \times \sin 7$$

$$\xrightarrow{\sin 8 = \cos 1} = \tan 7$$

(ولیعهدی) (فصل چهارم - روابط مثلثاتی مجموع زوایا و نسبت های مثلثاتی)

۲- گزینه «۳» -

شیب خط $= \tan \frac{3\pi}{4} = -1$

معادله خط: $y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 3$

$0 = -x + 3 \Rightarrow x = 3$

به ازای تلاقی با محور x ها، $y = 0$ می شود بنابراین:

(ولیعهدی) (فصل چهارم - نسبت های مثلثاتی بعضی زوایا)

۳- گزینه «۱» - می دانیم: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$8 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = 8 \sin a \sin b (\cos a)(\cos b) = 2(2 \sin a (\cos a))(2 \sin b (\cos b)) = 2 \sin 2a \sin 2b$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + b\right) \sin 2b = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2b\right) \sin 2b = 2(\cos 2b) \sin 2b = \sin 4b$$

(ولیعهدی) (فصل چهارم - نسبت های مثلثاتی و روابط مثلثاتی مجموع زوایا)

۴- گزینه «۲» - برد تابع $[-2, 2]$ است بنابراین $a = 2$.

$T = 2 \Rightarrow \left|\frac{2\pi}{b\pi}\right| = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow ab = (2)(1) = 2$

(سراسری ریاضی - ۹۲) (فصل چهارم - توابع مثلثاتی)

۵- گزینه «۴» - به ازای $\cos x = -1$ عبارت مورد نظر ماکزیمم است. بنابراین داریم:

$(-3)(-1) + (-1)^2 = 4$

(ولیعهدی) (فصل چهارم - توابع مثلثاتی)

۶- گزینه «۱» -

$$(\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = 1 + \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = 1 + \sin 2x - \sin 2x = 1$$

(ولیعهدی) (فصل چهارم - توابع مثلثاتی و روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

$\cos x - \sin x < 0$

۷- گزینه «۲» - در بازه $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ ، $\sin x$ از $\cos x$ بزرگ تر است بنابراین:

حال رابطه را به توان ۲ می رسانیم بنابراین داریم:

$$(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 1 - \sin 2x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{منفی است}} \cos x - \sin x = -\frac{1}{2}$$

(ولیعهدی) (فصل چهارم - روابط مثلثاتی مجموع زوایا)

۸- گزینه «۲» -

$$\tan x + \cot x = 2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2 \Rightarrow \sin 2x = 1$$

(ولیعهدی) (فصل چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

۹- گزینه «۲» -

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)(\tan \alpha)} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{2}{\frac{5}{9}} = \frac{2}{5}$$

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸) (فصل چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا)

۱۰- گزینه «۱» - چون $\{3\}$ از آن حذف شده تنها در شرایطی این همسایگی متقارن است که مرکز نقطه ۳ باشد بنابراین داریم:

$$\frac{(3a-7)+(a+5)}{2} = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (-1, +7) - \{3\} \xrightarrow{\text{شعاع}} \frac{+7-(-1)}{2} = 4$$

(سراسری ریاضی - ۸۹) (فصل پنجم - مفهوم حد و فرایندهای حدی (همسایگی))

۱۱- گزینه «۱» - وقتی $x \rightarrow 0$ داریم: $2 - x^2 \rightarrow 2$ ، ولی چون همواره $0 < -x^2$ ، می توان گفت $2 - x^2 < 2$ بنابراین اگر قرار دهیم $t = 2 - x^2$ حاصل $\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t)$

را می خواهیم:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{[2^-] \sqrt{4^-}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1 \times 2}{1} = 2$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - مفهوم حد و محاسبه حد)

۱۲- گزینه «۲» - در این گزینه شکستگی تابع در نقطه $x = 1$ اتفاق افتاده است و در نقطه $x = 2$ دارای حد است.

(ولیعهدی) (فصل پنجم - مفهوم حد و فرایندهای حدی)

۱۳- گزینه «۳» -

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1/7^+} [x] &= 1 \Rightarrow a + b = 2 \end{aligned}$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست))

۱۴- گزینه «۳» - باید $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ شود بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x - a) \Rightarrow 1 = 4 - a \Rightarrow a = 3$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - مفهوم حد و فرایندهای حدی)

۱۵- گزینه «۲» -

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3)[x] = (0)(3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3)[x] = (0)(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{این تابع در } x = 3 \text{ حد دارد}$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - مفهوم حد و فرایندهای حدی)

۱۶- گزینه «۳» -

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 + 3 = 5$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست))

۱۷- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + a) = 7 \Rightarrow 3 + a = 7 \Rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + b) = 3 \Rightarrow 1 + b = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 6$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست))

۱۸- گزینه «۴» -

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[0^+] - 2}{[3^-] - 0} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[3^+] - 0}{[0^-] - 2} = \frac{3}{1-2} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -3 - (-1) = -2$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - مفهوم حد و محاسبه حد)

۱۹- گزینه «۲» - ابتدا ضابطه $f(x)$ را مطابق شکل به دست می آوریم.

$$\text{شیب} = \frac{-1}{1} = -1 \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - 1 = -(x - 0) \Rightarrow y = -x + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 1) = -1$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - قضایای حد)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left(a \sin \frac{x}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} r \cos x \Rightarrow a \sin \frac{\pi}{2} + 1 = r(-1) \Rightarrow a + 1 = -r \Rightarrow a = -r - 1$$

(ولیعهدی) (فصل پنجم - فضای حد)