

فصل پنجم

تابع

درس اول: مفهوم تابع و پارتمایی های آن

درس دوم: دامنه و برد توابع

درس سوم: انواع تابع

تابع

زوج مرتب: اگر دو متغیر به یکدیگر وابسته باشند و یا در یک رابطه‌ی تعریف شده جفت یکدیگر شوند ✓

زوج مرتب تشکیل می‌دهند.



برای مثال: الف) زوج مرتب پرتاب دو تاس: (عدد تاس دوم و عدد تاس اول)

(۲, ۴)

ب) زوج مرتب ضلع و مساحت مربع: (مساحتی، ضلع)

تذکر: ترتیب مؤلفه‌ها در زوج مرتب‌ها اهمیت دارد یعنی با جابه‌جایی مؤلفه اول و دوم زوج مرتبی ✓

جدیدی پدید می‌آید. مثلاً در پرتاب دو تاس زوج مرتب‌های (۲ و ۵) و (۵ و ۲) یکسان نیست.

تساوی زوج مرتب‌ها: همانطور که از تعریف زوج مرتب‌ها مشخص است در صورتیکه مؤلفه‌های اول و ✓

مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب یکسان باشند، دو زوج مرتب مساوی داریم.

مثال: زوج مرتب‌های مساوی را مشخص کنید.

الف) (۳, ۷), (۷, ۳) ✗

ب) $(25, \sqrt{4}), (5^2, \frac{\sqrt{27}}{3})$ ✓

پ) $(\sqrt{21}, -5), (11, (-5^{-2})^{-1})$ ✓

مثال: اگر زوج مرتب‌ها در هر مورد برابر باشند، مقادیر مجهول را مشخص کنید. ✓

الف) $(a^2 - a, a) = (0, b^2)$

$$\begin{cases} a^2 - a = 0 \rightarrow a(a-1) = 0 \rightarrow a = 0 \text{ or } a = 1 \\ b^2 = a \end{cases}$$

ب) $(a - b, 3a - 4) = (a^2, -b)$

$$\begin{cases} a - b = a^2 \\ 3a - 4 = -b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -b = 3a - 4 \\ -b = a^2 - a \end{cases} \rightarrow a + 3a - 4 = a^2 \rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \rightarrow (a-2)^2 = 0 \rightarrow a = 2$$

$b = -2$

پ) $(m^2 - 4m, n^2 + 3n) = (0, m)$ ✗

ت) $(m - n, 3m - 4) = (m^2, -n)$ ✗

ث) $(4^{2x+y}, 5^{y+1}) = (8^{y-1}, 1)$

$$4^{2x+y} = 8^{y-1} \rightarrow (2^2)^{2x+y} = (2^3)^{y-1} \rightarrow 2^{4x+2y} = 2^{3y-3} \rightarrow 4x+2y = 3y-3$$

$$5^{y+1} = 1 \rightarrow 5^{y+1} = 5^0 \rightarrow y+1 = 0 \rightarrow y = -1$$

$x = -1$

✓ رابطه: هر رابطه از مجموعه A به B متشکل از زوج مرتب‌هایی است که مؤلفه اول خود را از مجموعه A و مؤلفه دوم خود را از مجموعه B گرفته باشند.

توضیح	نمایش رابطه با نمودار ون	نمایش رابطه بصورت زوج مرتب	نمایش رابطه با مختصات دستگاه
۱		$f = \{(2, 4), (3, 9), (5, -1), (1, 7)\}$	
۲		$g = \{(3, -2), (4, 6), (-5, 7)\}$	
۳		$h = \{(1, 7), (-2, -9), (3, 4), (0, 2)\}$	

رابطه تابع نیست

رابطه تابع هست

رابطه تابع هست (تدبیر)

ماتریس - فزونی
ضابطه‌ی یک رابطه: گاهی می‌توان برای ارتباط مؤلفه‌ی اول و مؤلفه دوم یک رابطه، ضابطه‌ای جبری نوشت: برای مثال رابطه‌ای که به هر ضلع مربع مساحت آن را نسبت می‌دهد را می‌توان با $S = a^2$ نمایش داد. بعداً بطور کامل بحث می‌کنیم.

$$y = x^2$$

تابع: هر تابع، رابطه‌ای است از مجموعه A به مجموعه B که در آن به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود.

۱- به هر عضو از A ... صفاً ... عضوی از B نسبت داده می‌شود. (در تابع x مجرد نداریم)

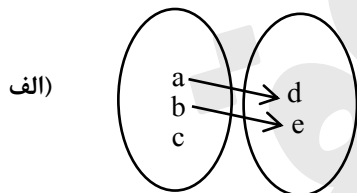
۲- به هیچ عضوی از A نمی‌تواند دو عضو ... نسبت از B داده شود.

۳- ... می‌تواند ... عضوی از B وجود داشته باشد که به هیچ عضوی از A نسبت داده نشده است. (در تابع لا مجرد می‌توان داشت)

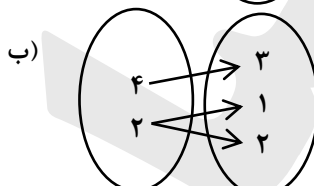
۴- می‌تواند ... دو یا چند عضو A یک عضو از B نسبت داده شود.

توضیح	نمایش تابع با نمودار ون	نمایش تابع با زوج مرتب	نمایش تابع با مختصات دستگاه
۱		$f = \{(a, d), (b, d), (c, e)\}$	
۲		$g = \{(3, 4), (2, 2), (-1, 7)\}$	
۳		$h = \{(2, 1), (-3, 2), (4, 3)\}$	

دقت شود که نمایش های زیر تابع نیستند:



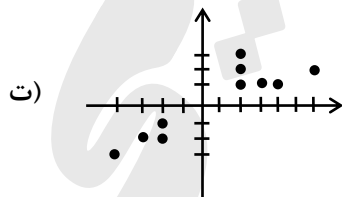
توضیح: $\alpha = c$ مجرد است



توضیح: $\alpha = 2$ به دو سمت متصل شده

پ) $\{(1, 5), (2, 7), (1, 4)\}$

توضیح: $\alpha = 1$ به $y = 5$ و $y = 4$ متصل شده



توضیح: بدین نقاط هم طول تابع نیست
نقاط از هم

ث) $y^2 = |x|$



توضیح: به ازای $\alpha = 1$
دو مقدار ± 1 برابر ل
به دست آمد

مثال: تابع بودن یا نبودن روابط زیر را مشخص کنید. (در تابع به هر x تصدیق و نسبت داده شود)

(الف) رابطه‌ای که به هر انسان، نام مادر او را نسبت می‌دهد. ✓

(ب) رابطه‌ای که به هر مادر، نام نوزندان او را نسبت می‌دهد. ✗

(ج) رابطه‌ای که به هر کشور، همسایگان او را نسبت می‌دهد. ✗

(د) رابطه‌ای که به هر عدد نامنفی، ریشه چهارم آن را نسبت می‌دهد. ✗

(ه) رابطه‌ای که به هر روز هفتا، تاریخ آن را روز را نسبت می‌دهد. ✓

(و) رابطه‌ای که به هر فرد، اثر انگشت او را نسبت می‌دهد. ✓

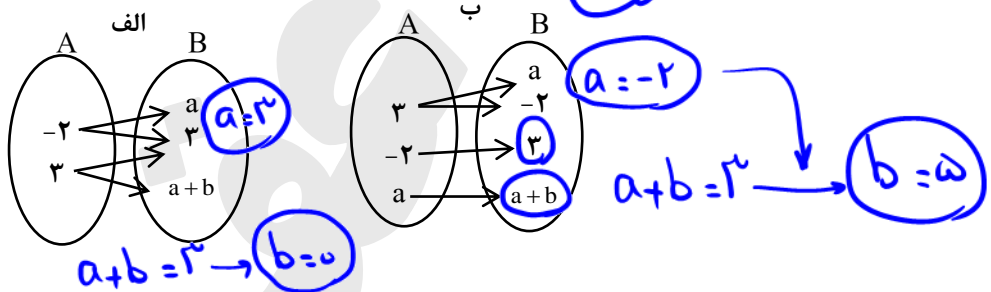
(ز) رابطه‌ای که به هر کشور، نام اهالی آن را نسبت می‌دهد. ✗

(ح) رابطه‌ای که به هر عدد، مربع آن را نسبت می‌دهد. ✓

(ط) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی، شماره‌های آن را نسبت می‌دهد. ✗

سؤال: برای تشکیل تابع اعضای مجموعه A باید بیشتر باشد یا تعداد اعضای مجموعه B?

مثال: نمودار مقابل مربوط به یک تابع است مقدار a و b کدام است؟



جمع‌بندی: برای تشخیص اینکه یک رابطه تابع است یا نه کافیست در هر حالت موارد زیر کنترل شود:

۱- نمایش ون :

۲- نمایش زوج مرتب :

۳- نمایش مختصاتی :

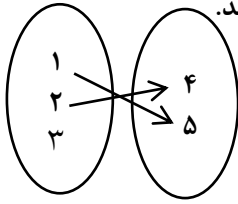
۴- نمایش ضابطه :

.....

.....

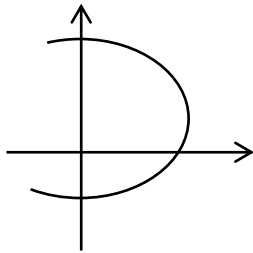
مثال: تابع بودن یا نبودن هر مورد را مشخص و علت تابع نبودن را بنویسید.

الف)

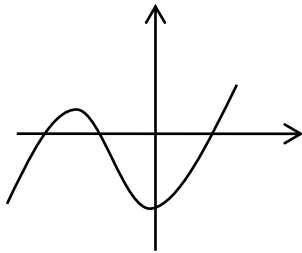


ب) $f = \left\{ (2, 5), (3, 7), (2, 3^2 - 2^2), (3, \frac{28}{4}) \right\}$

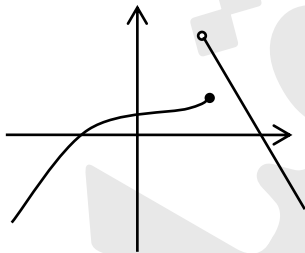
پ)



ت)



ث)



ج) $|y| = |x| + 1$

چ) $|x - 1| + |y + 1| = 0$

خ) $y^x + (x - 3)^x = 0$

د) $y = x^2 - x + 1$

ذ) $y = 3x - 2$

مثال: روابطی هندسی یا ریاضی بیان کنید که یک متغیر در آنها تابعی از دیگری باشد.

مثال: مقادیر مجهول را طوری مشخص کنید که هر یک از موارد زیر تابع باشد.

الف) $f = \{(3, 4), (m, 1), (3, m+2), (5, m)\}$

ب) $f = \{(2, m+1), (2, a+2m), (1, 4), (1, a^2)\}$

پ) $g = \{(2, a-3), (3, a-b^2), (2, 5), (3, -1), (b, 7)\}$

ت) $R = \{(a+3, 2), (4, 3), (2, b), (4, a^2+2)\}$

ث) $h = \{(2, \sqrt{25}), (3, b-a), (2, a^2+4), (3, ab)\}$

مثال: مقدار a را طوری تعیین کنید که f تابع نباشد.

$$f = \left\{ (a, a+1), \left(a^2 + b^2 + \frac{1}{4}, 1 \right), (a, 1) \right\}$$

مثال: اگر تابع $f = \{(1, 3), (a-b, a+b), (2a-3b, b^2+2)\}$ دو زوج مرتب داشته باشد مقادیر a و b را

بیابید.

مثال: اگر رابطه $R = \{(3, z+x), (y-x, 1), (3, x+3y)\}$ تک عضوی باشد.

الف) بدون محاسبه x و y و z این عضو را مشخص کنید.

ب) مقادیر مجهول را مشخص کنید.

