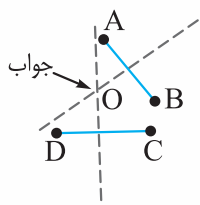


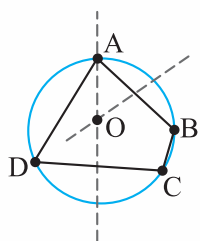
متوسط

-۴

(آ) نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد روی عمودمنصف AB و نقطه‌ای که از دو نقطه C و D به یک فاصله باشد روی عمودمنصف CD قرار دارد و جواب محل برخورد عمودمنصف‌های این دو پاره‌خط است که به صورت زیر است:



(ب)



O روی عمودمنصف AB است پس $OA = OB$

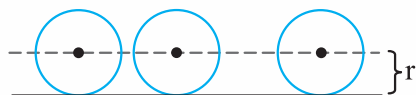
O روی عمودمنصف CD است پس $OC = OD$

$ABCD$ یک چهارضلعی محاطی است یعنی رأس‌های آن روی دایره قرار دارند.

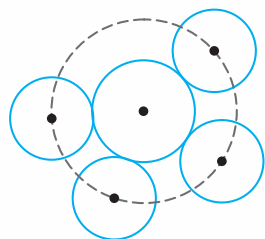
آسان

-۵

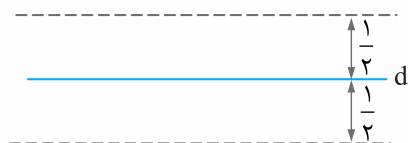
(آ) خطی موازی سطح میز به فاصله شعاع دایره از آن



(ب) دایره‌ای به مرکز توپ اول و به فاصله مجموع شعاع دایره‌ها



(پ) دو خط در طرفین خط اصلی و به فاصله $\frac{1}{2}$ از آن



سوالات تشریحی

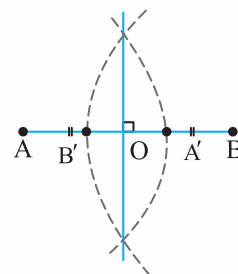
پاسخنامه

بخش ۱

آسان

-۱

پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ بیشتر از نصف طول AB باز می‌کنیم و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمائی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را به هم وصل کرده امتداد می‌دهیم. خط رسم شده همان عمودمنصف پاره‌خط AB است.



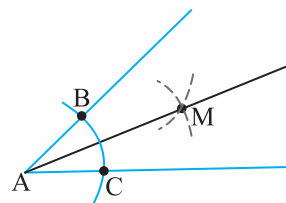
$$AA' = BB'$$

$$OB = OA$$

آسان

-۲

زاویه $\hat{A}$ را در نظر می‌گیریم. به مرکز A و به شعاع دلخواه کمائی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و C قطع کند. به مرکز B و C دو کمان با شعاع یکسان طوری می‌زنیم که همدیگر را درون زاویه در نقطه M قطع کنند. از A به M وصل کرده امتداد می‌دهیم. این خط همان نیمساز زاویه A است.



آسان

-۳

واژهٔ مکان هندسی شامل دو مورد است. یکی این که هر نقطه از مجموعه دارای یک ویژگی مشترک هستند و هر نقطه‌ای که دارای آن ویژگی باشد در آن مجموعه نقاط قرار می‌گیرد.

(آ) دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا یک نقطه ثابت به یک اندازه ثابت باشد.

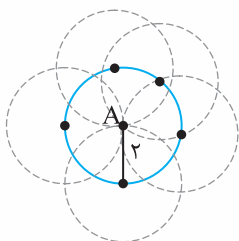
(ب) عمودمنصف، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

(پ) نیمساز، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد.

آسان

-۹

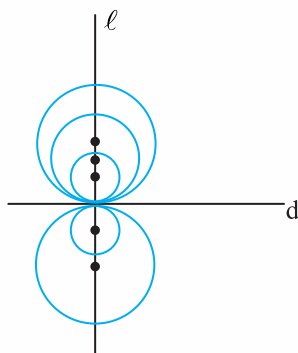
دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ است.



متوسط

-۱۰

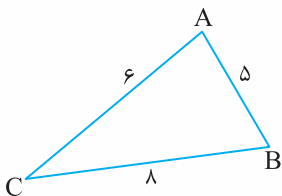
خط ℓ جواب مسأله است که خطی عمود بر خط d در نقطه A است.



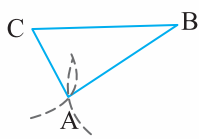
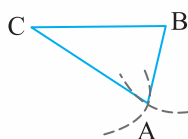
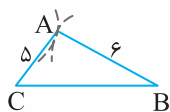
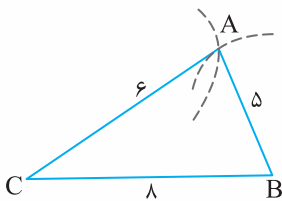
متوسط

-۱۱

ابتدا مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم:



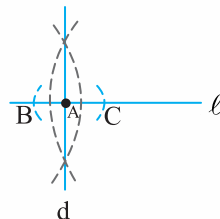
حال پاره‌خط BC را به طول ضلع ۸ رسم می‌کنیم. به مرکز B و شعاع ۵ کمانی می‌زنیم. همچنین به مرکز C و به شعاع ۶ کمان دیگری می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان نقطه A است برای این مسأله چهار مثلث رسم می‌شود که سه‌تای دیگر با مثلث اول هم‌نهشت هستند و بنابراین مسأله ۱ جواب دارد.



متوسط

-۶

خط ℓ و نقطه A روی آن را در نظر بگیرید. به مرکز A دو کمان در طرفین طوری می‌زنیم که خط را در B و C قطع کند، $(AC = BC)$ حال به روش رسم عمودمنصف، عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. این خط بر ℓ عمود است.

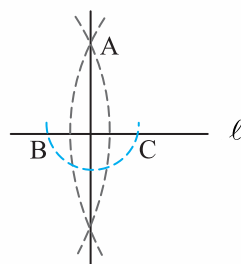


آسان

-۷

خط ℓ و نقطه A خارج از آن را در نظر بگیرید. شبیه روش سوال ۶ عمل می‌کنیم و این بار کمان را طوری می‌زنیم که حتماً خط ℓ را در دو نقطه B و C قطع کند.

عمودمنصف BC خط مورد نظر است.



متوسط

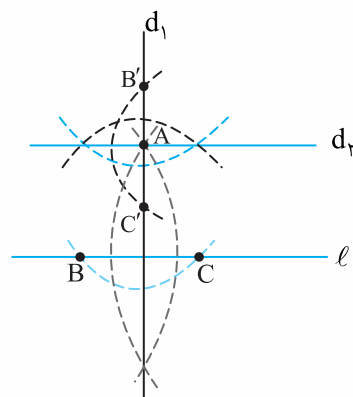
-۸

خط ℓ و نقطه A خارج از آن را در نظر بگیرید. به روش رسم خطی عمود بر خط ℓ از نقطه‌ای خارج از آن (سوال ۷) خطی عمود بر ℓ گذرنده از A رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم. حال به روش رسم خطی عمود بر خط d_1 گذرنده از نقطه A روی خط d_1 خط عمود d_2 را رسم می‌کنیم (سوال ۶)

$$d_2 \perp d_1 \Rightarrow d_2 \parallel \ell$$

این خط d_2 همان خط موازی ℓ است.

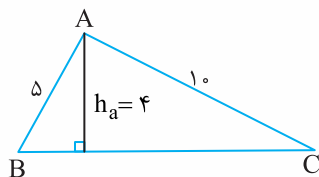
دو خط عمود بر یک خط، باهم موازی‌اند.



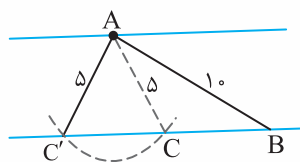
دشوار

-۱۵

اول مثلث رو رسم شده فرض کن.



برای رسم ابتدا دو خط موازی به فاصله ارتفاع $h_a = 4$ رسم می کنیم. از نقطه A که روی خط بالایی قرار دارد، دو کمان به اندازه شعاع ۵ و ۱۰ می زنیم تا خط پایینی را در دو نقطه B و C قطع کند. مثلث دلخواه است. همچنین ABC' جواب دیگر مسأله است.



و مسأله دو جواب دارد.



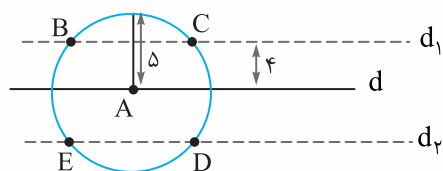
آسان

-۱ گزینۀ «۲»

طبق تعریف مکان هندسی دو مفهوم نیمساز و عمودمنصف، گزینۀ ۲ درست است.

متوسط

-۲ گزینۀ «۳»



مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۴ سانتی متر باشد، خط‌هایی موازی d در دو طرف d به فاصله ۴ است.

مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله ۵ است، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ است. جواب مسأله محل برخورد این دو مکان هندسی است که طبق

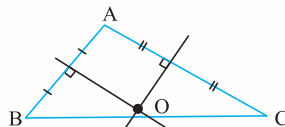
شکل ۴ جواب دارد یعنی نقاط B، C و D و E.

متوسط

-۱۲

O روی عمودمنصف ضلع AC است پس $OA = OC$.O روی عمودمنصف ضلع AB است پس $OA = OB$.

بنابراین $OB = OC$ و O مرکز دایره‌ای است که از A می‌گذرد بنابراین نقاط B و C نیز روی دایره قرار دارند. (O مرکز دایره محیطی)



متوسط

-۱۳

نقطه O روی نیمساز زاویه A است پس فاصله آن تا دو ضلع زاویه برابر است یعنی:

$$OH = OH'$$

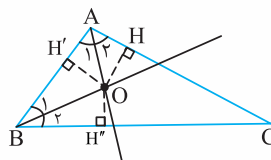
همچنین O روی نیمساز زاویه B است پس:

$$OH' = OH''$$

بنابراین:

$$OH = OH' = OH''$$

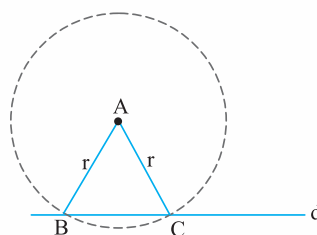
بنابراین دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OH رسم می‌شود از H' و H'' هم می‌گذرد و مماس بر اضلاع مثلث است بنابراین اضلاع مثلث مماس بر دایره می‌شوند. (O مرکز دایره محاطی)



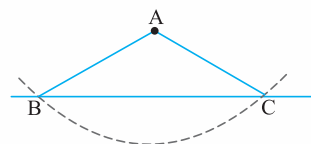
متوسط

-۱۴

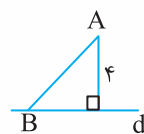
آ به مرکز A و به شعاع r بزرگ‌تر از ۴، دایره‌ای می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه B و C قطع کند، مثلث موردنظر است. $AB = AC = r$



ب به مرکز A و به شعاع $r = 6$ دایره‌ای می‌زنیم. محل برخورد با d همان $AB = AC = 6$ رئوس دیگر مثلث است.



(پ)



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times BC = 4r^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

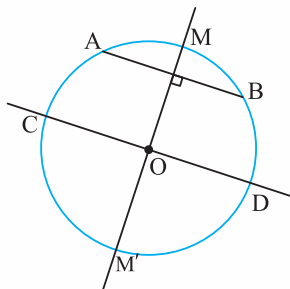
پس مشابه قسمت آ و ب، این بار دایره‌ای به شعاع $2\sqrt{5}$ می‌زنیم.

آسان

۷- گزینه «۴»

حواست باشه: نقاط تقاطع عمودمنصف هر وتر دایره با محیط دایره، یک قطر از دایره است.

عمودمنصف MM' را رسم می‌کنیم که قطر دیگری از دایره است و موازی با AB است (CD)



آسان

۸- گزینه «۳»

می‌دانیم که هر نقطه‌ای که روی نیمساز زاویه باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است یعنی $BH = BH'$ پس:

$$x^2 = 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$$

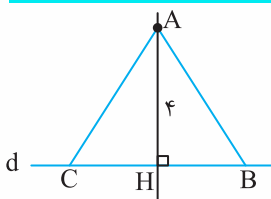
$$\Rightarrow x = 6 \vee x = -1 \quad \text{غ ق ق ۱}$$

$$x = 6 \Rightarrow \begin{cases} AH = 18 \\ BH = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^2 = 36^2 + 18^2 = (2 \times 18)^2 + 18^2 = 5 \times 18^2 \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

آسان

۹- گزینه «۲»



$$AB = AC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \times 4 \times BC \Rightarrow BC = 4 \Rightarrow HB = HC = 2$$

$$\Rightarrow AB^2 = AH^2 + HB^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

آسان

۱۰- گزینه «۳»

طبق قضیه نامساوی مثلث در صورتی سه عدد a و b و c می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که مجموع هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد:

$$\left. \begin{aligned} x + 3 > 7 &\Rightarrow x > 4 \\ x + 7 > 3 &\Rightarrow x > -4 \quad \text{بدیهی} \\ 7 + 3 > x &\Rightarrow x < 10 \end{aligned} \right\} \rightarrow 4 < x < 10$$

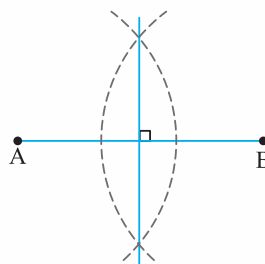
x عددی طبیعی است پس مقادیری که x می‌تواند داشته باشد برابر است با:

$$x = 5, 6, 7, 8, 9$$

آسان

۳- گزینه «۲»

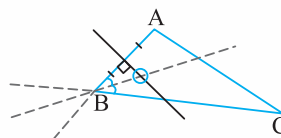
باید دو کمان به مرکز A و B و شعاع بیشتر از نصف طول پاره خط AB بزنیم.



متوسط

۴- گزینه «۲»

از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است پس روی عمودمنصف AB قرار دارد.

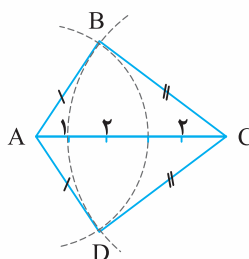


از دو ضلع AB و BC به یک فاصله است.

پس روی نیمساز زاویه B قرار دارد. برای امتداد دو ضلع AB و BC نیز همان امتداد نیمساز را داریم. محل برخورد این دو مکان هندسی (عمودمنصف و نیمساز) جواب مسأله است که یک نقطه است.

آسان

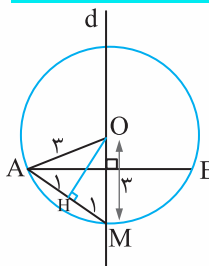
۵- گزینه «۴»



شکل حاصل کایت است و گزینه ۴ درست است.

متوسط

۶- گزینه «۳»



$$AM = 2 \Rightarrow AH = HM = 1$$

$$OA = 3 \Rightarrow OM = OB = 2 \quad (\text{شعاع دایره})$$

یادت باشه اگر از مرکز دایره به وسط وتری از دایره وصل کنیم بهش عمود هم

میشه پس $\triangle OAH$ قائم‌الزاویه است.

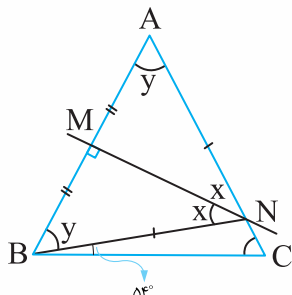
$$OH^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \Rightarrow OH = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

M وسط AB است پس $AM = MB$

N روی عمود منصف ضلع AB است پس:



$$AN = NB$$

$$\hat{B}_1 = \hat{A} \text{ بنابراین}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow y + y + 54^\circ + y + 54^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3y = 72 \Rightarrow y = 24$$

$$\triangle MBN: y + x = 90^\circ \Rightarrow x = 66$$



آسان

-۱

$$\frac{6}{18} = \frac{11}{33}, \frac{33}{11} = \frac{18}{6} \quad (\text{آ})$$

(ب) ترکیب مخرج در صورت انجام شده و داریم:

$$\frac{4+14}{14} = \frac{10+35}{35} \Rightarrow \frac{18}{14} = \frac{45}{35}$$

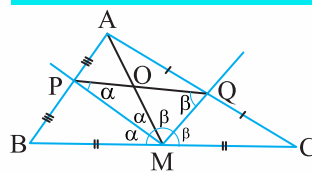
$$\frac{4}{18} = \frac{10}{45} \quad \text{ترکیب صورت در مخرج انجام شده و داریم:}$$

تفضیل مخرج در صورت داریم:

$$\frac{5-12}{12} = \frac{10-24}{24} \Rightarrow \frac{-7}{12} = \frac{-14}{24}, \frac{5}{-7} = \frac{10}{-14}$$

دشوار

۱۱- گزینه «۴»



$$\triangle AMC: \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\triangle AMB: \frac{AM}{MB} = \frac{AP}{BP}$$

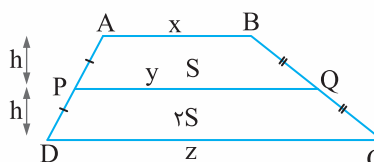
$$\frac{MB=MC}{\rightarrow} \frac{QA}{QC} = \frac{AP}{BP}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC \Rightarrow \hat{BMP} = \hat{MPQ} = \alpha$$

یعنی مثلث OMP متساوی الساقین است و $OM = OP$.

متوسط

۱۲- گزینه «۲»



$$\frac{S_{ABQP}}{S_{QCDP}} = \frac{1}{2}$$

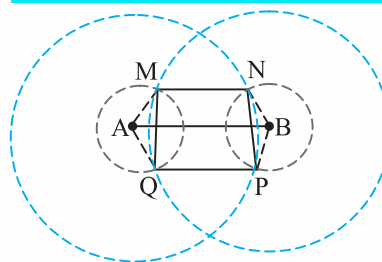
می‌دانیم که $y = \frac{x+z}{2}$ و داریم:

$$\frac{1}{2} = \frac{S_{ABQP}}{S_{QCDP}} = \frac{\frac{1}{2} \left(x + \frac{x+z}{2} \right) h}{\frac{1}{2} \left(z + \frac{x+z}{2} \right) h} = \frac{\frac{3x+z}{2}}{\frac{z+x}{2}} = \frac{3x+z}{z+x}$$

$$\frac{3x+z}{x+z} = \frac{1}{2} \Rightarrow x + 3z = 6x + 2z \Rightarrow z = 5x \Rightarrow \text{نسبت قاعده‌ها} = \frac{x}{z} = \frac{1}{5}$$

دشوار

۱۳- گزینه «۳»



می‌دانیم که در دو دایره متقاطع، خط‌المركزین بر وتر مشترک عمود هست

یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp MQ \\ AB \perp NP \end{array} \right\} \Rightarrow MQ \parallel NP$$

دو مثلث AMQ و BNP هم‌نهشت هستند. پس $MQ = NP$.

چهارضلعی MNPQ دو ضلع مقابل MQ و NP هم موازی و هم برابرند پس

MNPQ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی $NM \parallel AB \parallel PQ$ ، پس زوایا قائمه

هستند در نتیجه چهارضلعی مستطیل است.

آسان

-۴

همانطوری که در شکل نشان داده شده $BO \parallel IJ$. طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JO} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{x+4}{7/5} \Rightarrow 15x = 5x + 20$$

$$\Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

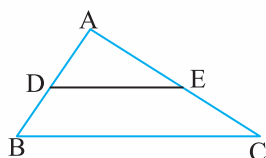
$$AB = 2x + 5 = 9$$

متوسط

-۵

قضیه تالس می‌گوید اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر

را با یک نسبت قطع می‌کند که به آن تالس جزء به جزء می‌گوییم و داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

با ترکیب صورت در مخرج داریم:

$$\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

که به آن تالس جزء به کل می‌گوییم.

یعنی نسبت قطعه بالایی یک ضلع به کل ضلع برابر نسبت قطعه بالایی ضلع

دیگر به کل آن ضلع است.

همچنین با ترکیب در صورت داریم:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$$

یا

$$\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

آسان

-۴

ا) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ تالس جزء به جزء

ب) $\frac{DB}{DA} = \frac{EC}{EA}$ تالس جزء به جزء

پ) $\frac{DB}{BA} = \frac{EC}{AC}$ تالس جزء به کل

ت) $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{EC}$ تالس جز به کل

ث) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ تالس جزء به کل

ج) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ تالس جزء به کل

متوسط

-۲

آ) استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری بر مبنای تعداد محدودی مشاهدات یعنی بررسی یک موضوع در چند حالت و نتیجه‌گیری کلی از آن است. در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.

مثلاً اگر در چند مثلث متفاوت جمع زوایای داخلی آن‌ها را حساب کنیم می‌بینیم در هر مورد به عدد 180° می‌رسیم و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که جمع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

نکته: نتیجه استدلال استقرایی یک حدس کلی است و ممکن است درست نباشد.

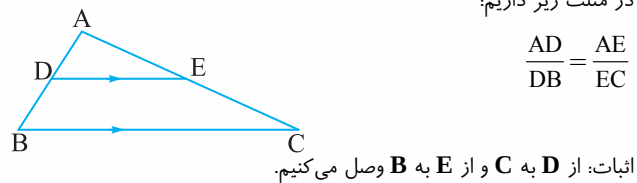
ب) استدلال استنتاجی: استدلالی است بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم. این روش استدلالی به استدلال مستقیم معروف است شبیه کاری که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها از فرض به حکم می‌رسیم.

به نتایج مهم و پر کاربردی که از استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه می‌گوییم. به عنوان مثال، اهمیت قضیه فیثاغورس در این است که این قضیه برای همه مثلث‌های قائم‌الزاویه برقرار است.

دشواری

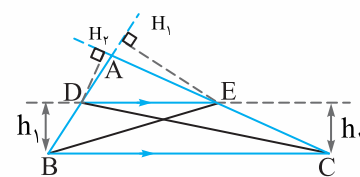
-۳

اگر در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه پاره‌خط‌های ایجاد شده روی این دو ضلع متناسبند. به عبارتی در مثلث زیر داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

اثبات: از D به C و از E به B وصل می‌کنیم.



دو مثلث $\triangle DEB$ و $\triangle DBC$ را در نظر بگیرید هر دو دارای قاعده مشترک DE هستند و چون $DE \parallel BC$ پس ارتفاع آن‌ها نیز برابر است ($h_1 = h_2$)

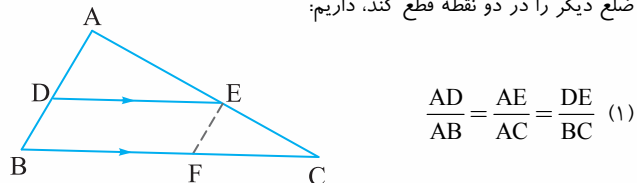
بنابراین $S_{\triangle DEB} = S_{\triangle DEC}$ و داریم:

$$\begin{aligned} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} &= \frac{\frac{1}{2} AD \times EH_1}{\frac{1}{2} DB \times EH_2} = \frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} &= \frac{\frac{1}{2} AE \times DH_2}{\frac{1}{2} EC \times DH_1} = \frac{AE}{EC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

-۷

دشوار

تعمیم قضیه تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، داریم:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (1)$$

اثبات: تناسب بین دو کسر اول را در سوال ۵ به عنوان تالس جزء به کل دیدیم. حال داریم:

پاره خط EF را موازی DB رسم می کنیم. طبق قضیه تالس ($EF \parallel DB$) داریم:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

چهارضلعی BDEF متوازی الاضلاع است بنابراین $BF = DE$ و با جاگذاری داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (2)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

-۸

آسان

آ) نادرست	ب) درست
پ) نادرست	ت) نادرست
ث) درست	ج) درست

-۹

متوسط

برهان خلف روش اثبات به طور غیر مستقیم است و به این صورت انجام می شود که فرض کنیم حکم درست نباشد (نقیض حکم یا فرض خلف) و به یک تناقض با فرض قضیه یا اطلاعات قبلی می رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل است و حکم درست است.

حال به اثبات به کمک برهان خلف می پردازیم:

فرض: $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عدد فرد است

حکم: n عدد فرد است

فرض خلف: n فرد نباشد پس n زوج است

اگر n زوج باشد در این صورت n^2 نیز زوج است زیرا:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k' \quad \text{زوج} \quad *$$

که به تناقض با فرض مسئله (n^2 فرد) می رسیم پس فرض خلف نادرست است و حکم درست است.

-۱۰

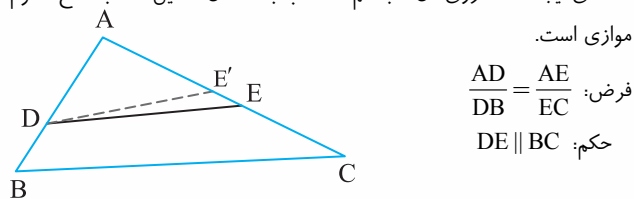
متوسط

فرض: AD نیمساز زاویه A و $BD \neq DC$.
حکم: $AB \neq AC$.
نقیض حکم: $AB = AC$.
مثلث ABC را در نظر بگیریم:
اگر $AB = AC$ پس مثلث متساوی الساقین است و بنابراین نیمساز زاویه A همان میانه است پس D وسط BC و C است و $BD = DC$ که تناقض با فرض است پس نقیض حکم نادرست است و حکم درست است.

-۱۱

دشوار

عکس قضیه تالس: اگر در مثلثی، خطی دو ضلع زاویه را طوری قطع کند که تکه های ایجاد شده روی آن ها با هم متناسب باشد، آن گاه این خط با ضلع سوم موازی است.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{فرض:}$$

$$DE \parallel BC \quad \text{حکم:}$$

فرض کنیم حکم درست نباشد و $DE \not\parallel BC$. از نقطه D خط DE' را موازی BC رسم می کنیم طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AB} = \frac{AE'}{AC}$$

طبق فرض داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

و از مقایسه این دو رابطه داریم:

$$AE' = AE$$

بنابراین E و E' بر هم منطبق هستند و این یک تناقض است زیرا $DE \parallel BC$ اما $DE' \parallel BC$ بنابراین فرض خلف نادرست است و حکم درست است.

-۱۲

متوسط

آ) خط DE موازی ضلع BC در مثلث ABC است اگر و تنها اگر

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ب) مثلث ABC قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع با مجموع

$$\text{مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد به عبارتی } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

پ) ۱- عکس قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن گاه اضلاع روبه رو به آن دو زاویه نیز برابرند. عکس قضیه نیز درست است بنابراین صورت دو شرطی آن به صورت زیر است:

«در هر مثلث دو ضلع برابرند اگر و تنها اگر زوایای روبه رو به آن دو ضلع برابر باشند»

۲- عکس: اگر زوایای روبه رو در یک چهارضلعی مکمل باشند رئوس این چهارضلعی روی یک دایره قرار دارد.

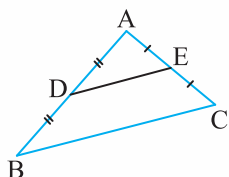
عکس قضیه درست است و فرم دو شرطی آن این گونه است:

«رئوس یک چهارضلعی روی یک دایره قرار دارد (محاطی است) اگر و تنها اگر زوایای مقابل آن مکمل هم باشند.»

آسان

-۱۶

مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم و وسط اضلاع AB و AC را به هم وصل می‌کنیم و آن را DE می‌نامیم.



$$AD = DB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = 1 \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$AE = EC \Rightarrow \frac{AE}{EC} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC}$$

و طبق عکس قضیه تالس $OE \parallel BC$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

از طرفی طبق تالس جزء به کل داریم:

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2DE$$

یعنی BC دو برابر DE است یا DE نصف BC است.

آسان

-۱۷

$$1) PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{1}} \Rightarrow \boxed{AP = 4}$$

$$\text{تالس جزء به کل: } \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{PQ}{9} \Rightarrow PQ = \frac{36}{10} = 3 \frac{3}{5}$$

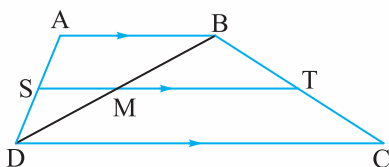
$$2) ST \parallel NO \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{3y+3}{6} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} \Rightarrow 3y+3=12 \Rightarrow \boxed{y=3}$$

$$\text{تالس جزء به کل: } \frac{MS}{MN} = \frac{ST}{NO} \Rightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \Rightarrow \frac{4x+1}{4x+1} = \frac{9}{9} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

دشوار

-۱۸

به این رابطه که قرار هست اثبات کنیم، تالس در دوزنقه می‌گیریم و برای شروع اثبات کافی هست یک قطر دوزنقه رو رسم کنیم.



قطر BD رو رسم کردم و محل برخورد با ST رو M نامگذاری کردم و داریم:

$$\triangle ABD: \frac{SD}{AS} = \frac{MD}{BM} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{BM}{MD} = \frac{AS}{SD} \quad (1)$$

$$\triangle BDC: \frac{BM}{MD} = \frac{BT}{TC} \quad (2) \xrightarrow{(1), (2)} \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

متوسط

-۱۳

مثال نقض: مثالی است که درستی یک حدس کلی را رد می‌کند.

(آ) مثال نقض: عدد ۲ که اول هست ولی فرد نیست.



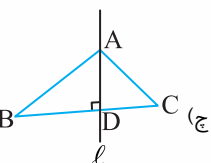
(ب) مثال نقض: این مثلث متساوی الساقین است ولی متساوی الاضلاع نیست.

(پ) عدد $\frac{1}{2}$ دارای مربع $\frac{1}{4}$ است و $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

(ت) $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ دو عدد گنگ هستند و $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ و صفر عددی گویاست.

(ث) عدد ۱۳۱ عددی اول و بزرگ‌تر از ۱۲۷ است.

(ج) در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع قائمه خودش ارتفاع است و بنابراین با ارتفاع برابر است.



(ج) خط l عمود منصف BC و AD میانه وارد بر

BC است و بر هم منطبق نیستند.

آسان

-۱۴

اول بیا به روش قدیمی نصف ضرب قاعده در ارتفاع بریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH$$

از طرفی توی مثلث قائم‌الزاویه، اضلاع قائمه خودشون عمود بر هم هستند و می‌تونیم بنویسیم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$$

با مساوی قرار دادن این دو رابطه داریم:

$$\frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} AB \times AC \Rightarrow BC \times AH = AB \times AC$$

یعنی ضرب ارتفاع وارد بر وتر در خود وتر مساوی هست با ضرب دو ضلع قائمه.

متوسط

-۱۵

خب عادت کردیم به این که اولین راه برای حل تناسب طرفین - وسطین هست اما الان می‌خواهیم با ویژگی‌های دیگر تناسب که یاد گرفتیم حل کنیم:

$$1) \frac{a}{10+a} = \frac{b}{\lambda+b} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{a}{10+a-a} = \frac{b}{\lambda+b-b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{\lambda} \xrightarrow{\text{تعویض وسطی‌ها}} \frac{a}{b} = \frac{10}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{5}{4}}$$

$$2) \frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b} \xrightarrow{\text{تفصیل در صورت}} \frac{3a+10-10-2a}{10+2a} = \frac{3b+7-7-2b}{7+2b}$$

$$= \frac{3b+7-7-2b}{7+2b} \Rightarrow \frac{a}{10+2a} = \frac{b}{7+2b} \xrightarrow{\times 2} \frac{2a}{10+2a} = \frac{2b}{7+2b}$$

$$\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{2a}{10} = \frac{2b}{7} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{10}{7}}$$

روابط بالا را با طرفین وسطین هم می‌توان حل کرد.



آسان

۱- گزینه «۱»

یه نگاه به عبارتی که داده بنداز و با صورت کسرها مقایسه کن، می‌بینی که صورت‌ها با هم جمع شدن. می‌دونیم که:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

بنابراین:

$$\frac{2a}{3} = \frac{2b-1}{4} = \frac{c+3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+2b-1+c+3}{3+4+5} = \frac{2a+2b+c+2}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4} \\ \frac{2b-1}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2b-1=6 \Rightarrow b = \frac{7}{2} \\ \frac{c+3}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2c+6=15 \Rightarrow c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{\frac{9}{4} \times \frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{7}{4}$$

دشوار

۲- گزینه «۱»

$$\triangle BB'C: \frac{A'C}{BC} = \frac{AA'}{BB'}$$

$$\triangle BCC': \frac{A'B}{BC} = \frac{AA'}{CC'}$$

از جمع دو رابطه بالا داریم:

$$\frac{AA'}{BB'} + \frac{AA'}{CC'} = \frac{A'C+A'B}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

$$\xrightarrow{\div AA'} \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{AA'}$$

اثبات رو نوشتیم که بدونی رابطه از کجا اومده اما تو حفظش کن و بعداً باز

استفاده کن. پس:

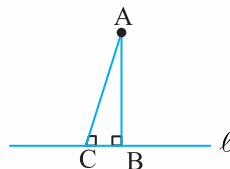
$$\frac{1}{BB'} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{BB'} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \Rightarrow BB' = 12$$

متوسط

۱۹-

فرض کنیم حکم درست نباشد و بتوان از یک نقطه خارج از یک خط، دو عمود

رسم کرد بنابراین داریم:



$$AB \perp l$$

$$AC \perp l$$

در این صورت مثلثی تشکیل شده که دو زاویه 90° دارد و این یعنی مجموع

زوایای این مثلث بیشتر از 180° هست و تناقض دارد با این قضیه که می‌دونیم

جمع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

پس بین که تناقض همیشه با فرض مسأله نیست و گاهی با واقعیت‌هایی هست

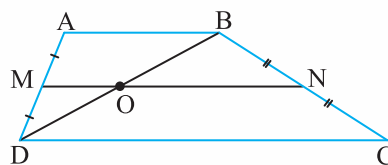
که از قبل می‌دونیم.

دشوار

۲۰-

حواست باشه که وسط‌های ساق‌ها به هم وصل شده و اگر قطر BD رو رسم

کنیم داریم:



$$\triangle ADB: \frac{MD}{AD} = \frac{MO}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2OM \Rightarrow OM = \frac{AB}{2}$$

$$\triangle BDC: \frac{BN}{BC} = \frac{ON}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow ON = \frac{DC}{2}$$

$$MN = OM + ON = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB+DC}{2}$$

آسان

۷- گزینه ۱»

$$\frac{4}{x} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{6}{9} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

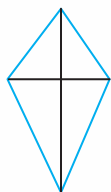
$$y - x = \frac{20}{3} - 2 = \frac{14}{3}$$

آسان

۸- گزینه ۲»

(۱) عکس قضیه می‌گوید: مثلثی که دو ارتفاع برابر دارد متساوی‌الساقین است که درست است.

عکس (۲) هر چهارضلعی که در آن قطرها بر هم عمود باشد لوزی است که درست نیست.
مثلاً در کایت:



(۳) هر مثلثی که سه زاویه برابر دارد متساوی‌الاضلاع است که درست است.
عکس (۴): هر چهارضلعی که قطرها با هم برابر باشد مستطیل است و درست است.

متوسط

۹- گزینه ۴»

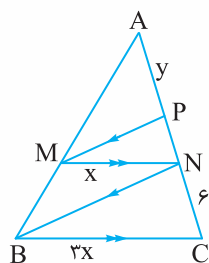
$$\triangle ABC: \frac{EF}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}AB$$

$$\triangle BDC: \frac{EF}{CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = \frac{1}{3}CD$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{3}CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$$

دشوار

۱۰- گزینه ۴»



$$BC = 3 \underbrace{MN}_x$$

$$\triangle ABC: \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

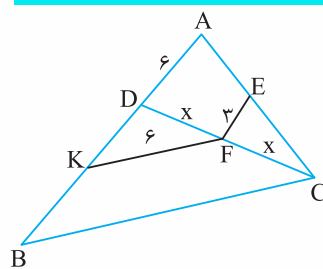
$$\Rightarrow \frac{AN}{AC - AN} = \frac{1}{3 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} \quad NC=6 \Rightarrow \boxed{AN=3}$$

$$Z \text{ طبق قضیه زورو: } AN^2 = AP \cdot AC \Rightarrow 9 = y(9) \Rightarrow y = 1$$

متوسط

۱۱- گزینه ۲»



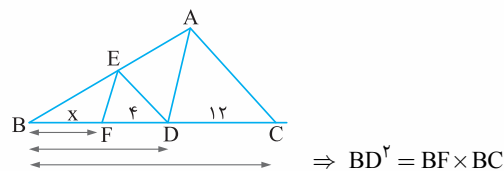
$$\triangle ADC: \frac{FC}{DC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2FC \xrightarrow{FC=x} DC = 2x \Rightarrow DF = x$$

$$\triangle BDC: \frac{FD}{DC} = \frac{KF}{BC} \Rightarrow \frac{x}{2x} = \frac{6}{BC} \Rightarrow \boxed{BC=12}$$

دشوار

۱۲- گزینه ۳»

توشکلهایی که اثری از «Zoro» می‌بینی! ☺، یعنی به Z افتاده توی مثلث، از فرمول زیر استفاده کن:



$$\Rightarrow BD^2 = BF \times BC$$

پس:

$$(x+4)^2 = x(x+16)$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 16x \Rightarrow 16 = 8x \Rightarrow x = 2$$

آسان

۱۳- گزینه ۳»

پاره‌خط وسطی، دقیقاً وسط ساق‌های دوزنقه رو به هم وصل کرده پس طبق

$$\text{فرمول } MN = \frac{AB+CD}{2} \text{ داریم:}$$

$$11 - 3x = \frac{x+4+3-2x}{2} \Rightarrow 22 - 6x = 7 - x$$

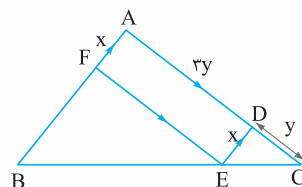
$$15 = 5x \Rightarrow \boxed{x=3}$$

دشوار

۱۴- گزینه ۴»

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{3} \Rightarrow FB = 3 \underbrace{AF}_x$$

از این ترغند x گذاری توی تالس و تشابه استفاده کن و حالشو ببر!



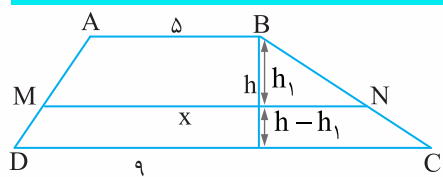
$$\triangle ABC: \frac{EF}{AC} = \frac{3x}{4x} \Rightarrow AC = 4 \underbrace{CD}_y \Rightarrow AD = 3y$$

$$\triangle ABC: \frac{CD}{AC} = \frac{x}{4x} \Rightarrow AC = 4 \underbrace{CD}_y \Rightarrow AD = 3y$$

$$\frac{S_{AFED}}{S_{ABC}} = \frac{AF \times AD \sin A}{\frac{1}{2} AB \times AC \sin A} = \frac{2 \times x \times 3y}{4x \times 4y} = \frac{3}{8}$$

دشوار

۱۵- گزینه «۲»



$$\frac{(x+5)h_1}{2} = \frac{(x+9)(h-h_1)}{2} \Rightarrow \frac{h-h_1}{h_1} = \frac{x+5}{x+9}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_1} - 1 = \frac{x+5}{x+9} \Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{2x+14}{x+9} \quad (1)$$

$$S_{ABCD} = 2S_{ABNM} \Rightarrow \frac{(5+9)h}{2} = 2 \times \frac{(x+5)h_1}{2}$$

$$\Rightarrow 7h = (x+5)h_1 \Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{x+5}{7} \quad (2)$$

$$\frac{2x+14}{x+9} = \frac{x+5}{7} \Rightarrow 2x^2 + 14x + 45 = 14x + 98 \Rightarrow x^2 = 53 \Rightarrow x = \sqrt{53}$$

آسان

۱۶- گزینه «۲»

$$\Delta MDC: \frac{MA}{y+MA} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{MA}{y} = \frac{4}{5} \Rightarrow MA = \frac{4y}{5}$$

$$\frac{MB}{MB+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{MB}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow MB = 4$$

$$\Delta MAB \text{ محیط: } \frac{4y}{5} + 4 + 4 = 5/6 + 8 = 13/6$$

آسان

۱۷- گزینه «۱»

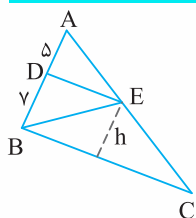
$$\frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \Rightarrow y^3 = 4(5-x) \quad (1)$$

$$\frac{4}{y+4} = \frac{x+1}{y+x+1} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{4}{y} = \frac{x+1}{y} \Rightarrow x+1=4$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \xrightarrow{(1)} y^3 = 4(2) \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow y-2x = 2-6 = -4$$

متوسط

۱۸- گزینه «۴»



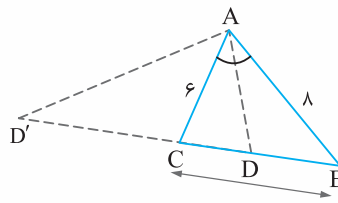
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2}BC \times h}{\frac{1}{2}DE \times h} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5} = 2/4$$

دشوار

۱۱- گزینه «۳»

یادت باشه که در هر مثلث، نیمساز هر زاویه درونی، ضلع روبه‌روی آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. این قضیه برای نیمساز زاویه خارجی هم برقرار هست.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{DC}{5-DC} \Rightarrow DC = \frac{15}{7} \quad (1)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{5+D'C}{D'C} \Rightarrow D'C = 15 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow DD' = DC + CD' = \frac{15}{7} + 15 = \frac{120}{7}$$

آسان

۱۲- گزینه «۳»

گزینه ۳ درست است زیرا در مثلث قائم‌الزاویه محل هم‌رسمی عمودمنصف‌های اضلاع روی وتر است.

آسان

۱۳- گزینه «۲»

$$\frac{e}{3} = \frac{a+b}{2} = \frac{c+rd}{5} = \frac{rc+ed}{15}$$

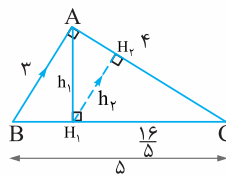
$$\frac{5e}{15} = \frac{2a+2b}{4}$$

$$\frac{A}{5e+2a+2b+rc+ed} = \frac{e}{3} \Rightarrow \frac{e}{3} = \frac{A}{34} \Rightarrow A = 34\left(\frac{e}{3}\right)$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

$$AB \times AC = AH_1 \times BC \Rightarrow 3 \times 4 = h_1 \times 5 \Rightarrow h_1 = \frac{12}{5}$$



AB و H_1H_2 هر دو عمود بر ضلع AC هستند.

بنابراین $AB \parallel H_1H_2$ و طبق تالس داریم:

$$\Delta AH_1C : H_1C^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{256}{25} \Rightarrow H_1C = \frac{16}{5}$$

$$\Delta ABC \text{ در تالس: } \frac{5}{h_2} = \frac{h_2}{3} \Rightarrow h_2 = \frac{3 \times 16}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{\frac{3 \times 16}{25}}{\frac{12}{5}} = \frac{4}{5}$$

متوسط

-۵

در سوال قبل دیدیم که هر سه مثلث قائم الزاویه متشابه‌اند. با نوشتن نسبت اضلاع داریم:

$$1) \triangle ABH \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \times HC$$

$$2) \triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

$$3) \triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \times BC$$

از جمع روابط بالا داریم:

$$4) AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times BC$$

$$= BC(BH + HC) = BC(BC) = BC^2$$

که همون رابطه فیثاغورس هست.

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

متوسط

-۶

$$1) h^2 = d \cdot e \Rightarrow 25 = 7e \Rightarrow e = \frac{25}{7}$$

$$2) b^2 = e(d + e) \Rightarrow b^2 = 7(\lambda) \Rightarrow b = \sqrt{7\lambda}$$

$$c^2 = d(d + e) = 5(\lambda) \Rightarrow c = \sqrt{5\lambda}$$

$$3) \text{اعداد فیثاغورسی} \Rightarrow d + e = 10$$

$$h(d + e) = bc$$

$$h(10) = 6 \times 8 \Rightarrow h = 4/8$$

متوسط

-۷

$$1) BH + HC = BC \Rightarrow 9 + HC = 10 \Rightarrow HC = 1$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = 9 \times 1 = 9 \Rightarrow AH = 3$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = 9 \times 10 = 90 \Rightarrow AB = \sqrt{90}$$

$$(AC)^2 = HC \times BC \Rightarrow AC^2 = 1 \times 10 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$$

$$2) AC^2 = HC \times BC \Rightarrow 25 = 2BC \Rightarrow BC = \frac{25}{2}$$

$$BH + HC = BC \Rightarrow BH + 2 = \frac{25}{2} \Rightarrow BH = \frac{21}{2}$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow AH^2 = \frac{21}{2} \times 2 = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = \frac{21}{2} \times \frac{25}{2} \Rightarrow AB = \frac{5\sqrt{21}}{2}$$

$$3) BC^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AH = 4/8$$

$$4) AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$12^2 = 6^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 12^2 = 6\sqrt{3} \times BC \Rightarrow BC = \frac{144}{6\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

$$BH + HC = BC \Rightarrow HC = 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

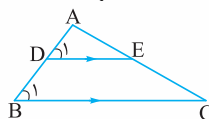
$$AC^2 = HC \times BC \Rightarrow AC^2 = 2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} \Rightarrow AC^2 = 48 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$



آسان

-۱

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی و مورب}} \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (zz)}$$



آسان

-۲

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \parallel DE \\ \text{مورب BD,} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ (zz)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{AC}{18} = \frac{21}{DE} \Rightarrow DE = 14, AC = 27$$

متوسط

-۳

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow MN \parallel BC$$

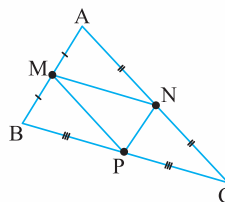
و به همین ترتیب: $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$

بنابراین چهارضلعی‌های ایجاد شده از جمله $MNPB$ متوازی‌الاضلاع هستند و

$$\hat{N} = \hat{B}, \hat{A} = \hat{P}, \hat{C} = \hat{M}$$

زاویه‌های روبرو برابرند پس:

پس دو مثلث ABC و MNP به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند.



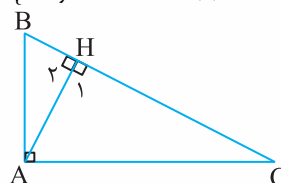
متوسط

-۴

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}_1 \\ \hat{C} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AHC \text{ (zz)} \quad (1)$$

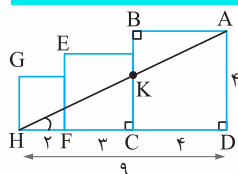
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}_2 \\ \hat{B} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ABH \text{ (zz)} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \triangle ABH \sim \triangle AHC$$

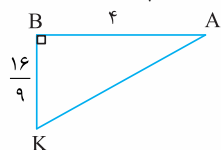


متوسط

-۱۱



$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{H} \text{ مشترک} \\ \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \end{array} \right. &\Rightarrow \triangle HKC \sim \triangle HAD \Rightarrow \frac{KC}{4} = \frac{5}{9} \Rightarrow KC = \frac{20}{9} \\ &\Rightarrow BK = 4 - \frac{20}{9} = \frac{16}{9} \\ AK^2 &= 4^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 16 + \frac{256}{81} = \frac{1552}{81} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{1552}}{9} = \frac{4\sqrt{97}}{9} \end{aligned}$$



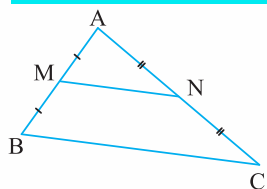
متوسط

-۱۲

$$\begin{aligned} ADE \sim ABC &\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = K^2 \\ \text{نالس: } \frac{x}{x+1} &= \frac{x+2}{2x+3} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x^2 + 3x = x^2 + 2x + x + 2 \\ &\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \\ K &= \frac{2x+1}{x} = \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} &= \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{2}+1}{2} = \frac{9+4\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

آسان

-۱۳



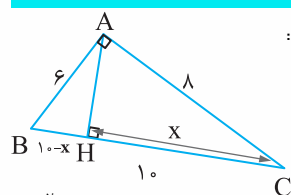
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تعمیم نالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AMN \sim ABC$$

(با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC} = 4S_{AMN} * \\ \frac{S_{AMN}}{S_{MNBC}} &= \frac{S_{AMN}}{S_{ABC} - S_{AMN}} = \frac{S_{AMN}}{4S_{AMN} - S_{AMN}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

متوسط

-۱۴



طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$\begin{aligned} AB \times AC &= AH \times BC \\ 6 \times 8 &= 4 \times BC \\ \Rightarrow BC &= 12 \end{aligned}$$

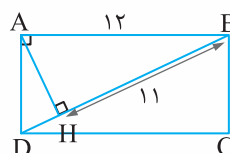
$$AC^2 = CH \times BC$$

$$64 = x \times 12 \Rightarrow x = 64/12 = 16/3$$

متوسط

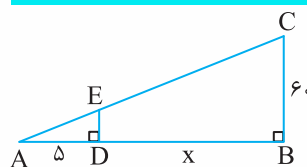
-۸

$$\begin{aligned} \triangle ABH : AH^2 &= 12^2 - 11^2 = 23 \\ AH &= \sqrt{23} \\ AH^2 &= BH \times HD \Rightarrow 23 = 11 \times HD \Rightarrow HD = \frac{23}{11} \\ BD &= 11 + \frac{23}{11} = \frac{144}{11} \\ AD^2 &= HD \times BD = \frac{23}{11} \times \frac{144}{11} \Rightarrow AD = \frac{12}{11} \sqrt{23} \end{aligned}$$



آسان

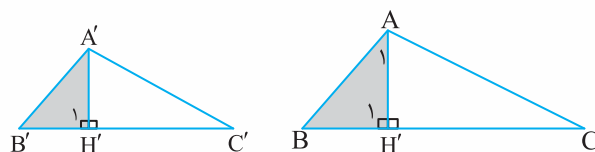
-۹



$$\begin{aligned} AB &= AD + DB = 5 + x \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{A} \text{ مشترک} \end{array} \right. &\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{5}{x+5} = \frac{1}{6} \Rightarrow x+5 = 30 \\ &\Rightarrow AB = 30 \end{aligned}$$

آسان

-۱۰



آ) می‌دونیم که اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت نیمسازها هم k هست پس:

$$\begin{aligned} \frac{AH}{A'H'} &= k \\ \left\{ \begin{array}{l} A_1 + B = A'_1 + B' \Rightarrow A_1 = A'_1 \\ B = B' \end{array} \right. &\Rightarrow ABH \sim A'B'H' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k \quad (\text{ب})$$

$$\text{پ)} \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} A'H' \times B'C'} = k \times k = k^2$$

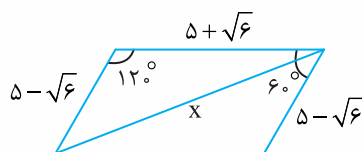
$$\text{ت)} \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = \frac{kA'B' + kB'C' + kA'C'}{A'B' + B'C' + A'C'} = k$$

به نتیجه‌گیری‌ها توجه کن!

متوسط

-۲۰

قضیه کسینوس‌ها رو یادته؟



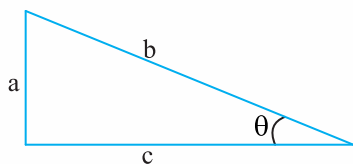
$$x^2 = (5 + \sqrt{6})^2 + (5 - \sqrt{6})^2 - 2(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6})\cos 120^\circ$$

$$= 25 + 6 + 2\sqrt{6} + 25 + 6 - 2\sqrt{6} - 2(25 - 6) \times \frac{-1}{2}$$

$$= 62 + 19 = 81 \Rightarrow \boxed{x=9}$$

یادآوری قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث دلخواه:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$



آسان

-۱ گزینۀ «۳»

نسبت مساحت مثلث‌ها ۴ است پس $\frac{S_1}{S_2} = 4$ و $K=2$ و می‌دونیم نسبت

محیط‌ها برابر نسبت تشابه یعنی همون ۲ هست.

بنابراین نسبت محیط مثلث کوچک‌تر به محیط مثلث بزرگ‌تر $\frac{1}{2}$ هست.

آسان

-۲ گزینۀ «۲»

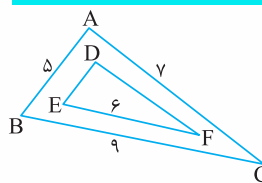
با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، گزینۀ ۲ جواب است و رابطه

درست به این صورت است:

$$AH^2 = BH \times HC$$

آسان

-۱۵



اضلاع دو مثلث موازی هستند پس دو مثلث متشابه هستند. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه اون‌ها هست:

$$\frac{S}{S'} = \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{S-S'}{S'} = \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

متوسط

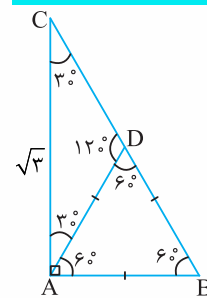
-۱۶

$$\hat{A} + D = D + D_1 = 180^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{D}_1 \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \triangle BED \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{3}{4+x} \Rightarrow x=5$$

متوسط

-۱۷



$$\triangle ABC : \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC=2$$

آسان

-۱۸

$$AB \parallel DE \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow \text{مقابل به راس}$$

می‌دونیم که توی مثلث‌های متشابه، نسبت میانه‌ها همون نسبت تشابه هست:

$$\frac{BM}{M'E} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{AC}{35-AC} \Rightarrow 105 - 3AC = 4AC$$

$$\Rightarrow 7AC = 105 \Rightarrow AC = 15$$

آسان

-۱۹

$$\triangle ABC \sim \triangle CDE$$

طبق تشابه دو مثلث داریم:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{3}{y} = \frac{x}{16}$$

$$\frac{x}{16} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

$$\frac{20}{3} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 20$$

$$x + y = \frac{16}{3} + 20 = \frac{76}{3}$$

آسان

۶- گزینه «۲»

$$BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF} \quad (1)$$

$$CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{8}{CD} \Rightarrow CD = \frac{24}{5} = 4 \frac{4}{5}$$

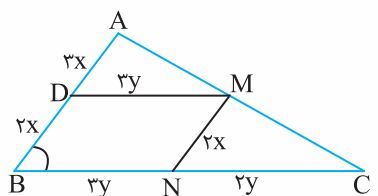
دشوار

۷- گزینه «۴»

تو همچنین تست‌هایی بهترین راه حل استفاده از ضرایب x و y ... هست بین:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} DA = 3x \\ DB = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{DM}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{3y}{5y} \Rightarrow NC = 2y$$

و الی آخر

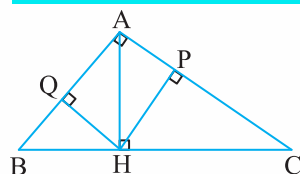


$$\frac{S_{DMBN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 3x \times 3y \times \sin B}{\frac{1}{2} \times 5x \times 5y \times \sin B} = \frac{12}{25}$$

$$\frac{12}{25} \times 100 = 48\%$$

دشوار

۸- گزینه «۱»



$$S_{ABH} = \frac{1}{5} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$S_{AHC} = \frac{4}{5} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

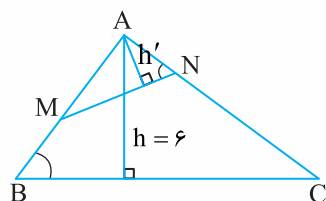
مجهول مسأله $\frac{HQ}{HP}$ است که ارتفاع‌های دو مثلث متشابه با $K = \frac{1}{2}$ هستند بنابراین این نسبت نیز $\frac{1}{2}$ است.

متوسط

۹- گزینه «۲»

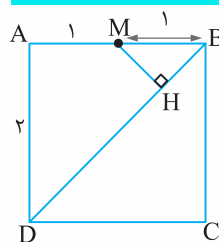
$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{N} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{h'}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{6}{h'} = \sqrt{3} \Rightarrow h' = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$



متوسط

۳- گزینه «۲»



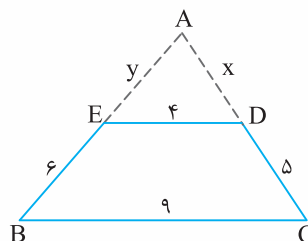
$$\hat{B} = \hat{B} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AMH$$

$$\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \frac{MH}{AD} = \frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{MH}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

آسان

۴- گزینه «۴»

$$BC \parallel ED \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{y}{y+6} = \frac{x}{x+5}$$



$$\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 20 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{y}{y+6} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 24 \Rightarrow y = \frac{24}{5}$$

$$\Delta y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{5}$$

$$\Delta ADE \text{ محیط} = x + y + 4 = 4 + \frac{24}{5} + 4 = \frac{12}{5}$$

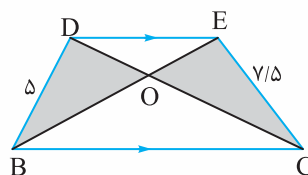
دشوار

۵- گزینه «۴»

اگر از D به E وصل کنیم داریم:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{6}{7/5} = \frac{6}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

پس چهارضلعی BDEC دوزنقه است:



$\triangle BDE$ و $\triangle DEC$ دارای قاعده مشترک و ارتفاع برابر هستند پس

$$S_{DEC} = S_{BDE} \Rightarrow \text{هر دو منهای } S_{ODE} \text{ شدن}$$

$$S_{ODB} = S_{OEC} \Rightarrow \frac{S_{ODB}}{S_{OEC}} = 1$$

آسان

۱۵- گزینه «۳»

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{E} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{x}{15} \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

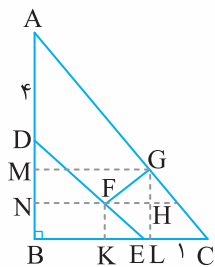
$$(x+6)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -6 \text{ غ ق ق } -6$$

دشوار

۱۶- گزینه «۲»

از نقاط F و G خطوطی موازی با اضلاع قائم مثلث ABC رسم می‌کنیم.

تعمیم قضیه تالس:



$$\triangle BDE : FK \parallel BD \Rightarrow \frac{FK}{BD} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{4} \Rightarrow FK = \frac{1}{4}BD$$

$$\xrightarrow{FK=HL} HL = \frac{1}{4}BD \quad (1)$$

$$\triangle ABC : GL \parallel AB \Rightarrow \frac{GH}{AB} = \frac{CG}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow GL = \frac{1}{4}AB \quad (2)$$

$$GH = GL - HL \xrightarrow{(1), (2)} GH = \frac{1}{4}(AB - BD) = \frac{1}{4} \times 4 = 1 \quad (3)$$

$$\triangle BDE : FN \parallel BE \Rightarrow \frac{FN}{BE} = \frac{DF}{DE} = \frac{3}{4} \Rightarrow FN = \frac{3}{4}DE \quad (*)$$

$$\triangle ABC : GM \parallel BC \Rightarrow \frac{GM}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow GM = \frac{3}{4}BC$$

$$\xrightarrow{GM=NH} NH = \frac{3}{4}BC \quad (**)$$

$$FH = NH - FN \xrightarrow{(*)} FH = \frac{3}{4}(BC - DE) = \frac{3}{4}EC = \frac{3}{4} \quad (4)$$

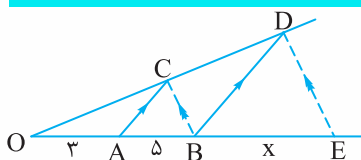
$$\triangle FGH : FG^2 = GH^2 + FH^2 \xrightarrow{(3), (4)} FG^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow FG = \frac{5}{4} = 1.25$$

البته ارزش خالی گذاشتن این تست توی پاسخنامه بیشتر از حل کردنش! ☺

متوسط

۱۷- گزینه «۱»



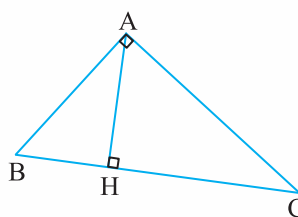
و اما رابطه Zoro:

$$(3+5)^2 = 3 \times (3+5+x)$$

$$64 = 3(x+8) \Rightarrow x+8 = \frac{64}{3} \Rightarrow x = \frac{64}{3} - 8 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

آسان

۱۱- گزینه «۲»



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$4^2 + 3^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

$$AH \times 5 = 3 \times 4$$

$$\Rightarrow AH = \frac{12}{5} = 2.4$$

آسان

۱۱- گزینه «۲»

$$AC = 6, AB = 8 \Rightarrow BC = 10$$

$$h \times BC = 6 \times 8 \Rightarrow h = \frac{48}{10} = 4.8$$

آسان

۱۲- گزینه «۳»

$$AH^2 = BH \times CH = 16 \Rightarrow AH = 4$$

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow AC^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow 16 + 64 = AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$S = 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 40$$

آسان

۱۳- گزینه «۴»

نسبت مساحت‌ها $\frac{1}{4}$ است پس $k = \frac{1}{4}$.

نسبت میانه‌ها نیز برابر k است پس:

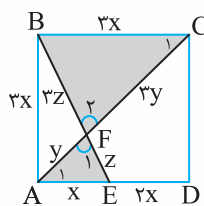
$$\frac{2m-1}{m+6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4m-2 = m+6 \Rightarrow 3m = 8 \Rightarrow m = \frac{8}{3}$$

دشوار

۱۴- گزینه «۱»

AE رو برابر x فرض می‌کنیم در این صورت ED برابر 2x هست و طول

مربع 3x میشه.



اضلاع دیگر رو هم به طور متناسب اسم گذاری می‌کنیم.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{F}_1 = F_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle BFC \Rightarrow k = 3$$

$$BE^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2 \Rightarrow BE = \sqrt{5}x$$

$$\Rightarrow EF = \frac{\sqrt{10}x}{4} \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}x \Rightarrow AF = \frac{3\sqrt{2}x}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10}x}{\frac{3}{4}\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



آسان

-۱

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2a, y = 3a \quad \text{آ) درست زیرا:}$$

$$\frac{3y-3}{3x-2} = \frac{9a-3}{6a-2} = \frac{3(3a-1)}{2(3a-1)} = \frac{3}{2}$$

ب) نادرست؛ پاره‌خط با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.
پ) نادرست؛ در اثبات تالس از تشابه استفاده نمی‌کنیم بلکه از مقایسهٔ مساحت‌ها استفاده می‌کنیم.

ت) درست

متوسط

-۲

آ) متشابه

ب) $\frac{4}{8} - \frac{6}{4} = 10$ زیرا:

$$6^2 + 8^2 = 100 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} 10 \Rightarrow 6 \times 8 = x \times 10 \Rightarrow x = 4/8$$

$$8^2 = y \times 10 \Rightarrow y = 6/4$$

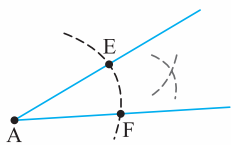
پ) حاصل ضرب تکه‌های ایجاد شده روی وتر

ت) به نسبت دو ضلع دیگر مثلث

آسان

-۳

برای رسم نیمساز زاویه $\widehat{ABC}$ کافی است سه کمان از نقاط A و E و F بزنیم:

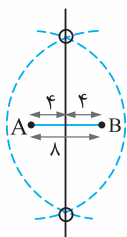


آسان

-۴

مکان هندسی نقاطی که از A و B به فاصله ۱۰ سانتی‌متر باشد، دایره‌هایی به مرکز A و B و به شعاع ۱۰ سانتی‌متر است که همان‌طور که از روی شکل پیداست دو نقطه با این ویژگی وجود دارد.

چرا که نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله باشد حتماً روی عمودمنصف قرار می‌گیرد.



آسان

۱۸-گزینه «۲»

یه فرمول به درد بخور دیگه یاد بگیر:

$$EF = \frac{DC - AB}{2} \Rightarrow EF = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

متوسط

۱۹-گزینه «۴»

$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{24+x} = \frac{24}{\cancel{48}} = \frac{y}{24}$$

$$\frac{\cancel{48}}{24+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 24+x=36 \Rightarrow x=12$$

$$\frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y=12$$

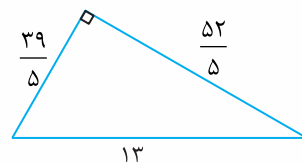
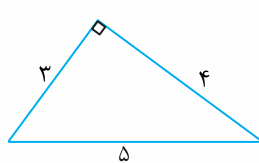
آسان

۲۰-گزینه «۳»

$$\text{محیط} = 12 \Rightarrow 2x - 7 + x + x - 1 = 12$$

$$4x - 8 = 12$$

$$4x = 20 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x - 1 = 4 \\ 2x - 7 = 3 \end{cases}$$



$$k = \frac{13}{5}$$

$$2x + 3 = 13$$

$$3 \times \frac{13}{5} = \frac{39}{5}$$

$$4 \times \frac{13}{5} = \frac{52}{5}$$

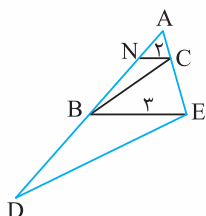
$$\frac{52}{5} - \frac{39}{5} = \frac{13}{5}$$

متوسط

-۹

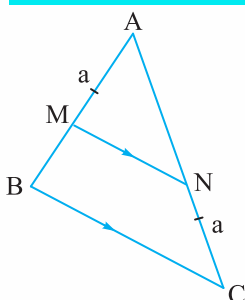
$$\triangle ABE \xrightarrow{\text{تالس}} NC \parallel BE \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle ADE: \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{2}{3}$$



متوسط

-۱۰



$$AB = \frac{3}{4}AC$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{AM}{\frac{3}{4}AC} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AM = \frac{3}{4}AN \Rightarrow a = \frac{3}{4}AN$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}AN}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MB = \frac{3}{4}NC = \frac{3}{4}a$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{a}{a + \frac{3}{4}a} = \frac{a}{\frac{7}{4}a} = \frac{4}{7}$$

دشوار

-۱۱

دو مثلث قابل انطباق نیستند یعنی $k \neq 1$ و بنابراین کوچکترین ضلع با طول

۳ نیست. پس کوچکترین ضلع یا a است یا b .

$$p = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ یا } \frac{3}{4} \text{ یا } \frac{3}{5}$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{3}{4} \Rightarrow p_2 = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

$$\text{نسبت تشابه} = \frac{3}{5} \Rightarrow p_2 = \frac{3}{5} \times 12 = 7 \frac{1}{2}$$

پس بیشترین محیط برابر ۹ است.

متوسط

-۵

طبق قضیه نامساوی مثلث:

$$5x + 2x + 1 > x \Rightarrow 6x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{6}$$

$$5x + x > 2x + 1 \Rightarrow 4x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

$$2x + 1 + x > 5x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

متوسط

-۶

پاره خط MN موازی BC است طبق قضیه تالس:

$$\frac{3x}{2} = \frac{x^2 + 5}{3} \Rightarrow 2x^2 + 10 = 9x \Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 5)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow AN + AM = 9 + 6 = 15 \\ x = \frac{5}{2} \Rightarrow AN + AM = \frac{45}{4} + \frac{15}{2} = \frac{75}{4} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هست و در صورتی که گزینه داشته باشیم می‌تونیم

جواب موردنظر رو انتخاب کنیم.

آسان

-۷

$$\frac{12 - x}{10 - y} = \frac{x}{y}$$

اگرچه به کمک قوانین دیگر تناسب میشه به کسر موردنظر رسید.

اما با به دقت کوچولو می‌بینیم که در طرفین وسطین جمله xy در هر دو

طرف دیده میشه، پس از طرفین وسطین استفاده می‌کنیم:

$$(12 - x)(y) = x(10 - y) \Rightarrow 12y - \cancel{xy} = 10x - \cancel{xy}$$

$$\Rightarrow 12y = 10x \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

متوسط

-۸

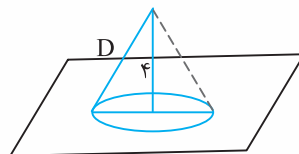
می‌دانیم که فاصله نقطه M از خطوط موردنظر، ارتفاع (عمودی) هست که از

M به اون خط رسم میشه و در یک نقطه عمود میشه از طرفی فاصله 5 از M

یعنی دایره‌هایی به مرکز M و شعاع 5 که در فضا تبدیل به کره‌ای به شعاع 5

میشه و از اونجایی که $5 > 4$ بنابراین بی‌شمار نقطه برخورد با صفحه p داریم

و بی‌شمار خط راست با این ویژگی وجود دارد.





آسان

-۱

- (آ) نادرست - برای تشابه دو مثلث تنها برابری دو زاویه کافی است.
- (ب) درست - هر دو مثلث هم‌نهشت، متشابه با نسبت تشابه $k=1$ هستند.
- (پ) نادرست - اگر نسبت ارتفاع‌ها ۳ است پس نسبت محیط‌ها هم ۳ است.
- (ت) نادرست - $AB^2 = BH \cdot BC$

متوسط

-۲

$$\frac{9}{4} \text{ (آ)}$$

کوچک‌ترین اضلاع: $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$ بزرگ‌ترین اضلاع: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

اضلاع متوسط: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

بنابراین دو مثلث متشابه با $k = \frac{3}{2}$ هستند پس نسبت مساحت‌ها برابر k^2

یعنی $\frac{9}{4}$ است.

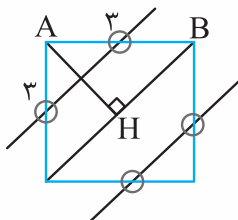
(ب) $\frac{a+3c+4}{b+3d+14} = \frac{2}{7}$

(پ) نصف وتر

(ت) میانگین حسابی بین قاعده‌های دوزنقه یا $\frac{a+b}{2}$

متوسط

-۳



$$\text{طول قطر} = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

مکان هندسی فاصله از قطر مربع، دو خط موازی قطر به فاصله $\frac{3}{2}$ از آن است

و با توجه به طول AH این دو خط محیط دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

متوسط

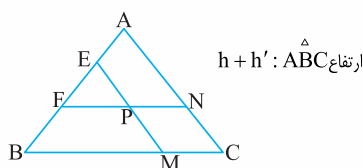
-۱۲

$$PNCM \text{ متوازی الاضلاع } \begin{cases} PN \parallel CM \Rightarrow FN \parallel BC \\ CM = NP, NC = PM \end{cases}$$

$$\triangle AFN : \frac{EF}{AF} = \frac{EP}{AN} = \frac{1}{2} \begin{cases} EP = x \\ AN = 2x \end{cases}$$

$$\frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow AN = 2x = NC$$

$$\triangle ABC : FB = 2AE = 2EF = 2y$$



ارتفاع دوزنقه متوازی الاضلاع: h'



$$\frac{BE}{EA} = \frac{h}{h'} = 2 \Rightarrow h = 2h'$$

$$\frac{S_{PNCM}}{S_{ABC}} = \frac{h' \times CN}{\frac{1}{2}(h+h')AC} = \frac{h' \times 2x}{\frac{1}{2} \times 4h' \times 4x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{ANPE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times h'(EP+AN)}{\frac{1}{2}(h+h')AC} = \frac{\frac{1}{2} \times h' \times 3x}{\frac{1}{2} \times 4h' \times 4x} = \frac{3}{16}$$

آسان

-۱۳

$$h^2 = dc = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15}$$

$$b^2 = c(d+c) = 3(8) = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$$

$$c^2 = d(d+c) = 5(8) = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$$

متوسط

-۱۴

مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به دلیل برابری زاویه‌های آن‌ها (همگی ۶۰ هستند)

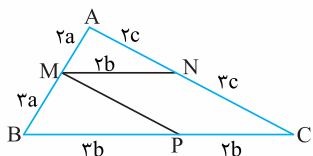
همواره متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر نسبت طول اضلاع آن‌هاست

همچنین نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت طول اضلاع آن‌هاست.

دشوار

-۹

$$r_{AM} = r_{MB} = r_a \Rightarrow AM = r_a \Rightarrow MB = r_a$$



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{r}{\delta} = \frac{r_b}{\delta b}$$

$$MNPC \Rightarrow MN = PC \Rightarrow PC = r_b \Rightarrow BP = r_b$$

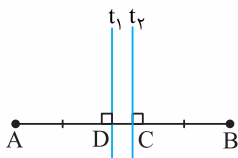
$$\frac{AN}{NC} = \frac{r}{\gamma} = \frac{r_c}{\gamma c}$$

$$\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times r_b \times \sin C}{\frac{1}{2} \times \delta b \times \sin C} = \frac{r_b}{\delta b} = \frac{r}{\delta}$$

متوسط

-۱۰

در این اثبات فرض می‌کنیم دو عمود منصف بر یک پاره‌خط رسم شده در این صورت ℓ_1 و ℓ_2 هر دو بر AB عمودند و آن را نصف می‌کنند. بنابراین $\ell_1 \parallel \ell_2$ و هر دو از نقطه‌های وسط AB می‌گذرند و این تناقض است با این‌که هر پاره‌خط تنها یک نقطه وسط دارد. پس تناقض، یکتا بودن نقطه وسط پاره‌خط است.



متوسط

-۱۱

می‌دونیم که نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) است پس کافیست k رو پیدا کنیم.

$$1) \begin{cases} 3, 4, 6 \\ 4, 2, x \end{cases} \times$$

$$2) \begin{cases} 3, 4, 6 \\ 2, x, 4 \end{cases} \checkmark$$

$$\frac{3}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{3}, k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{2}$$

متوسط

-۱۲

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

$$AB^2 = AH \cdot AC$$

$$x^2 = (x-2)(x-4+x) \Rightarrow x^2 = 2x^2 - 4x$$

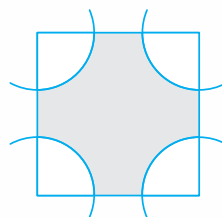
$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ق ق } \times \\ x=4 \end{cases}$$

$$BH^2 = AH \cdot HC = (2)(6) = 12 \Rightarrow BH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

متوسط

-۱۴

فاصله از رئوس، دایره‌هایی به شعاع ۱ و به مرکز رئوس است.



ناحیه موردنظر ناحیه هاشور خورده در شکل است. مساحت اون هم میشه

مساحت مربع منهای ۴ تا ربع دایره یعنی یک دایره کامل به شعاع ۱:

$$S_{\text{هاشور خورده}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = 4^2 - \pi(1)^2 = 16 - \pi$$

آسان

-۵

خطها با هم موازی‌اند پس به کمک تالس در دوزنقه داریم:

$$\frac{2x+1}{x+5} = \frac{2x}{x+3} \Rightarrow (2x+1)(x+3) = 2x(x+5)$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^2} + 6x + x + 3 = \cancel{2x^2} + 10x \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow \boxed{x=1}$$

متوسط

-۶

$$OB^2 = OA \cdot OE$$

بازم قضیه زورو Z:

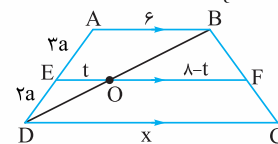
$$e^2 = 2(6+BE) \Rightarrow 36 = 12 + 2BE \Rightarrow 24 = 2BE \Rightarrow BE = 12$$

دشوار

-۷

$$r_{DE} = r_{AE} = r_a \Rightarrow \begin{cases} DE = r_a \\ AE = r_a \end{cases}$$

فرض کن:



$$\Delta DAB: \frac{r_a}{\delta a} = \frac{OE}{AB} \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{r}{\delta} \Rightarrow t = \frac{12}{\delta} \Rightarrow OF = \frac{28}{\delta}$$

$$\frac{OD}{BD} = \frac{r}{\delta} \Rightarrow \frac{3}{\delta} = \frac{OB}{DB} \Rightarrow \frac{3}{\delta} = \frac{\delta}{x} \Rightarrow x = \frac{\delta \times \frac{28}{\delta}}{3} = \frac{28}{3}$$

متوسط

-۸

طبق فرمولی که قبلاً به دست آوردیم:

$$\left. \begin{aligned} MN &= \frac{a+b}{2} \\ PQ &= \frac{a-b}{2} \end{aligned} \right\} \text{ از اون جایی که } MN \text{ وسط قاعده‌ها رسم شده:}$$

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

آسان

۴- گزینه «۲»

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{10-x}{x} = \frac{8}{4}$$

$$\Rightarrow 2x = 10 - x \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

متوسط

۵- گزینه «۱»

$$HH' \parallel AB \Rightarrow \frac{HH'}{AB} = \frac{CH}{BC} \quad (\text{جزء به کل})$$

$$\frac{HH'}{3} = \frac{4-x}{4} \Rightarrow HH' = \frac{3}{4}(4-x)$$

$$\Delta BH'C: (HH')^2 = BH \times HC \Rightarrow \left[\frac{3}{4}(4-x)\right]^2 = x(4-x)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16}(4-x)^2 = x(4-x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{16}(4-x) = x \Rightarrow 36 - 9x = 16x \\ 4-x = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ غ قق} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{36}{25} \Rightarrow x = 1.44$$

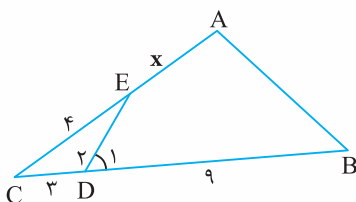
متوسط

۶- گزینه «۱»

$$\begin{cases} \hat{D}_1 + \hat{A} = 180^\circ \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_r = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}_r$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D}_r \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ECD \Rightarrow \frac{ED}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{9+3}{3}} = \frac{3}{4+x} \Rightarrow 4+x=9 \Rightarrow x=5$$



آسان

۷- گزینه «۲»

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ متقابل به راس} \end{cases} \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta BCE$$

$$\text{فیثاغورس} \Rightarrow CE^2 = BE^2 + BC^2 \Rightarrow 4 = 1 + BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

آسان

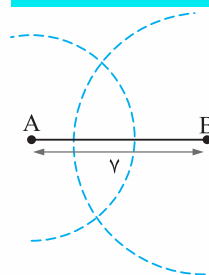
۸- گزینه «۳»

$$K^2 = \frac{49}{128} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{49}{128}} = \frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{21}{a} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{2} \times 21}{7} = 24\sqrt{2}$$

متوسط

۱۳-



یادت هست که!

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه به یک فاصله مشخص باشند، دایره بود پس به مرکز B و شعاع 7 و همچنین به مرکز A و شعاع 5 دو دایره می‌زنیم محل‌های برخورد آن‌ها دو نقطه هست که جواب‌های مسأله هستند.

متوسط

۱۴-

$$\Delta ABH: x^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow x = 16$$

$$12^2 = x \cdot y \Rightarrow 144 = 16 \times y \Rightarrow y = 9$$

$$z^2 = y(y+x) = 9(25) \Rightarrow z = 3(5) = 15$$



آسان

۱- گزینه «۳»

برای این که دو کمان همدیگر را قطع کنند، باید دهانهٔ پرگار بیشتر از نصف

AB باز شود یعنی بیشتر از $\frac{5}{2}$.

آسان

۲- گزینه «۲»

فاصله از یک نقطه همیشه نشان دهنده مکان هندسی مربوط به دایره است.

آسان

۳- گزینه «۳»

M روی عمودمنصف است پس:

$$MA = MB$$

$$x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, 2 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$\hat{HMB} = 45^\circ \Rightarrow MH = HB = a$$

$$\Delta MHB: a^2 + a^2 = 4^2 \Rightarrow 2a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 8$$

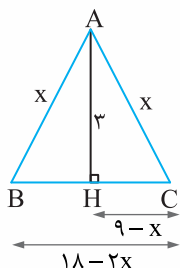
$$\Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2HB = 4\sqrt{2}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۴»

$$\triangle AHC: x^2 = 3^2 + (9-x)^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 81 - 18x + x^2$$

$$\Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow BC = 18 - 10 = 8$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$DD' \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AD'}{AC} = \frac{DD'}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DD'}{8} = \frac{1}{3} \Rightarrow DD' = \frac{8}{3}$$

$$EE' \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EE'}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EE'}{8} = \frac{2}{3} \Rightarrow EE' = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow DD' + EE' = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8$$

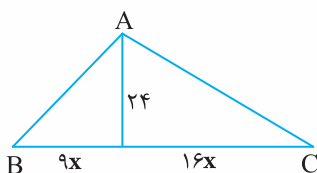
متوسط

۱۵- گزینه «۳»

$$AH^2 = BH \times CH$$

$$24^2 = (9x)(16x) \Rightarrow x^2 = \frac{24 \times 24}{9 \times 16} = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow BC = 9(2) + 16(2) = 50$$



آسان

۱۶- گزینه «۳»

در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴)، تشابه مثلث‌ها را به حالت برابری دو زاویه داریم.

آسان

۱۷- گزینه «۳»

$$\triangle ABC \sim \triangle CDE \begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases}$$

$$k = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

دشوار

۹- گزینه «۳»

$$AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{MN}{BM} \quad (1)$$

$$EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \quad (2)$$

با تقسیم تناسب (۱) به تناسب (۲) داریم:

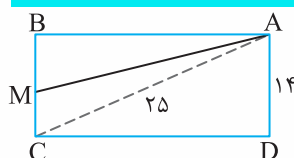
$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{AE}{AC}} = \frac{\frac{MN}{BM}}{\frac{MN}{MC}} \Rightarrow \frac{AD \times AC}{AB \times AE} = \frac{MC \times \cancel{MN}}{BM \times \cancel{MN}}$$

$$\xrightarrow{MB=MC} \frac{AD \times AC}{AB \times AE} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{AB = \frac{2}{3}AC} \frac{\frac{2}{3}AC}{AC} = \frac{2}{3}$$

دشوار

۱۰- گزینه «۲»



$$CD^2 = 25^2 - 14^2 = 429$$

$$CD = \sqrt{429}$$

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{AMCD}} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_{ABM}}{S_{AMCD} + S_{AMB}} = \frac{5}{5+9}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AB \times BM}{\frac{1}{2}AB \times AD} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}BM}{\frac{1}{2}14} = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}BM = 5 \Rightarrow BM = 10 \Rightarrow AM^2 = 10^2 + (\sqrt{429})^2 = 529$$

$$\Rightarrow AM = 23$$

متوسط

۱۱- گزینه «۳»

در چنین مقایسه‌هایی کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اضلاع را با هم مقایسه کن و سپس ضلع متوسط رو پیدا کن و مقایسه کن.

در گزینه ۳، با نسبت تشابه $(k=3)$ ، طول اضلاع با اضلاع مسأله متناسب هستند.

آسان

۱۲- گزینه «۱»

گزینه ۱ درست است.

اگر زوایای غیرقائم از دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشند، مثلث‌ها به حالت دو زاویه متشابه می‌شوند.



۱- گزینه «۴»

$$\frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}} = 4 \Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{AMN}}{S_{AMN}} = 4 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} - 1 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = 5$$

از طرفی طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌های AMN و ABC متشابه‌اند پس اگر نسبت تشابه k باشد:

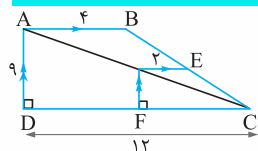
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = k^2 \Rightarrow k^2 = 5 \Rightarrow k = \sqrt{5}$$

که همان نسبت دو قاعده دوزنقه است ولی در گزینه ۶ نیست.

اما عکس این نسبت $\frac{\sqrt{5}}{5}$ یعنی گزینه ۴ است که می‌تواند جواب مسأله باشد

چون ذکر نکرده نسبت کدام قاعده به کدام قاعده.

۲- گزینه «۳»



$$OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OE}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$OF \parallel AD \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OF}{AD} = \frac{FC}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} FC = FD = 6 \\ OF = \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{DFOA} = \frac{(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}) \times 6}{2} = \frac{81}{2}$$

۳- گزینه «۱»

نقطه D روی نیمساز زاویه A است پس $DH = DH'$ و داریم:

$$x^2 - 5 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$x = 6 \Rightarrow AC = 10, AB = 8$$

طبق قضیه‌ای داریم نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، ضلع روبه‌رو را به نسبت

اضلاع قطع می‌کند یعنی:

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{8}{10}$$

آسان

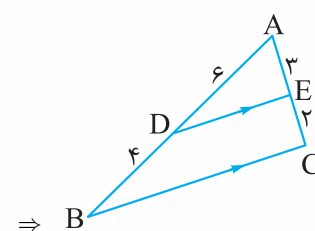
۱۸- گزینه «۳»

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{5x+1}{5x-1} = \frac{3x}{3x-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{5x+1-5x+1}{5x-1} = \frac{3x-3x+1}{3x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5x-1} = \frac{1}{3x-1} \Rightarrow 6x-2=5x-1$$

$$x = 1$$



$$\frac{DE}{BC} = \frac{6}{4+6} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{5}{3}$$

آسان

۱۹- گزینه «۴»

قضیه‌ای رو می‌تونیم به صورت دوشرطی بنویسیم که عکس قضیه هم برقرار

باشد. اما در گزینه ۴ عکس قضیه برقرار نیست زیرا هر چهارضلعی که

قطرهاش همدیگر را نصف کنند، لزوماً متوازی‌الاضلاع نیست.

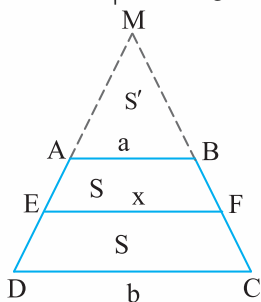
آسان

۲۰- گزینه «۴»

تنها عدد صحیح که در $\sqrt{2}$ ضرب شود و صحیح است صفر می‌باشد.

۷- گزینه «۴»

اگر دو ساق دوزنقه رو امتداد بدیم، طبق قضیه اساسی تشابه داریم:



$$\triangle MAB \sim \triangle MEF \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MEF}} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \Rightarrow \frac{S'}{S' + S} = \frac{a^2}{x^2} \quad (1)$$

$$\triangle MEF \sim \triangle MDC \Rightarrow \frac{S_{MEF}}{S_{MDC}} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{S' + S}{S' + 2S} = \frac{x^2}{b^2} \quad (2)$$

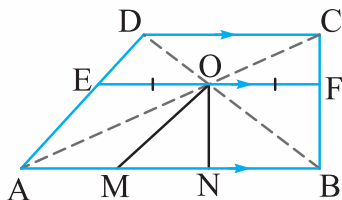
$$\frac{(1), (2)}{\frac{S'}{S' + S} + \frac{S' + 2S}{S' + S} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{2(S' + S)}{S' + S} = \frac{a^2 + b^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

۸- گزینه «۱»

از نقطه O یعنی محل تلاقی قطرهای دوزنقه، پاره‌خطی موازی قاعده‌های دوزنقه رسم می‌کنیم. در این صورت $OE = OF$ و بنابراین چهارضلعی‌های AMOE و BNOF متوازی‌الاضلاع هستند. پس $AM = OE$ و $BN = OF$ و در نتیجه $AM = BN$ پس:

$$\frac{AM}{BN} = 1$$



۹- گزینه «۳»

$$\triangle GEC \xrightarrow{\text{تالس}} FA = 2K, AB = 5K$$

از طرفی دو مثلث GAB و GAF هم‌ارتفاع هستند پس:

$$\frac{S_{GAF}}{S_{GAB}} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{GAF} = \frac{2}{5} S_{GAB} \quad (1)$$

$$\triangle GDC: \frac{S_{GAB}}{S_{GDC}} = \left(\frac{GA}{GD}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

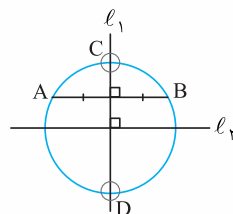
$$\xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{S_{GAB}}{S_{GDC} - S_{GAB}} = \frac{4}{9 - 4} \Rightarrow \frac{S_{GAB}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S_{GAB} = \frac{4}{5} S_{ABCD} \xrightarrow{(1)} S_{GAF} = \frac{2}{5} \left(\frac{4}{5} S_{ABCD}\right) = \frac{8}{25} S_{ABCD}$$

که ۳۲ درصد مساحت دوزنقه است.

۱۴- گزینه «۴»

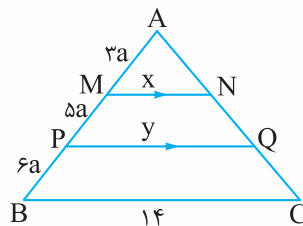
هرگاه عمودمنصف وتری از دایره رو رسم کنیم از مرکز دایره رد میشه و بنابراین قطری از دایره است. اگر محل برخورد رو با C و D نشون بدیم، عمودمنصف پاره‌خط CD از مرکز دایره می‌گذره و چون عمود بر ℓ_1 هست، موازی AB میشه.



۵- گزینه «۲»

$$\frac{r}{3} = \frac{s}{\Delta} = \frac{t}{\epsilon} = a \Rightarrow \begin{cases} r = 3a \\ s = \Delta a \\ t = \epsilon a \end{cases}$$

$$\frac{AM}{AP} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{3a}{\Delta a} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{\Delta}$$



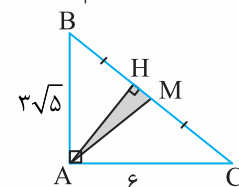
$$\frac{AP}{AB} = \frac{y}{14} \Rightarrow \frac{\Delta a}{14 \Delta a} = \frac{y}{14} \Rightarrow y = \Delta \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow x + y = \Delta + 3 = 11$$

۶- گزینه «۴»

$$BC^2 = (3\sqrt{5})^2 + 6^2 = 81 \Rightarrow BC = 9$$

$$BM = \frac{9}{2} = CM = AM$$



$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 9 = 3\sqrt{5} \times 6 \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

$$MH^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - (2\sqrt{5})^2 = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4} \Rightarrow MH = \frac{1}{2}$$

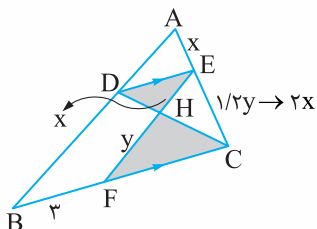
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{5}}{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2}} = 18$$

۱۲- گزینه ۱»

$$3y = 5x \Rightarrow y = \frac{5}{3}x$$

$$EC = \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}x \right) = \frac{5}{6}x$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = \frac{1}{3}BC$$



$$\triangle DEH \sim \triangle HFC \Rightarrow \frac{DE}{FC} = \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow DE = \frac{3}{5}FC$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}FC = \frac{1}{3}BC \Rightarrow BC = \frac{9}{5}FC$$

$$\xrightarrow{BC=FC+3} FC + 3 = \frac{9}{5}FC$$

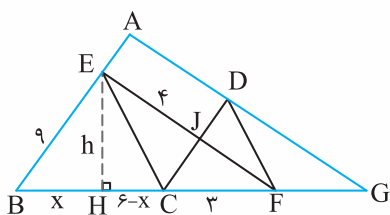
$$\Rightarrow 3 = \frac{4}{5}FC \Rightarrow FC = \frac{15}{4} \Rightarrow BC = \frac{15}{4} + 3 = \frac{27}{4} = 6.75$$

۱۳- گزینه ۴»

$$\triangle FBE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{BC} = \frac{FJ}{EJ} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{FJ}{4} \Rightarrow FJ = 2 \Rightarrow EF = 6$$

$$\begin{cases} \angle FDC = \angle ECD \\ \angle CEF = \angle FED \end{cases} \Rightarrow \triangle FDJ \sim \triangle FJC$$

پس برای محاسبه DF کافیست EC رو به دست بیاریم.



$$\triangle EHC : EC^2 = (6-x)^2 + h^2$$

$$\triangle EHF : h^2 + (9-x)^2 = 6^2$$

$$\triangle EHB : h^2 + x^2 = 9^2 \Rightarrow h^2 = 81 - x^2 \quad (1)$$

$$h^2 + (9-x)^2 = 36 \xrightarrow{(1)} 81 - x^2 + 81 - 18x + x^2 - 18x = 36$$

$$\Rightarrow 162 - 18x = 36 \Rightarrow 18x = 126 \Rightarrow \boxed{x=7}$$

$$h^2 = 81 - 7^2 = 81 - 49 = 32 \Rightarrow (6-x)^2 + h^2 = EC^2$$

$$\Rightarrow EC^2 = (6-7)^2 + 32 \Rightarrow EC^2 = 33 \Rightarrow EC = \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DF}{\sqrt{33}} = \frac{1}{2} \Rightarrow DF = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

۱۰- گزینه ۳»

طبق تشابه مثلث‌ها، داریم:

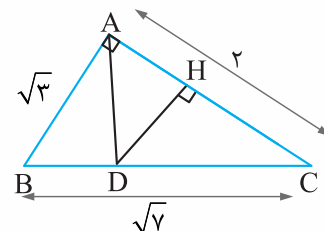
$$\triangle ABC \sim \triangle ADC \sim \triangle ABD \sim \triangle HDC$$

$$\triangle ABC \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} BC^2 = 3 + 4 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\triangle ABC \xrightarrow{\text{رابطه طولی در } \triangle ABC} AD \times BC = AB \times AC \Rightarrow \sqrt{7}AD = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$\triangle ADC \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} DC^2 = 2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)^2 = \frac{16}{7} \Rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{7}}$$



$$\frac{S_{HDC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

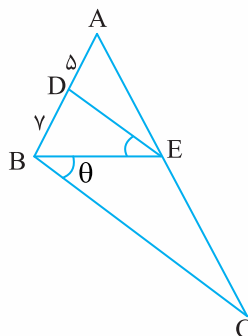
$$\frac{S_{HDC}}{S_{ABD}} = \frac{16}{21}$$

۱۱- گزینه ۴»

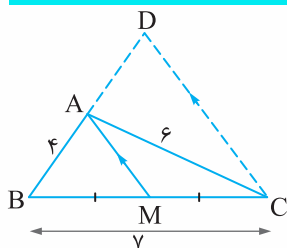
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{DE}{BC} = \frac{5}{5+7} = \frac{5}{12} \quad (1)$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی و مورب}} \angle DEB = \angle EBC$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2}BE \times BC \times \sin \theta}{\frac{1}{2}BE \times DE \times \sin \theta} = \frac{BC}{DE} \xrightarrow{(1)} \frac{12}{5} = 2.4$$



۱۸- گزینه «۲»

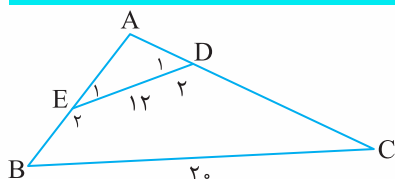


$$AM \parallel DC \xrightarrow{\text{تالسی}} \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{BM=MC} 1 = \frac{4}{AD}$$

$$\Rightarrow AD = 4$$

$$BD = AB + AD = 4 + 4 = 8$$

۱۹- گزینه «۲»



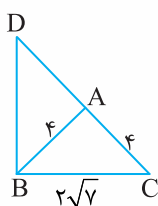
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B} + \hat{D}_r = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_r = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1 \\ \hat{C} + \hat{E}_r = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}_1 \\ \hat{E}_1 + \hat{E}_r = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \sim ADE$$

$$k = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC} - S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{25 - 9}{25} \Rightarrow \frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}} = \frac{16}{25} = 0.64$$

۲۰- گزینه «۳»

مثلث BDC قائم الزاویه است زیرا میانه AB نصف DC است.

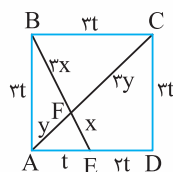


$$\Delta BDC: BD^2 = DC^2 - BC^2 = 1^2 - (2\sqrt{3})^2 = 1 - 12 = -11 \Rightarrow BD = 6$$

۱۴- گزینه «۱»

$$AE = t \Rightarrow ED = rt \Rightarrow AD = rt$$

$$\Delta BFC \sim \Delta AEF \Rightarrow \frac{BC}{AE} = r \Rightarrow FC = rFA, FB = rFE$$



$$\Delta ABE: BE^2 = AE^2 + AB^2 \Rightarrow BE^2 = t^2 + (rt)^2 = 1 \cdot t^2 \Rightarrow BE = \sqrt{1} \cdot t$$

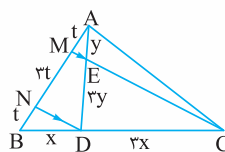
$$\Delta ACD: AC^2 = CD^2 + AD^2 = (rt)^2 + (rt)^2 = 18t^2 \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}t$$

$$\frac{EF}{AF} = \frac{x}{y} = \frac{rx}{ry} = \frac{BE}{AC} = \frac{\sqrt{1} \cdot t}{3\sqrt{2}t} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۱۵- گزینه «۳»

$$BD = \frac{1}{4}BC \Rightarrow BC = 4BD \Rightarrow BD = x, DC = 3x$$

$$AD = 4AE \Rightarrow AE = y, ED = 3y$$



$$\Delta AND: \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{3} \Rightarrow AM = t, MN = 3t$$

$$\Delta BMC: \frac{BN}{NM} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow BN = t$$

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM + MN + NB}{AM} = \frac{5t}{t} = 5$$

۱۶- گزینه «۴»

$$3AP = 9 \Rightarrow AP = 3, BP = 9 \Rightarrow AB = 12$$

$$AP = DH = 3, PB = HC = 9$$

$$PD^2 = DH \times DC = 3 \times 12 = 36 \Rightarrow PD = 6$$

۱۷- گزینه «۲»

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{3x}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad (1)$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \Delta AEF \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9} \quad (2)$$

با تقسیم تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}} = \frac{1}{5}$$