

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورهای}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{دو واحد به طرف راست}} h(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x+2} \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غشقی (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ x = 1 & \text{قشقی} \end{cases}$$

۲ - گزینه ۴ ابتدا دامنه تابع $y = f(x)$ را می‌یابیم:

$$-1 \leq x \leq 3 \rightarrow -2 \leq 2x \leq 6 \rightarrow -3 \leq 2x-1 \leq 5$$

حال به کمک دامنه تابع $y = f(x)$ به دامنه $h(x) = f(3x+2)$ می‌رسیم.

$$-3 \leq 3x+2 \leq 5 \rightarrow -5 \leq 3x \leq 3 \rightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq 1$$

۳ - گزینه ۲ با نوشتن رابطه تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^2 + 3x + 2)q(x) + 2x + 1 = (x+1)(x+2)q(x) + 2x + 1 \quad (1)$$

حال برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $p(x-1) - p(x-2)$ بر x داریم:

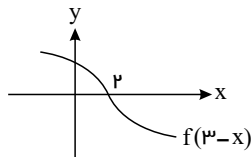
$$x=0 \Rightarrow \text{باقی‌مانده} = p(0-1) - p(0-2) = p(-1) - p(-2)$$

$$(1) \Rightarrow p(-1) = 0 + 2(-1) + 1 = -1, \quad p(-2) = 0 + 2(-2) + 1 = -3$$

$$\text{باقی‌مانده} = p(-1) - p(-2) = -1 - (-3) = 2$$

۴ - گزینه ۲ f اکیداً صعودی و $y = 3-x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(3-x)$ اکیداً نزولی است. چون $f(1) = 0$ است، $x=1$ صفر تابع $f(x)$ و $x=2$ صفر تابع $f(3-x)$ است.

پس به‌طور نمادین تابع $f(3-x)$ به‌صورت مقابل است.



$$g(x) = \sqrt{\frac{x-4}{f(3-x)}} \Rightarrow \frac{x-4}{f(3-x)} \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

x	$-\infty$	۲	۴	$+\infty$
$x-4$	-	-	○ +	+
$f(3-x)$	+	○ -	-	-
$\frac{x-4}{f(3-x)}$	-	○ +	○ -	-

۴ و ۳: اعداد صحیح $\Rightarrow 2 < x \leq 4$

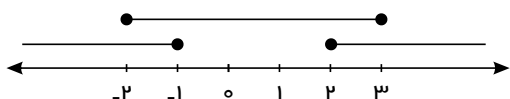
۵ - گزینه ۲ ابتدا x ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$f: \{(-4, 2), (3, m^2 - m), (4, m^2 - m), (5, 6)\}$$

می‌دانیم در تابع صعودی اگر $x_1 < x_2$ باشد آن‌گاه $f(x_1) \leq f(x_2)$ است پس:

$$2 \leq m^2 - m \leq 6 \rightarrow \begin{cases} m^2 - m \geq 2 \rightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \rightarrow (m-2)(m+1) \geq 0 \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m \leq -1 \text{ یا } m \geq 2 \quad (I) \\ m^2 - m \leq 6 \rightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \rightarrow (m-3)(m+2) \leq 0 \\ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq m \leq 3 \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک جواب‌های (I) و (II) داریم:



$$\rightarrow m \in [-2, 3] - (-1, 2)$$

۶ - گزینه ۳

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + ax - 1, \quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$p(1) = 1 - 3 + a - 1 = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow p(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 1$$

حال با نوشتن رابطه تقسیم داریم:

$$p(x) = (x - 1)q(x) + 2 \xrightarrow{x=-1} p(-1) = -2q(-1) + 2 \quad (1)$$

$$p(-1) = -1 - 3 - 5 - 1 = -10 \xrightarrow{(1)} -10 = -2q(-1) + 2 \Rightarrow q(-1) = 6$$

۷ - گزینه ۳ در تابع نزولی به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به دامنه اگر $x_1 < x_2$ باشد آن گاه $f(x_1) \geq f(x_2)$ است. برای تعیین دامنه تعریف توابع رادیکالی با فرجه زوج کافی است زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار دهیم.

$$f(2) - f(|x - 1|) \geq 0 \rightarrow f(2) \geq f(|x - 1|) \xrightarrow{f \text{ نزولی است}} 2 \leq |x - 1|$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 2 \rightarrow x \geq 3 \\ \text{یا} \\ x - 1 \leq -2 \rightarrow x \leq -1 \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

۸ - گزینه ۳ اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه $a \geq b$ است. پس داریم:

$$f(x - 3) \leq f(3x + 7) \Rightarrow x - 3 \geq 3x + 7 \Rightarrow -7 - 3 \geq 3x - x \Rightarrow 2x \leq -10 \Rightarrow x \leq -5$$

۹ - گزینه ۱ چون $P(x)$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است پس $P(\frac{1}{2}) = 0$ است.

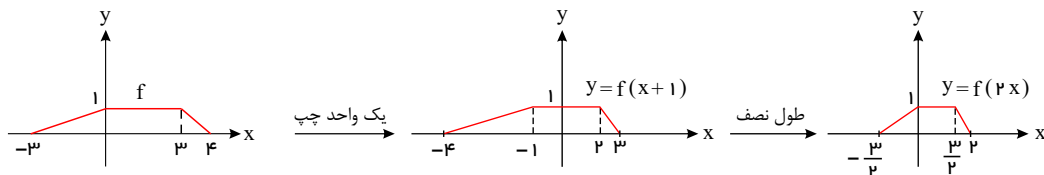
$$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{16}) + a(\frac{1}{8}) + 2(\frac{1}{4}) - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 - 12 = 0 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$ است. اکنون برای پیدا کردن باقی مانده آن بر $x + 2$ کافی است که $P(-2)$ را حساب کنید.

$$P(-2) = 2(16) + 7(-8) + 2(4) - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۱۰ - گزینه ۳

برای رسم $f(x + 1)$ باید $f(x)$ را یک واحد به چپ منتقل کنیم، همچنین برای رسم $f(2x)$ باید طول نقاط $f(x)$ را بر ۲ تقسیم کنیم، پس داریم:



$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{یک واحد چپ} & \text{طول نصف} \end{matrix}$$

$$\rightarrow S = \frac{(4.5 + 2) \times 1}{2} = \frac{6.5}{2} = \frac{13}{4}$$

۱۱ - گزینه ۳ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$A^5 + 5A + 2I = \bar{O} \Rightarrow A(A + 5I) = -2I$$

$$\rightarrow \frac{A(A + 5I)}{-2} = I \rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{2}(A + 5I)$$

۱۲ - گزینه ۲

A^{-1} را از سمت چپ در رابطه ماتریسی ضرب می کنیم:

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} \underbrace{A^{-1}AX}_I = A^{-1}(A - 2I) \Rightarrow X = A^{-1}A - 2A^{-1}I$$

$$\Rightarrow X = I - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \times \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۳ - گزینه ۲ مطابق فرض داریم:

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3m - 4 = x \\ 2m = y \rightarrow m = 1 \end{cases}$$



$$\rightarrow 3(1) - 4 = x \rightarrow x = -1$$

۱۴ - گزینه ۱

می‌دانیم برای ماتریس مربعی و وارون‌پذیر X رابطه $X \cdot X^{-1} = I$ برقرار است، پس داریم:

$$(A - I)(A - I)^{-1} = I \rightarrow A(A - I)^{-1} - I(A - I)^{-1} = I$$

$$\rightarrow A(A - I)^{-1} = I + (A - I)^{-1}$$

$$\rightarrow A(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۵ - گزینه ۱

$$2 \times y + y - 3x + 5 = 0 \Rightarrow y(2x + 1) = 3x - 5 \Rightarrow y = \frac{3x - 5}{2x + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 22-x+1 \mid 3x-5 \xrightarrow{\times 2} 2x+1 \mid 6x-10 \\ 2x+1 \mid 2x+1 \xrightarrow{\times 2} 2x+1 \mid 6x+3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x+1 \mid 13$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 13 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 1 \\ 2x+1 = -13 \Rightarrow x = -7 \\ 2x+1 = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 2x+1 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

بنابراین فقط یک نقطه با مختصات طبیعی روی این منحنی وجود دارد.

۱۶ - گزینه ۲ اگر a بر b بخش‌پذیر باشد آنگاه a^2 بر b^2 بخش‌پذیر است.

$$7 \mid 3n+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 49 \mid 9n^2+12n+4$$

از طرفی طبق صورت سؤال می‌دانیم $9n^2 - 9n + m$ نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر است. می‌دانیم اختلاف دو عددی که بر ۴۹ بخش‌پذیر هستند نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر است پس $(9n^2 - 9n + m) - (9n^2 + 12n + 4) = 49 \mid 21n + 4 - m$ بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

$$49 \mid 21n + 4 - m$$

حال سعی می‌کنیم عامل n را حذف کنیم:

$$7 \mid 3n+2 \xrightarrow{\text{مقسوم و مقسوم‌علیه را ضرب در ۷ می‌کنیم.}} 49 \mid 21n + 14$$

$$49 \mid 21n + 4 - m \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر است.}} 49 \mid 10 + m$$

از بین گزینه‌ها تنها اگر $m = -10$ باشد، بخش‌پذیری برقرار است.

۱۷ - گزینه ۲

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-3)(-1) - 4 \times 2} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \beta - \alpha & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow 2\alpha = \frac{2}{5} \rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\beta - \alpha = \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha = \frac{1}{5}} \beta - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \rightarrow \beta = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$$

۱۸ - گزینه ۲

$$a = 15q + 7 \xrightarrow{\text{۴ واحد به طرفین اضافه می‌کنیم.}} a + 40 = 15q + 47 \Rightarrow a + 40 = 15(\underbrace{q+3}_{q'}) + 2 \Rightarrow a + 40 = 15q' + 2$$

خارج‌قسمت ۳ واحد افزایش و باقیمانده ۵ واحد کاهش یافته است.

۱۹ - گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 9a + 4 \xrightarrow{\times 4} d \mid 36a + 16 \\ d \mid 4a - 5 \xrightarrow{\times 9} d \mid 36a - 45 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخش‌پذیر است.}} d \mid 16 + 45 \Rightarrow d \mid 61$$

پس: $d \in \{1, 61\}$



دو عددی که نسبت به هم اول نیستند یعنی ب.م.م آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. پس $d = 61$ حال می‌خواهیم a را پیدا کنیم:

$$\frac{d|9a+4}{d|4a-5} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بردیشپذیر است.}} \frac{d|5a+9}{d|4a-5} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بردیشپذیر است.}} d|a+14$$

سپس $a+14$ دنبال کوچک‌ترین عدد سه رقمی هستیم پس 61 را ضربدر دو می‌کنیم که عددی سه رقمی بسازیم:

$$2 \times 61 = 122 = a + 14 \Rightarrow a = 122 - 14 = 108 \rightarrow \text{رقم یکانش 8 است.}$$

۲۰ - گزینه ۳

$$(3a + 5, a^2 - 3a) = d \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d|3a + 5 \xrightarrow{\times a} d|3a^2 + 5a \\ d|a^2 - 3a \xrightarrow{\times 3} d|3a^2 - 9a \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d|14a \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d|14a \xrightarrow{\times 3} d|42a \\ d|3a + 5 \xrightarrow{\times 14} d|42a + 70 \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} d|70 \rightarrow d|2 \times 5 \times 7$$

در بین مقسوم‌علیه‌های طبیعی d ، عدد ۷ بزرگ‌ترین مقدار اول می‌باشد.

۲۱ - گزینه ۳

$$\Delta x = \frac{v+v_0}{2} \Delta t \Rightarrow 0 - 12 = \frac{0+v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = -6 \text{ m/s}$$

با توجه به شکل سهمی و اینکه رأس سهمی در $t = 4$ است، سرعت در $t = 8$ s هم‌اندازه سرعت در لحظه صفر است، پس: $v = +6 \text{ m/s}$

۲۲ - گزینه ۳ ابتدا دمای نهایی آب را به دست می‌آوریم.

$$Q = mc\Delta\theta \rightarrow -294000 = 2 \times 4200 \Delta\theta \rightarrow \Delta\theta = -35^\circ \text{C}$$

$$\theta - 40 = -35 \rightarrow \theta = 5^\circ \text{C} \quad \text{یعنی درنهایت آب } 5^\circ \text{C} \text{ خواهیم داشت.}$$

$$\text{آب } 40^\circ \text{C} \xleftarrow{m} \text{آب } 5^\circ \text{C} \xrightarrow{m'} \text{آب } 0^\circ \text{C} \xrightarrow{m'} \text{یخ } 0^\circ \text{C} \xrightarrow{m'} \text{یخ } -5^\circ \text{C}$$

$$m'c_i\Delta\theta + m'L_F + m'c\Delta\theta + mc\Delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow m' \times 2100(5) + m'(336000) + m'(4200)(5) - 294000 = 0 \Rightarrow m' = 0.8 \text{ kg} = 800 \text{ g}$$

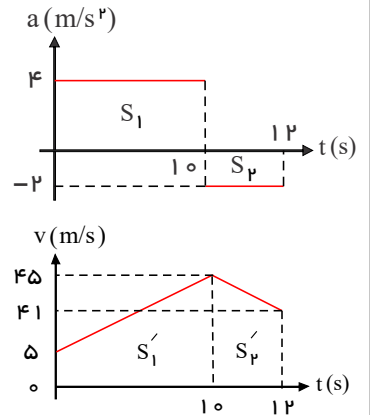
۲۳ - گزینه ۴ برای حل این تست بهترین روش رسم نمودار سرعت - زمان از روی نمودار شتاب - زمان می‌باشد.

$$S_1 = \frac{\Delta v}{(0-10)} = v_{10} - v_0 \Rightarrow 40 = v_{10} - 0 \Rightarrow v_{10} = 40$$

$$S_2 = \frac{\Delta v}{(10-12)} = v_{12} - v_{10} \Rightarrow -4 = v_{12} - 40 \Rightarrow v_{12} = 44$$

$$\Delta x = S'_1 + S'_2 = \frac{(0+40) \times 10}{2} + \frac{(40+44) \times 2}{2} = 336 \text{ m}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{336}{12} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



۲۴ - گزینه ۴ در مدت زمان واکنش راننده (t_1) متحرک با سرعت ثابت ($v = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) حرکت می‌کند و در مدت زمان ترمز (t_2) اتومبیل با شتاب ثابت (کندشونده) حرکت می‌کند.

$$v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v = 0$$

$$\Delta x_1, t_1 \quad \Delta x_2, t_2, a_2 = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

شتاب‌دار با شتاب ثابت حرکت یکنواخت ($a = 0$)

$$\Delta x_{\text{کل}} = 165 \text{ m}$$

ابتدا جابه‌جایی متحرک در مرحله دوم را با استفاده از رابطه $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ محاسبه می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 900 = 2(-30)\Delta x \Rightarrow \Delta x_2 = 150 \text{ m}$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 165 \text{ m} \Rightarrow \Delta x_1 + 150 = 165 \Rightarrow \Delta x_1 = 15 \text{ m}$$

$$\Delta x_1 = vt_1 \Rightarrow 15 = 30t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \text{ s}$$



برای محاسبه زمان حرکت متحرک در مرحله دوم از معادله $v = at + v_0$ استفاده می‌کنیم.

$$v = at_2 + v_0 \xrightarrow[v_0 = 30]{v=0} 0 = (-3)t_2 + 30 \Rightarrow t_2 = 10s$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ برابر است با: } \frac{t_2}{t_1}$$

۲۵ - گزینه ۳ در اینجا چون ظرف در ابتدا، از مایع پر شده، حجم مایع بیرون ریخته که آن را با ظاهر $\Delta V_{\text{ظرف}}$ نشان داده‌ایم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta V_{\text{ظرف}} = \Delta V_{\text{مایع}} - \Delta V_{\text{ظرف}} = [V_1(\beta)\Delta\theta]_{\text{مایع}} - [V_1(3\alpha)\Delta\theta]_{\text{ظرف}} \Rightarrow 12 = V_1(\beta - 3\alpha) \cdot \Delta\theta$$

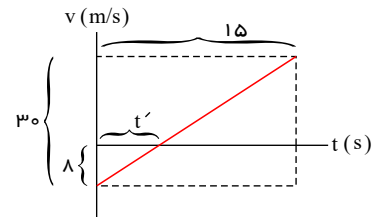
$$\Rightarrow 12 = 1000 \times (\beta - 3\alpha) \times (80 - 0) \Rightarrow \beta - 3\alpha = \frac{12}{1000 \times 80} = \frac{3}{2} \times 10^{-4} K^{-1} = 1,5 \times 10^{-4} K^{-1}$$

$$\Rightarrow 1,8 \times 10^{-4} - 3\alpha = 1,5 \times 10^{-4} \Rightarrow 3\alpha = 0,3 \times 10^{-4} \Rightarrow \alpha = 10^{-5} K^{-1}$$

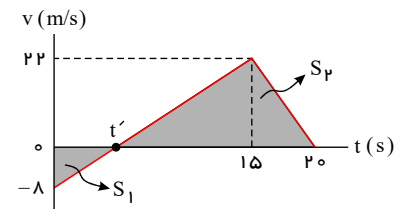
۲۶ - گزینه ۴ در ابتدا لحظه تلاقی نمودار با محور زمان (t') که همان لحظه تغییر جهت نیز هست را می‌یابیم.

توجه: برای یافتن t' چندین روش وجود دارد. مثلاً می‌توان از قضیه تالس هم کمک گرفت (یا از شیب خط استفاده کرد).

$$\frac{t'}{15} = \frac{8}{30} \Rightarrow \boxed{t' = 4s}$$



قدرمطلق سطح زیر نمودار $v - t$ ، برابر مسافت پیموده شده است.



$$\left. \begin{aligned} |S_1| &= \frac{8 \times 4}{2} = 16 \\ S_2 &= \frac{22 \times (20 - 4)}{2} = 176 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{مسافت کل}} 16 + 176 = 192m$$

۲۷ - گزینه ۴

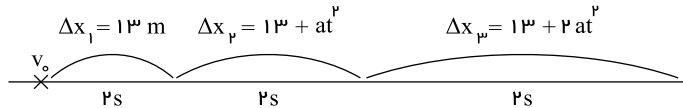
اگر جرم آب، m و جرم مقداری از یخ که ذوب می‌شود را m' فرض کنیم، می‌توان گفت گرمایی که آب $50^\circ C$ از دست می‌دهد تا به آب صفر درجه سلسیوس تبدیل شود، صرف ذوب شدن یخ صفر درجه می‌شود. یعنی:

$$\left. \begin{aligned} m + m' &= 520 \Rightarrow m' = 520 - m \\ mc\Delta\theta &= m' L_F \Rightarrow m \times 4,2 \times 50 = (520 - m) \times 336 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = 320g$$

۲۸ - گزینه ۱

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت در ابتدا یک خط راست، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی، تشکیل یک دنباله با قدر نسبت at^2 می‌دهند. به عبارتی داریم:



$$\Delta x_2 = 13 + 2at^2 \xrightarrow[t=2s]{\Delta x_2 = 25m} 25 = 13 + 8a \Rightarrow a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$t = 2s \Rightarrow \Delta x (\text{دو ثانیه اول}) = 2a + 2v_0 = 13 \Rightarrow a + v_0 = 6,5(I)$$

$$\begin{cases} t = 4s \Rightarrow \Delta x_4 = 8a + 4v_0 \\ t = 6s \Rightarrow \Delta x_6 = 18a + 6v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x (\text{دو ثانیه سوم}) = \Delta x_6 - \Delta x_4 = 10a + 2v_0 = 25 \Rightarrow 5a + v_0 = 12,5(II)$$

$$I, II \Rightarrow 4a = 12,5 - 6,5 \Rightarrow a = 1,5 \frac{m}{s^2}$$

۲۹ - گزینه ۴

(جرم آب یخ بسته (m') آب صفر درجه $\xleftarrow{Q_1}$ یخ صفر درجه $\xrightarrow{Q_2}$ یخ 20°)



مقدار گرمایی که یخ $20^{\circ}C$ می گیرد. برابر است با مقدار گرمایی که آب صفر درجه سانتی گراد می دهد.

$$Q_1 = Q_2$$

$$m' L_f = mc \Delta \theta \Rightarrow 200 \times 336 \times 10^5 = m \times 2100 \times 20 \Rightarrow m = 1600g$$

۳۰ - گزینه ۳ مبدأ را محل رها کردن گلوله ها فرض کردیم. زمان حرکت اولی t و دومی $(t - 2.5)$ می باشد؛ در این صورت با انتخاب جهت مثبت محور y ها رو به پایین داریم:

$$y_1 - y_2 = 68.75 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 - \left(\frac{1}{2}g(t - 2.5)^2\right) = 68.75 \Rightarrow 25t - 31.25 = 68.75 \Rightarrow 25t = 100 \Rightarrow t = 4s$$

۳۱ - گزینه ۲ از آنجا که بزرگی سرعت گلوله در ابتدای ۵۰ متر پایانی حرکتش معلوم است، با استفاده از رابطه سرعت - جابه جایی فاصله نقطه رها شدن تا رسیدن به این سرعت را محاسبه می کنیم.

$$v_1^2 - 0^2 = 2g\Delta y_1 \Rightarrow 15^2 - 0 = 2 \times 10 \Delta y_1 \Rightarrow \Delta y_1 = \frac{225}{20} = 11.25m$$

$$h = \Delta y_1 + 50m = 11.25 + 50 = 61.25m$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 61.25 = \frac{1}{2} \times 10 t^2 \Rightarrow t^2 = 12.25 \Rightarrow t = 3.5s$$

۳۲ - گزینه ۲ در حالتی که فشار ثابت است، می توان نوشت:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \xrightarrow{1lit=10^3cm^3} \frac{2 \times 10^3}{(273+7)} = \frac{2400}{T_2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{2400 \times 280}{2000} = 336K \Rightarrow \Delta T = 336 - 280 = 56K$$

۳۳ - گزینه ۳ با توجه به نمودار مکان - زمان متحرک، در لحظه $t = 2s$ تندی متحرک برابر با صفر است. بنابراین سرعت متحرک در لحظات $t = 0s$ و $t = 8s$ برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \begin{cases} v_{t=2s} = 0 \rightarrow \Delta t = 2s \\ v_{t=2s} = 0 \rightarrow \Delta t' = 8 - 2 = 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{v_{t=2s} - v_0}{\Delta t} \Rightarrow v_0 = -2a \\ a = \frac{v_{t=8s} - v_{t=2s}}{\Delta t} \Rightarrow v_{t=8s} = 6a \end{cases}$$

اکنون با استفاده از رابطه سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت، شتاب حرکت را به دست می آوریم:

$$\frac{v_0 + v_{t=8s}}{2} = \frac{\Delta x_{0-8s}}{\Delta t} \xrightarrow{v_0 = -2a, v_{t=8s} = 6a} \frac{-2a + 6a}{2} = \frac{\Delta x_{0-8s}}{8} \xrightarrow{\Delta x_{0-8s} = -12m} \frac{4a}{2} = -\frac{12}{8} \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \frac{m}{s^2}$$

اکنون جابه جایی متحرک را در بازه های زمانی ۰ تا ۲s و ۲s تا ۶s به دست می آوریم:

$$\frac{\Delta x_{0-2s}}{2} = \frac{v_0 + v_{t=2s}}{2} \xrightarrow{v_0 = -2a, v_{t=2s} = 0} \frac{-2a + 0}{2} \xrightarrow{a = -\frac{3}{4} \frac{m}{s^2}} \Delta x_{0-2s} = \frac{3}{2}m$$

$$v_{t=6s} = at + v_0$$

$$v_{t=6s} = 6a - 2a = 4a$$

$$\frac{\Delta x_{2s-6s}}{2} = \frac{v_{t=2s} + v_{t=6s}}{2} \xrightarrow{v_{t=2s} = 0, v_{t=6s} = 4a} \frac{0 + 4a}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \Delta x_{2s-6s} = -6m$$

$$l_{0-6s} = |\Delta x_{0-2s}| + |\Delta x_{2s-6s}| = 1.5 + 6 = 7.5m$$

۳۴ - گزینه ۳ راه حل اول:

$$y_1 - y_2 = 100 \rightarrow \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = 100 \rightarrow \frac{1}{2}g(t_1^2 - t_2^2) = 100 \rightarrow \frac{1}{2}g \underbrace{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}_{(2)} = 100 \rightarrow t_1 + t_2 = 10$$

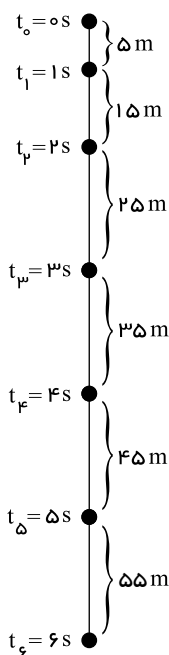
$$\left. \begin{matrix} t_1 - t_2 = 2 \\ t_1 + t_2 = 10 \end{matrix} \right\} \rightarrow 2t_1 = 12 \rightarrow t_1 = 6s$$

مدت زمان حرکت گلوله اول که زودتر به زمین رسیده است.

$$h = y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 = 180m$$

راه سریع تر: اگر گلوله را بدون سرعت اولیه رها کنیم، جابه جایی های گلوله در یک ثانیه های متوالی مطابق شکل مقابل است، بنابراین با توجه به حداکثر فاصله دو گلوله $(45 + 55)100m$ است، گلوله اول ۶s و گلوله دوم ۴s در حرکت بوده اند و ارتفاع کل برابر است با:

$$h = 5 + 15 + 25 + 35 + 45 + 55 = 180m$$



۳۵ - گزینه ۳ یونش را برای ترکیب‌های مولکولی در نظر می‌گیریم، چون طبق تعریف به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود؛ یونش می‌گویند. پس استفاده از لفظ یونش برای ترکیب‌های یونی مانند منیزیم هیدروکسید نادرست است و باید از عبارت «تفکیک یونی» استفاده کرد.

۳۶ - گزینه ۳ عبارت‌های «آ» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

ب) مقایسه غلظت گونه‌ها در محلول الکترولیت HA به صورت زیر خواهد بود. به دلیل یونیده شدن کامل HA ، تقریباً مولکول‌های یونیده نشده در محلول یافت نخواهد شد و مقدار آن‌ها در حد صفر است.

$$[H^+] = [A^-] \gg [HA]$$

ت) HA یک اسید قوی است، اما HF یک اسید ضعیف بوده و نمی‌توان آن را به HA نسبت داد.

۳۷ - گزینه ۱ - عبارت اول نادرست است چون هالوژن‌ها کوچک‌ترین شعاع اتمی را در مقایسه با عناصر هم‌دوره خود دارند.

- عبارت دوم نادرست است چون پیوند بریلم با هالوژن‌ها از نوع کووالانسی است.

- عبارت سوم درست است. با افزایش عدد اتمی و افزایش شعاع هالوژن‌ها، انرژی پیوند و واکنش‌پذیری هالوژن‌ها کاهش می‌یابد.

- عبارت چهارم نادرست است. در هیدروژن هالیدها، با افزایش عدد اتمی خاصیت اسیدی افزایش می‌یابد.

خاصیت اسیدی: $HF < HCl < HBr < HI$

۳۸ - گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

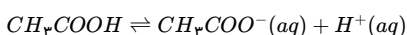
گزینه «۱»: آمونیاک به دلیل تشکیل پیوندهای هیدروژنی در آب، به طور عمده به شکل مولکولی حل می‌شود.

گزینه «۲»: سود سوزآور ($NaOH$) بر اثر حل شدن در آب، طبق معادله $NaOH(s) \rightarrow Na^+(aq) + OH^-(aq)$ به طور کامل تفکیک می‌شود. (دقت کنید که ترکیب یونی، تفکیک می‌شود و ترکیب مولکولی یونش می‌یابد).

گزینه «۳»: انحلال آمونیاک در آب تشکیل سامانه تعادلی $NH_4^+(aq) + OH^-(aq) \rightleftharpoons NH_4OH(aq)$ را می‌دهد.

گزینه «۴»: آمونیاک یک باز ضعیف است که به طور جزئی یونیده می‌شود. در این گونه بازها اندک یون‌های حاصل از یونش با مولکول‌های یونیده نشده در تعادل هستند.

۳۹ - گزینه ۴



$$K_a = \frac{[CH_3COO^-][H^+]}{[CH_3COOH]} = \frac{2 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-4}}{[CH_3COOH]} = 1,8 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow [CH_3COOH] = 22 \times 10^{-4}$$

$$\text{غلظت یون هیدرونیوم} \times 100 = \frac{\text{غلظت استیک اسید اولیه}}{\text{غلظت استیک اسید اولیه}} \times 100$$

غلظت استیک اسید یونیده شده + غلظت استیک اسید موجود در تعادل = غلظت استیک اسید اولیه

$$= 22 \times 10^{-4} + 2 \times 10^{-4} = 24 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{2 \times 10^{-4}}{24 \times 10^{-4}} \times 100 \approx 8,3\%$$

۴۰ - گزینه ۲ ثابت یونش اسیدها در دمای ثابت همواره یکسان است، اما درجه یونش اسید متناسب با غلظت مولار آن، متفاوت است.



دیرستان دخترانه علوی واحد شرق

ماده	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت			
اولیه	۱	۰	۰
تغییرات	-۰٫۲	+۰٫۲	+۰٫۲
نهایی	۰٫۸	۰٫۲	۰٫۲

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow K_a = \frac{0.2 \times 0.2}{0.8} = 5 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

حال درجه یونش اسید را در حالتی که غلظت اولیه اسید ۰٫۶ مولار باشد محاسبه می‌کنیم:

ماده	$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$		
غلظت			
اولیه	۰٫۶	۰	۰
تغییرات	-۰٫۶α	۰٫۶α	۰٫۶α
نهایی	۰٫۶(۱ - α)	۰٫۶α	۰٫۶α

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \Rightarrow 5 \times 10^{-2} = \frac{(0.6\alpha) \times (0.6\alpha)}{0.6(1 - \alpha)} \Rightarrow 0.6\alpha^2 + 0.05\alpha - 0.05 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.25 \text{ ق ق} \\ \alpha = -0.33 \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین درجه یونش اسید HA در حالت دوم برابر با ۰٫۲۵ است.

۴۱ - گزینه ۲ بررسی موارد:

- مورد اول: نادرست. جامدهای یونی اکسیژن‌دار، باز آرنیوس به شمار می‌آیند مانند Na_2O .

- مورد دوم: درست. به موادی که انحلال آنها در آب به صورت یونی باشد، محلول الکترولیت می‌گویند و تفاوتی ندارد که میزان انحلال‌پذیری آنها چقدر است. فقط این نکته اهمیت دارد که هر مقدار که در آب حل می‌شود چه کم باشد (کم‌محلول)، و چه زیاد (محلول) به صورت یونی حل شود.

- مورد سوم: درست. مانند HCl که یک ترکیب مولکولی است اما در آب یونیده شده و محلول آن رسانای قوی جریان برق است.

- مورد چهارم: نادرست. در لحظه تعادل یونش اسید ضعیف، لزوماً غلظت مولی یون‌ها با غلظت مولکول‌های یونیده‌نشده اسید برابر نیست بلکه به غلظت اولیه اسید و ثابت یونش اسید بستگی دارد.

۴۲ - گزینه ۲ بررسی موارد:

مورد آ) نادرست. رسانایی الکتریکی در محلول HB, HA به قدرت اسیدی (ثابت یونش اسیدی) و همچنین غلظت یون‌ها بستگی دارد.

مورد ب) نادرست. میزان انحلال‌پذیری یک اسید یا باز تأثیری بر ثابت یونش آن ندارد. به عنوان مثال، آمونیاک انحلال‌پذیری خوبی در آب دارد ولی باز ضعیف است (ثابت یونش کوچکی دارد).

مورد پ) نادرست. درجه یونش یک اسید به قدرت اسید (ثابت یونش اسید) و همچنین غلظت آن وابسته است.

مورد ت) درست. قدرت اسیدی تنها به ثابت یونش اسید بستگی دارد.

۴۳ - گزینه ۴

$$\text{غلظت مولکول‌های یونیده شده} = \frac{\text{غلظت کل مولکول‌های حل شده}}{\text{غلظت کل مولکول‌های حل شده}} \times 100 \Rightarrow \% \alpha = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{0.1} = 1.5\%$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱) اسیدها را بر مبنای میزان تفکیک و یونشی که در آب دارند، به دو دسته ضعیف و قوی تقسیم می‌کنند.

گزینه ۲) ۴۸ یون ناشی از یونش ۲۴ مولکول HF است.

$$\% \alpha = \frac{24}{1000} \times 100 = 2.4\%$$

گزینه ۳) به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند.

۴۴ - گزینه ۲ تمام محلول‌های داده شده اسیدی هستند و می‌توان گفت در محلولی که غلظت یون H^+ بیشتر است، شمار یون‌های موجود در محلول بیشتر بوده و رسانای الکتریکی آن محلول بیشتر است.

گزینه ۱) نیتریک اسید، یک اسید قوی تک پروتون‌دار است بنابراین $[H^+] = [HNO_3]$ است پس غلظت یون هیدرونیوم در آن برابر 2×10^{-4} مولار می‌باشد.

گزینه ۲)

$$\text{غلظت یون هیدرونیوم} = \frac{\text{غلظت هیدروفلوئوریک اسید}}{\text{غلظت کل مولکول‌های حل شده}} \times 100 \Rightarrow 2.4 = \frac{[H^+]}{0.05} \times 100 \Rightarrow [H^+] = 12 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

گزینه ۳) هیدروکلریک اسید یک اسید قوی تک پروتون‌دار است بنابراین $[HCl] = [H^+]$ پس غلظت H^+ (هیدرونیوم) در آن برابر 10^{-4} مولار می‌باشد.

گزینه ۴)

$$1 = \frac{[H^+]}{6 \times 10^{-4}} \Rightarrow [H^+] = 6 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$