



تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۶/۰۸

کد اجرا: ۷۶۹۷۸۶۳



دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

زمان برگزاری: ۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: شرق دخترانه حسابی ۸ شهریور

۱ از دو معادله $\log_p^x = 1 + \log_p^{y+1}$ و $x^2 - y^2 = 32$ ، مقدار لگاریتم $(x + y)$ در پایه ۴، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$
- ۲) $\frac{3}{4}$
- ۳) $\frac{3}{2}$
- ۴) ۲

۲ از دو معادله $2^x + 3^x = 72$ و $\log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2$ ، مقدار y کدام است؟

- ۱) ۶
- ۲) ۷
- ۳) ۸
- ۴) ۹

۳ اگر $4\sqrt{2} = 4^x$ و $1 + \log \sqrt{x + 1} = \log y$ باشد مقدار y کدام است؟

- ۱) ۷٫۵
- ۲) ۱۲٫۵
- ۳) ۱۵
- ۴) ۲۵

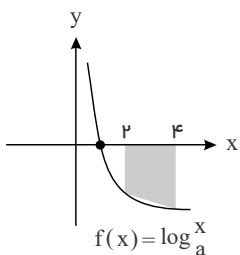
۴ اگر α و β جواب‌های معادله $\log_p^{(4^x + 12)} = x + 3$ باشند، مقدار $\alpha + \beta - 2$ کدام است؟

- ۱) $\log_p^{\frac{3}{2}}$
- ۲) \log_p^2
- ۳) \log_p^4
- ۴) \log_p^3

۵ حاصل $\sqrt{2^{(4 + \log_p^3)}}$ کدام است؟

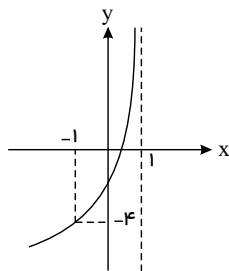
- ۱) $4\sqrt{3}$
- ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ۳) $6\sqrt{2}$
- ۴) $3\sqrt{2}$

۶ نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = \log_a^x$ است. اگر مساحت دوزنقه هاشورخورده برابر ۳ باشد، مقدار $f(64)$ کدام است؟



- ۱) ۶
- ۲) -۶
- ۳) ۵
- ۴) -۵

۷ اگر نمودار تابع $f(x) = a - \log_{\frac{1}{2}}^{-x+b}$ به صورت زیر باشد، آنگاه $f(-7)$ کدام است؟



- ۱) -۵
- ۲) -۸
- ۳) -۱۱
- ۴) -۱۳

۸ نمودار تابع $f(x) = \log_a^x$ از نقطه $(\frac{1}{p}, -4)$ عبور می‌کند. همچنین در تابع $g(x) = 3 - 2 \log_f^{\frac{x}{2}} - 5$ مقدار $g(42) = b$ است. در این صورت حاصل $a^b + b$ کدام است؟

- ۱) صفر
- ۲) ۳
- ۳) ۵
- ۴) ۱۵

۹) حاصل $\log \frac{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}$ کدام است؟

- ① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ $\frac{9}{4}$ ④ $\frac{13}{4}$

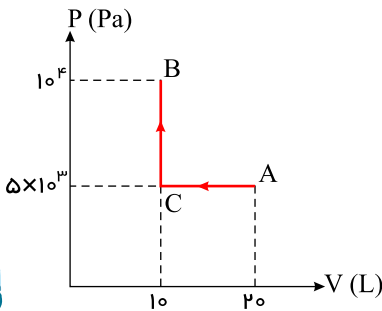
۱۰) اگر $5^{(\log x)-1} - 3^{(\log x)-1} = 3^{(\log x)+1} - 5^{(\log x)+1}$ باشد، حاصل $\log \sqrt[3]{x-19}$ کدام است؟

- ① ۱۶ ② ۱۲ ③ ۸ ④ ۴

۱۱) یک نمونه گاز کامل در دمای $127^\circ C$ موجود است. اگر این گاز را خیلی سریع منبسط کنیم، در این عمل گاز $30 J$ کار انجام می‌دهد و انرژی درونی آن به $210 J$ می‌رسد. دمای نهایی گاز چند کلوین خواهد شد؟

- ① $327,75$ ② 350 ③ 457 ④ 467

۱۲) نمودار فرآیند گاز کاملی به شکل مقابل است. در این فرآیند گاز از محیط خارج چقدر کار و چقدر گرما گرفته است؟



- ① $Q = -50 J$ و $W = 50 J$
 ② $Q = 0 J$ و $W = 50 J$
 ③ $Q = 50 J$ و $W = -50 J$
 ④ $Q = -50 J$ و $W = 0 J$

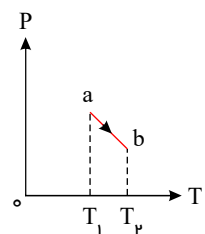
۱۳) انرژی درونی گاز آرمانی

- ① فقط تابع فشار گاز است.
 ② فقط تابع دمای مطلق گاز است.
 ③ تابع تعداد ذرات و دمای مطلق گاز است.
 ④ بستگی به فشار و دمای گاز ندارد.

۱۴) حجم اولیه گاز کاملی در دمای $27^\circ C$ برابر ۲ لیتر است. اگر در فشار ثابت $10^5 \times 1,5$ پاسکال، دمای آن را به $127^\circ C$ برسانیم، کاری که گاز روی محیط انجام می‌دهد، چند ژول است؟

- ① ۱ ② $\frac{200}{3}$ ③ ۱۰۰ ④ ۳۰۰

۱۵) نمودار $(P - T)$ یک مول گاز کامل مطابق شکل مقابل است. کدام عبارت در خصوص فرآیند ab درست است؟

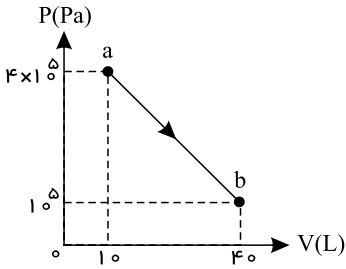


- ① حجم گاز افزایش یافته است.
 ② گاز گرما از دست داده است.
 ③ انرژی درونی گاز کاهش یافته است.
 ④ کار انجام شده روی گاز مثبت است.

۱۶) دمای ۲ مول گاز کامل، در فشار ثابت از 30 درجه سلسیوس به 80 درجه سلسیوس افزایش می‌یابد. کار انجام شده روی گاز در این فرآیند چند

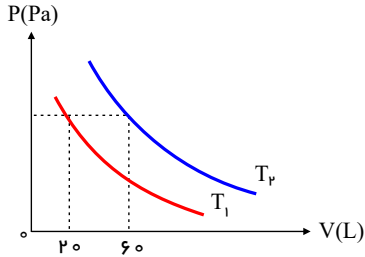
- ژول است؟ $(R = 8,3 \frac{J}{mol \cdot K})$
 ① ۴۱۵ ② -415 ③ ۸۳۰ ④ -830

۱۷) شکل روبه‌رو نمودار $(P - V)$ مربوط به مقداری گاز کامل است. انرژی درونی گاز در این فرآیند چگونه تغییر می‌کند؟



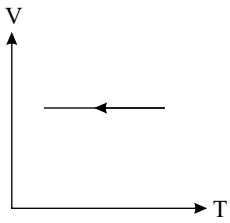
- ۱) بی‌بوسته کاهش می‌یابد.
- ۲) بی‌بوسته افزایش می‌یابد.
- ۳) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.
- ۴) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.

۱۸) نمودار هم‌دمای مقدار معینی گاز کامل را در دو دمای متفاوت در شکل روبه‌رو می‌بینید. T_2 چند برابر T_1 است؟



- ۱) ۲
- ۲) ۳
- ۳) ۱٫۲۵
- ۴) ۱٫۵۰

۱۹) مقدار معینی گاز کامل، فرآیند زیر را طی می‌کند. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح هستند؟ (الف) علامت کار



- انجام‌شده روی گاز در این فرآیند مثبت است.
- ب) در این فرآیند گاز گرما از دست می‌دهد.
- پ) در فرآیند انجام‌شده علامت ΔU مثبت است.

- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۳

۲۰) در فشار ثابت، دمای ۲ مول گاز کامل از 200 K به 300 K افزایش می‌یابد. کار انجام گرفته توسط گاز چند ژول است؟ $(R \simeq 8 \frac{J}{mol \cdot K})$

- ۱) ۴۸۰۰
- ۲) -۴۸۰۰
- ۳) ۱۶۰۰
- ۴) -۱۶۰۰

پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_{km}^n = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log_r^x = 1 + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^y + \log_r^{y+1} \Rightarrow \log_r^x = \log_r^{y \cdot (y+1)} \Rightarrow x = 2y + 2$$

$$x^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (2y + 2)^2 - y^2 = 32 \Rightarrow (4y^2 + 8y + 4) - y^2 = 32 \Rightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 6 \\ y = -\frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{چون جلوی لگاریتم را منفی می‌کند، غیر قابل قبول است}$$

$$\log_r^{x+y} \frac{x=6}{y=2} \log_r^{6+2} = \log_r^{2^6} = \frac{6}{2}$$

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

$$r^x + r^x = 72 \Rightarrow (r^x)^2 + r^x - 72 = 0 \xrightarrow{r^x=A} A^2 + A - 72 = 0 \Rightarrow (A + 9)(A - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -9 \Rightarrow r^x = -9 \rightarrow \text{امکان ندارد} \\ A = 8 \Rightarrow r^x = 8 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\log(x+1) + \log(2y+x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y+9) = 2$$

$$\Rightarrow \log(4y+36) = 2 \xrightarrow{\text{تعریف}} 4y+36 = 10^2 \Rightarrow 4y = 64 \Rightarrow y = 16$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

می‌دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$4\sqrt{2} = 4^x \Rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{5}{2}} = 2^x \Rightarrow 2x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$1 + \log \sqrt{x+1} = \log y \Rightarrow \log 10 + \log \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = \log y$$

$$\Rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow \log 10 \times \frac{3}{2} = \log y \Rightarrow y = 15$$

می‌دانیم اگر $\log_b^a = c$ ، آنگاه $a = b^c$

$$\log_r^{(r^x+1)^2} = x+3 \Rightarrow r^{2x+2} + 12 = r^{2x+3} \Rightarrow (r^x)^2 - 8 \times r^x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (r^x - 2)(r^x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^x = 2 \Rightarrow x = 1 = \alpha \\ r^x = 6 \Rightarrow x = \log_r 6 = \beta \end{cases}$$

بنابراین:

$$\alpha + \beta - 2 = 1 + \log_r^6 - 2 = \log_r^6 - 1 = \log_r^6 - \log_r^1 = \log_r^{\frac{6}{1}} = \log_r^6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

می‌دانیم:

$$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$$

$$\log_b^a = n \log_b^a$$

$$\sqrt{2^{4+\log_2^3}} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{2^{\log_2^3}} = 4 \times 3^{\log_2^{\frac{1}{2}}} = 4 \times 3^{\frac{1}{2} \log_2^3} = 4 \times 3^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$$

اندازهٔ قاعده‌های دوزنقه هاشورخورده برابر با $f(2)$ و $f(4)$ می‌باشد که هر دو منفی هم هستند.

با توجه به این که مساحت دوزنقه برابر ۳ است داریم:

$$\text{ارتفاع دوزنقه} = 4 - 2 = 2 \Rightarrow S = \frac{|f(2) + f(4)| \times 2}{2} = 3 \Rightarrow |f(2) + f(4)| = 3$$

با توجه به این که $f(4)$ و $f(2)$ هر دو منفی هستند داریم:

$$f(2) + f(4) = -3 \Rightarrow \log_a^2 + \log_a^4 = -3 \Rightarrow \log_a^{(2 \times 4)} = -3 \Rightarrow a^{-3} = 8$$

$$a^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^x \Rightarrow f(64) = \log_{\frac{1}{2}}^{64} = \log_{2^{-1}}^{2^6} = \frac{1}{-1} \times 6 \log_2^2 \Rightarrow f(64) = -6$$

$$-x + b > 0 \Rightarrow x < b \Rightarrow D_f = (-\infty, b) \Rightarrow \boxed{b=1} \text{ است و } (-\infty, +1) \text{ با توجه به شکل دامنه تابع } f \text{ به صورت } (-1, -4) \text{ می گذرد.}$$

با توجه به نمودار، این تابع از نقطه $(-1, -4)$ می گذرد.

$$-4 = a - \log_{\sqrt{2}}^2 \Rightarrow -4 = a - 2 \Rightarrow \boxed{a = -2} \Rightarrow f(x) = -2 - \log_{\sqrt{2}}^{-x+1}$$

$$f(-7) = -2 - \log_{\sqrt{2}}^8 = -2 - \log_{\sqrt{2}}^{(\sqrt{2})^6} = -2 - 6 = -8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

با جایگذاری نقطه $(\frac{1}{2}, -4)$ در تابع و سپس جایگذاری نقطه $(42, b)$ در تابع g اقدام به یافتن مجهولات می کنیم:

$$f(x) = \log_a^x \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -4 \Rightarrow \log_a^{\frac{1}{2}} = -4 \Rightarrow a^{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^4 = 2 \xrightarrow{a>0} a = \sqrt[4]{2}$$

$$g(x) = 3 - 2 \log_{\sqrt{2}}^{(x-5)} \Rightarrow g(42) = 3 - 2 \log_{\sqrt{2}}^{37} \Rightarrow 3 - 2(2) = -1 \Rightarrow b = -1$$

$$a^b + b = (\sqrt[4]{2})^{-1} + (-1) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1 = 3$$

ابتدا توجه کنید که: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$3^2 \sqrt[3]{9\sqrt{3}} = 3^2 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{11}{6}}$$

$$\sqrt{3^2 \sqrt[3]{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\log \frac{3^2 \sqrt[3]{9\sqrt{3}}}{\sqrt{3^2 \sqrt[3]{3}}} = \log \frac{3^{\frac{11}{6}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{11}{6} \times \frac{3}{2} \log_3^3 = \frac{11}{4}$$

بنابراین:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$5^{\log x} - 3^{(\log x)-1} = 3^{(\log x)+1} - 5^{(\log x)-1}$$

با فرض $t = \log x$ داریم:

$$5^t - 3^{t-1} = 3^{t+1} - 5^{t-1} \Rightarrow 5^t + 5^{t-1} = 3^{t+1} + 3^{t-1}$$

$$\Rightarrow 5^{t-1}(5+1) = 3^{t-1}(3^2+1) \Rightarrow \frac{5^{t-1}}{3^{t-1}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{t-1} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow t-1=1 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$$

$$\log_{\sqrt{2}}^{(x-19)} = \log_{\sqrt{2}}^{(100-19)} = \log_{\sqrt{2}}^{81} = \log_{\sqrt{2}}^{3^4} = \log_{2^{\frac{1}{2}}}^{3^4} = 2 \times 4 \log_2^3 = 8$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

۱) چون فرآیند خیلی سریع رخ می دهد، پس فرآیندی بی دررو است. با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\begin{cases} \Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W \rightarrow \Delta U = -30J \\ \text{گاز منبسط شده} \rightarrow W < 0 \end{cases}$$

(۲)

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -30J \rightarrow 210 - U_1 = -30 \rightarrow U_1 = 240J$$

۳) انرژی درونی مقدار معینی گاز کامل فقط تابع دمای مطلق گاز است:

$$\begin{cases} \frac{U_2}{U_1} = \frac{T_2(k)}{T_1(k)} \Rightarrow \frac{210}{240} = \frac{T_2}{400} \\ T_1 = 273 + 127 = 400k \end{cases}$$

$$\frac{210}{240} = \frac{T_2}{400} \rightarrow T_2 = 350k$$

فرآیند AC هم فشار و فرآیند CB هم حجم است. کار در فرآیند CB برابر صفر است و کل کار در فرآیند AC انجام می شود. داریم:

$$W_{AC} = -P\Delta V = -5 \times 10^5 (10 - 20) \times 10^{-3} \Rightarrow W = 50J$$

برای یک گاز کامل دما (T) با حاصل ضرب فشار و حجم (PV) متناسب است، چون در نقاط A و B دما یکی است پس $\Delta U = 0$ و

$$Q_{AB} = -W_{AB} = -50J$$

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

با توجه به این که در فرآیند هم فشار، حجم و دمای گاز با یکدیگر رابطه مستقیم دارند، ابتدا حجم ثانویه گاز را به دست می آوریم. داریم:

$$P = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{2}{300} = \frac{V_2}{400} \Rightarrow V_2 = \frac{4}{3}L$$

و با توجه به این که کاری که گاز روی محیط انجام می دهد (W') قرینه کاری است که محیط روی گاز انجام می دهد (W)، داریم:

$$\text{دما} \quad W' = -W = P\Delta V = (1.5 \times 10^5) \times \left[\left(\frac{4}{3} - 2 \right) \times 10^{-3} \right] = 100J$$

۱۵ با توجه به شکل، فشار کاهش یافته و دما افزایش یافته است و چون انرژی درونی گاز کامل فقط تابع دمای گاز است بنابراین انرژی درونی گاز افزایش یافته و طبق معادله حالت گاز کامل ($PV = nRT$) می توان گفت حجم گاز زیاد شده است.

$$V = nRT \rightarrow \text{زیاد} \\ P \rightarrow \text{کم}$$

دقت شود که چون حجم گاز افزایش یافته است بنابراین کار انجام شده روی گاز منفی است (گزینه ۴ نادرست است).

و طبق قانون اول ترمودینامیک ($\Delta U = Q + W$) چون $\Delta U > 0$ ، $w < 0$ است بنابراین حتماً $Q > 0$ و گاز گرما گرفته است (گزینه ۲ نادرست است).

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

اگر معادله حالت را برای ابتدا و انتهای فرآیند هم فشار بنویسیم، داریم:

$$\begin{cases} P_2 V_2 = nRT_2 & (2) \\ P_1 V_1 = nRT_1 & (1) \end{cases} \xrightarrow{P_1=P_2} (2) - (1) = P\Delta V = nR\Delta T$$

$$\text{کار فرآیند هم فشار} \quad W_P = -P\Delta V \xrightarrow{P\Delta V=nR\Delta T} W_P = -nR\Delta T$$

$$W_P = -2 \times 8.31(400 - 300) \Rightarrow W_P = -830J$$

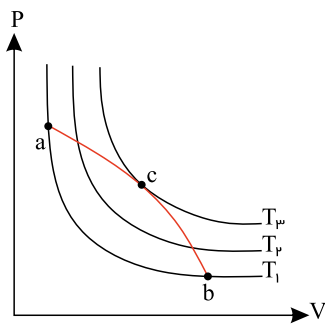
۱۷ راه حل اول: با توجه به یکسان بودن حاصل ضرب PV در حالت های a و b ، دمای گاز در نقاط a و b یکسان است.

از طرفی حاصل ضرب PV در نقطه وسط از a و b بیشتر است (با مشتق گیری می توان ثابت کرد که حاصل ضرب PV در وسط این خط بیشترین مقدار را دارد)، یعنی دما ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است و با توجه به رابطه مستقیم بین انرژی درونی و دما برای مقدار معینی گاز کامل می توان گفت انرژی درونی گاز نیز ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است.

راه حل دوم: با توجه به یکسان بودن دمای نقاط a و b نمودار هم دمای گذرا از بین این دو نقطه را ترسیم می کنیم و مشاهده می شود نقطه C بالای نمودار قرار دارد و این بدین معناست که:

$$T_c > T_a = T_b$$

نقطه C وسط پاره خط $a - b$ است.



۱۸ در نمودارها، دو نقطه هم فشار نشان داده شده است. پس می توان نوشت:

$$\frac{PV_1}{T_1} = \frac{PV_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{20}{T_1} = \frac{60}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{60}{20} = 3$$

۱۹ همان طور که از روی نمودار مشخص است، حجم گاز تغییر نکرده است و فرآیند انجام شده هم حجم است؛ بنابراین $W = 0$ است. با توجه به قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\Delta U = W + Q \xrightarrow{W=0} \Delta U = Q$$

چون دمای گاز طبق نمودار کاهش یافته است و ΔU متناسب با ΔT است پس:

$$\Delta T < 0 \Rightarrow \Delta U < 0 \xrightarrow{\Delta U=Q} Q < 0$$

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

اگر معادله حالت را برآیند نقاط ابتدا و انتهای فرآیند هم فشار بنویسیم، داریم:

$$\begin{cases} P_1 V_1 = nRT_1 & (1) \\ P_2 V_2 = nRT_2 & (2) \end{cases} \xrightarrow{P_1=P_2} (2) - (1) = P\Delta V = nR\Delta T$$

$$W = -P\Delta V \xrightarrow{P\Delta V = nR\Delta T} W = -nR\Delta T \Rightarrow W = -2 \times 8 \times (300 - 200)$$
$$\Rightarrow W = -1600J \Rightarrow W' = 1600J$$

کار انجام شده بر روی محیط (W') توسط گاز، قرینه کار انجام شده بر روی گاز توسط محیط (W) است.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴