فصل ۶

مثلث

قُلْ سِيرُوا فِي الْأَرْضِ فَانظُرُوا كَيْفَ بَدَأَ الْخَلْقَ ... (سوره عنکبوت، آیه ۲۰)

خداوند در جهان هستی، نشانه‌هایی آفریده، و همواره تفکر و تعقل درباره آنها را از انسان خواسته است.

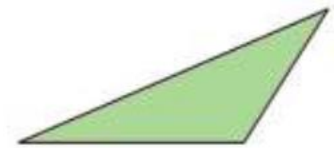
درس اول

رابطه فیثاغورث

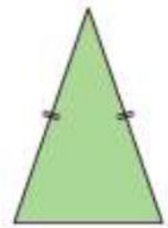
یادآوری:

انواع مثلثها:

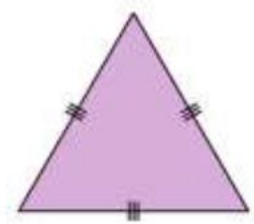
۱)مثلث مختلف الاضلاع



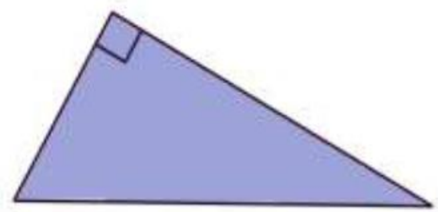
۲) مثلث متساوی الساقین



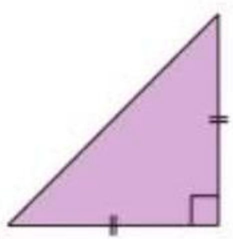
۳) مثلث متساوی الاضلاع



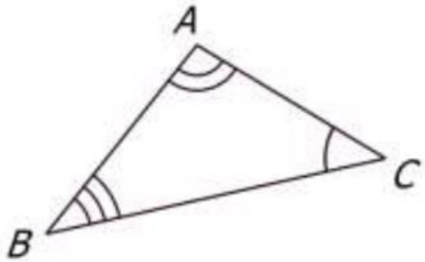
۴) مثلث قائم الزاویه



۵) مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین



می دانید که هر مثلث دارای اجزایی است. به سه زاویه و سه ضلع مثلث اجزای اصلی آن می گویند. به طور مثال در شکل زیر B، A و C راس های مثلث AB ، AC و BC نام اضلاع و $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ نام زوایای مثلث هستند. به نیمساز ,ارتفاع , عمود منصف و ... اجزای فرعی مثلث می گویند .



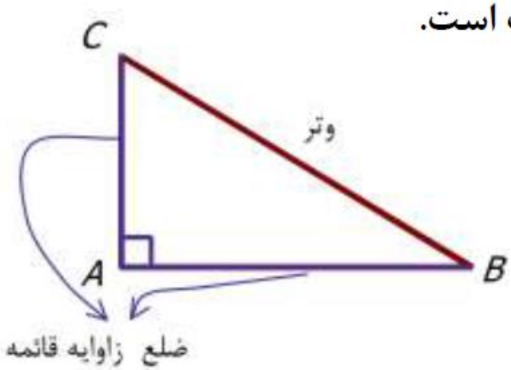
نیمساز : نیم خطی است که از راس شروع شده و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

ارتفاع: پاره خطی است که از راس مثلث به ضلع مقابل متصل شده و بر آن عمود باشد

عمودمنصف: خطی است که از وسط ضلع برآن عمود شده باشد.

میانه: پاره خطی که از یک راس مثلث به وسط ضلع مقابلش وصل شده باشد.

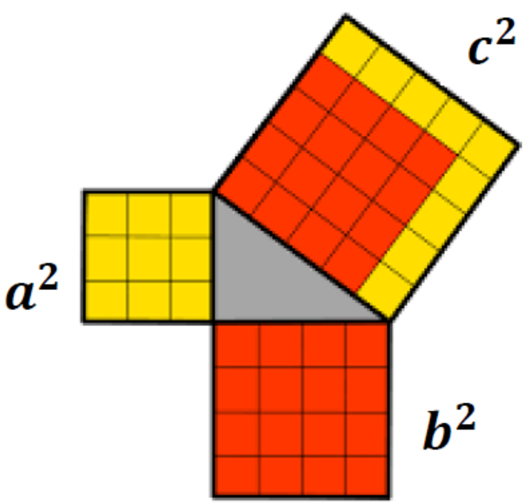
همانطور که می دانید یکی از انواع مثلث ها ، مثلث قائم الزاویه است. در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ی قائمه که بزرگترین ضلع مثلث است را **وتر** می نامیم. در شکل زیر مثلث **ABC** قائم الزاویه و $\hat{A} = ۹۰^{\circ}$ است. در این مثلث دو ضلع AB و AC اضلاع زاویه ی قائمه و ضلع **BC** وتر مثلث است.



فیثاغورس (فیلسوف و ریاضیدان یونانی) با تحقیق بر روی مثلث قائم الزاویه به این نتیجه رسید:

((مساحت مربعی که با وتر مثلث قائم الزاویه ساخته می شود برابر است با مجموع مساحت دو مربعی که با اضلاع زاویه ی قائمه ساخته می شود.))

این رابطه بعدها رابطه ی فیثاغورس نامیده شد. طبق شکل زیر مساحت هر شکل کنار آن نوشته شده است .



بنابراین :

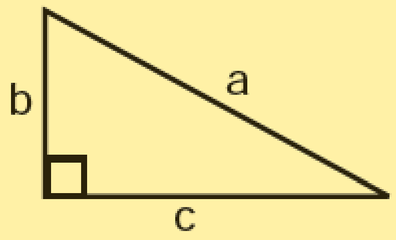
$c = ۵ \Rightarrow$ مساحت مربع روی وتر : $c^{۲} = ۲۵$

$a = ۳ \Rightarrow a^{۲} = ۹$
$b = ۴ \Rightarrow b^{۲} = ۱۶$
$\Rightarrow$ مجموع مساحت ها : $۹ + ۱۶ = ۲۵$

با مقایسه ی دو عبارت داریم:

$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

رابطهٔ میان مجذور (مربع) اندازهٔ ضلع های مثلث قائم الزاویه به **رابطهٔ فیثاغورس** معروف است.

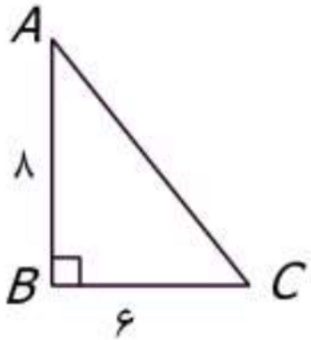


این رابطه بیان می کند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر است.

$$a^۲=b^۲+c^۲$$

عکس این رابطه هم درست است یعنی، اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن برابر شد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

از این ویژگی برای تعیین اندازه ی اضلاع مثلث قائم الزاویه یا تشخیص نوع مثلث استفاده می کنیم.

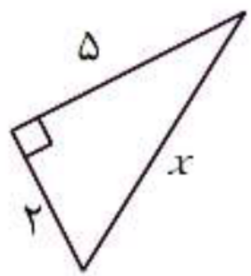


مثال۱: مثلث ABC را درنظر بگیرید.

۶۴= ۸×۸ : مساحت مربعی به ضلع AB

۳۶= ۶×۶ : مساحت مربعی به ضلع BC

بنابراین طبق رابطه ی فیثاغورس داریم: ۱۰۰=۳۶+۶۴ : مساحت مربعی به ضلع AC پس $AC=\sqrt{۱۰۰} = ۱۰$



مثال۲: با توجه به اندازه های داده شده در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: طبق رابطه فیثاغورس داریم :

$$x^۲ = ۲^۲ + ۵^۲ = ۴ + ۲۵ = ۲۹$$
$$x = \sqrt{۲۹}$$

مثال۳) آیا مثلثی با اضلاع ۵ و ۶ و $\sqrt{۱۱}$ قائم الزاویه است؟

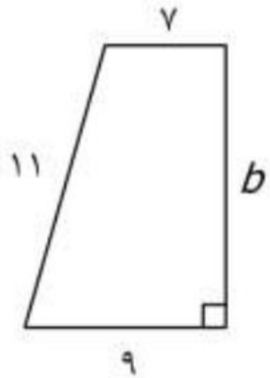
پاسخ: $۶^۲ = ۵^۲ + (\sqrt{۱۱})^۲ \Leftarrow$

$۶^۲ = ۳۶$: مجذور بزرگترین ضلع

$۵^۲ + (\sqrt{۱۱})^۲ = ۱۱ + ۲۵ = ۳۶$: مجموع مجذور دو ضلع دیگر

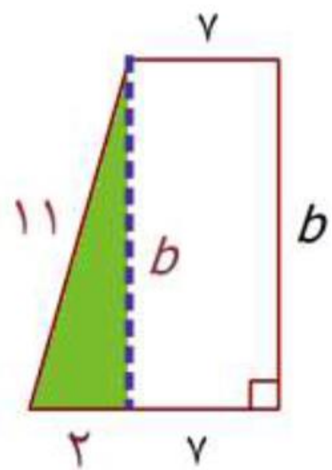
بنابراین مثلث مورد نظر قائم الزاویه است.

مثال۴) در شکل مقابل مقدار b را به دست آورید.



پاسخ:

با توجه به شکل زیر ، مثلث قائم الزاویه ای به وتر ۱۱ و ضلع قائمه ی ۲ واحد به وجود می آید و بنا به رابطه ی فیثاغورس داریم:



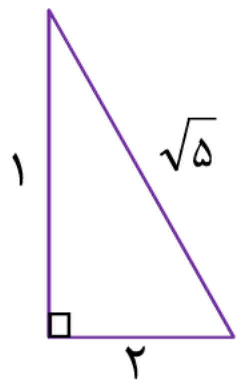
$$b^{۲} = ۱۱^{۲} - ۲^{۲} = ۱۲۱ - ۴ = ۱۱۷$$

$$b = \sqrt{۱۱۷}$$

* رسم پاره خطی به طول $\sqrt{b}$: ابتدا دو عدد پیدا می کنیم که اگر به توان دو رسانده و باهم جمع کنیم، عدد زیر رادیکال به دست می آید. سپس مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع این دو عدد رسم می کنیم. وتر مثلث به اندازه ی عدد داده شده می باشد.

◄ مثال : «۱»

پاره خطی به طول $\sqrt{۵}$ سانتی متر رسم کنید.

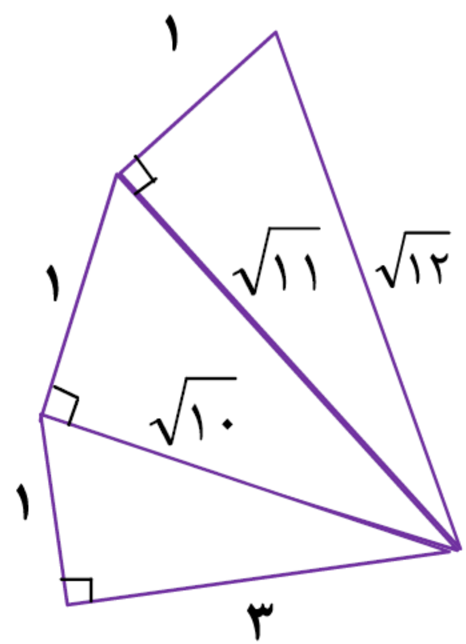


مثلثی به اضلاع ۱ و ۲ سانتی متر رسم می کنیم زیرا : $۱^۲ + ۲^۲ = ۱ + ۴ = ۵$ پس وتر مثلث جواب مسئله است.

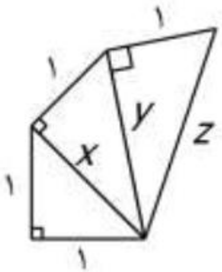
◀ مثال : «۲»

پاره خطی به طول $\sqrt{۱۲}$ سانتی متر رسم کنید.

بزرگ ترین عددی که مجذور آن از ۱۲ کمتر باشد، عدد ۳ است. لذا مثلثی بـه اضـلاع قـائم ۳ و ۱ رسم کرده، سپس با عمود کردن ضلع های یک واحـدی بـر وترهـا، کـار را ادامـه داده تـا بـه $\sqrt{۱۲}$ برسیم.



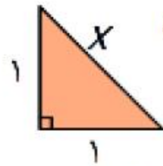
مثال۵) به کمک رابطه ی فیثاغورس محیط شکل مقابل را به دست آورید.



پاسخ:

برای محاسبه ی محیط باید مقدار z را به دست آورد بنابراین باید به ترتیب مقادیرx و y و z را محاسبه کنیم.

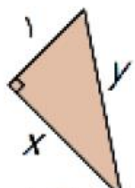
طبق شکل شماره ۱ ، X وتر مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین است . بنابراین



شکل ۱

داریم: $x^{۲} = ۱^{۲} + ۱^{۲} = ۱ + ۱ = ۲ \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{۲}$

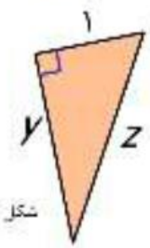
با جایگذاری مقدار x در شکل شماره ۲ داریم:



شکل ۲

$$y^{۲} = ۱^{۲} + (\sqrt{۲})^{۲} = ۱ + ۲ = ۳ \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{۳}$$

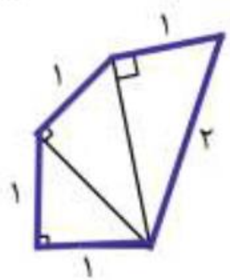
و با جایگذاری مقدار y در شکل شماره ۳ داریم:



شکل ۳

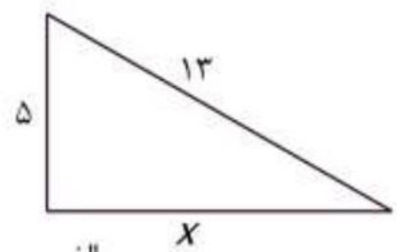
$$z^{۲} = ۱^{۲} + (\sqrt{۳})^{۲} = ۱ + ۳ = ۴ \quad \Longrightarrow \quad z = \sqrt{۴} = ۲$$

بنابراین مقدار محیط شکل عبارت است از:

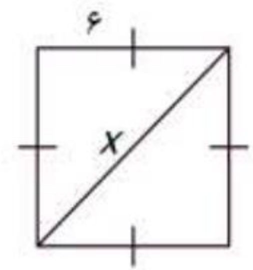


$$P = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ = ۶$$

سوال۱: در هر شکل مقدار x را به کمک رابطه ی فیثاغورس به دست آورید.



الف



ب

پاسخ ب)

$$x^{۲} = ۶^{۲} + ۶^{۲} = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲$$
$$x = \sqrt{۷۲}$$

سوال۲: کدامیک از سه تایی های زیر می تواند اضلاع یک مثلث قائم الزاویه باشد؟ چرا؟

الف) ۲/۵ و ۱/۵ و ۲

ب) ۲و $\sqrt{۶}$ و ۲

پاسخ: $\left.\begin{array}{c} (\text{بزرگترین ضلع}) : \sqrt{۶} \Rightarrow (\sqrt{۶})^{۲} = ۶ \\ ۲^{۲} + ۲^{۲} = ۴ + ۴ = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{۶})^{۲} \neq ۸ \Rightarrow$

مثلث قائم الزاویه نیست

سوال۳: طول و عرض مستطیلی ۱۰ و ۷ سانتیمتر است. قطر این مستطیل را تا یک رقم اعشار به صورت تقریبی محاسبه کنید.

سوال۴: به کمک رابطه ی فیثاغورس پاره خطی به طول $\sqrt{۸}$ رسم کنید.