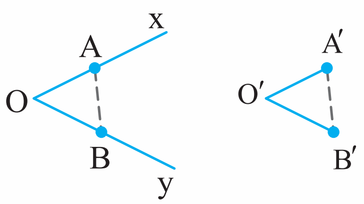
۱- متوسط

نقطه A را روی Ox و نقطه B را روی Oy انتخاب می‌کنیم. اگر $T(O)=O'$ ،$T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ باشد:



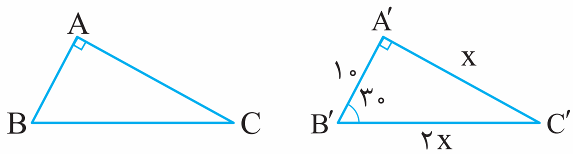
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}T(O)=O'\\T(A)=A'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}} OA=O'A'\\[2mm]\left.\begin{array}{l}T(O)=O'\\T(B)=B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}} OB=O'B'\\[2mm]\left.\begin{array}{l}T(A)=A'\\T(B)=B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}} AB=A'B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}$$

$$\overset{\Delta}{OAB}\cong \overset{\Delta}{O'A'B'}\xrightarrow{\text{ا.م}}\hat{O}=\hat{O}'$$

۲- متوسط

چون تبدیل T طولپا است $\hat{A}=\hat{A}'=۹۰$.

ضلع روبه‌رو زاویه ۳۰° نصف وتر است.



$$\sin B'=\frac{A'C'}{B'C'}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{A'C'}{B'C'}\Rightarrow A'C'=x\ ,\ B'C'=۲x$$

$$B'C'^{۲}=A'B'^{۲}+A'C'^{۲}\Rightarrow ۴x^{۲}=۱۰۰+x^{۲}$$

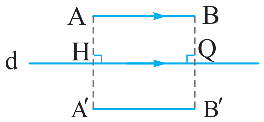
$$\Rightarrow ۳x^{۲}=۱۰۰\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱۰۰}{۳}\Rightarrow x=\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}\Rightarrow x=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S=\frac{۱}{۲}A'B'\times A'C'\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow S=\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$$

۳- دشوار

مسئله را در ۵ حالت بررسی می‌کنیم.

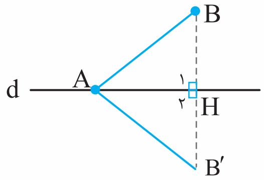
حالت ۱) پاره‌خط AB موازی محور d باشد.



$$\left.\begin{array}{l}S(A)=A'\Rightarrow AH=A'H=\frac{AA'}{۲},AA'\perp d\\[2mm] S(B)=B'\Rightarrow BQ=QB'=\frac{BB'}{۲},BB'\perp d\end{array}\right\}\xrightarrow{AH=BQ\Rightarrow AA'=BB'}$$

$$AA'\parallel BB'\ ,\ AA'=BB'\Rightarrow_{ABB'A'}\text{متوازی‌الاضلاع}\Rightarrow AB=A'B'$$

حالت ۲) نقطه A روی محور d باشد و نقطه B روی محور d نباشد.

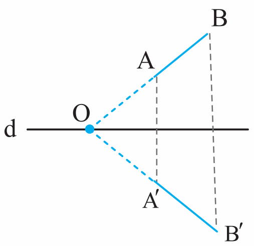


در این‌صورت $S(A)=A$ و $S(B)=B'$ داریم:

$$S(B)=B'\Rightarrow BH=HB'\ ,\ \hat{H}=۹۰$$

$$\left.\begin{array}{r}BH=B'H\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰\\ \text{مشترک}\ AH=AH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{AB'H}\xrightarrow{\text{ا.م}}AB=AB'$$

حالت ۳) امتداد پاره‌خط AB، محور d را قطع کند.

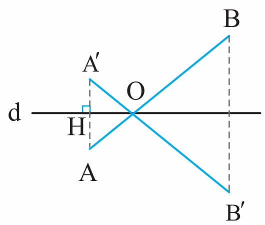


$$\text{از حالت ۲}\Rightarrow OA=OA'$$

$$\text{از حالت ۲}\Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=OB-OA$$
$$=OB'-OA'=A'B'$$

حالت ۴) پاره‌خط AB در نقطه O محور d را قطع کند.



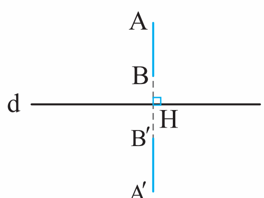
اگر $S(A)=A'$ و $S(B)=B'$:

$$\text{از حالت ۲}\Rightarrow OA=OA'$$

$$\text{از حالت ۲}\Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=AO+OB$$
$$=A'O+OB'=A'B'$$

حالت ۵) امتداد پاره‌خط AB عمود بر d باشد.



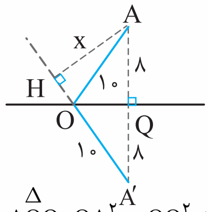
$$S(A)=A'\Rightarrow AH=A'H$$

$$S(B)=B'\Rightarrow BH=B'H$$

$$AB=AH-HB=A'H-B'H=A'B'$$

پس بازتاب یک تبدیل طولپاست.

۴- دشوار



$S(A)=A' \Rightarrow AQ=QA'=۸$

$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(O)=O \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} OA=OA'=۱۰$

$\overset{\Delta}{AOQ}: OA^۲=OQ^۲+AQ^۲ \Rightarrow ۱۰۰=OQ^۲+۶۴$

$\Rightarrow OQ^۲=۳۶ \Rightarrow OQ=۶$

$S_{\overset{\Delta}{OAA'}}=\frac{۱}{۲}OQ\times AA'=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۶ \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAA'}}=۴۸$

$S_{\overset{\Delta}{OAA'}}=\frac{۱}{۲}AH\times OA' \Rightarrow ۴۸=\frac{۱}{۲}\times x\times ۱۰$

$\Rightarrow ۹۶=۱۰x \Rightarrow x=۹/۶$

۵- آسان

آ) **A** – $S(A)=A' \Rightarrow S(A')=A$

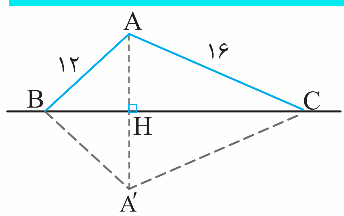
ب) خود آن نقطه – $(A)'=A$ - $S(A')'=A$

پ)مثلث – همنهشت

ت) عمود یا موازی

ث) خود آن نقاط هستند- بی‌شمار

۶- دشوار



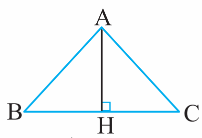
چون نقاط **B** و **C**، نقاط ثابت بازتاب هستند، پس محور بازتاب خطی است که **BC** بر آن منطبق است و برای به‌دست آوردن نقطهٔ A'، از **A** به **BC** عمود می‌کنیم و به اندازه خودش ادامه می‌دهیم پس $AH=A'H=\frac{AA'}{۲}$ که **AH** ارتفـاع وارد بر وتر در مثلث **ABC** است.

$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۱۴۴+۲۵۶=۴۰۰ \Rightarrow BC=۲۰$

$AH\times BC=AB\times AC=۲S \Rightarrow AH\times ۲۰=۱۲\times ۱۶ \Rightarrow AH=۹/۶$

$AA'=۲AH=۲(۹/۶)=۱۹/۲$

۷- متوسط



فرض : $AB=AC$

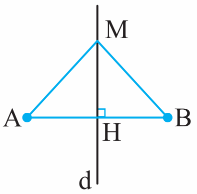
حکم : $\hat{B}=\hat{C}$

ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم و آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم.

$\left.\begin{matrix} S(A)=A \\ S(B)=C \\ S(H)=H \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{ABH}=\widehat{ACH} \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$

۸- آسان

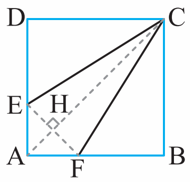
اگر خط **d** عمودمنصف پاره‌خط **AB** باشد و نقطه **M** روی خط **d** باشد داریم:



$\left.\begin{matrix} S_d(M)=M \\ S_d(A)=B \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AM=MB$

۹- آسان

قطر **AC** را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم و چون $AE=AF$ است پس **A** روی محور عمودمنصف پاره‌خط **EF** است.

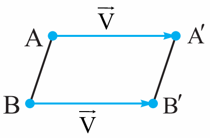


$\left.\begin{matrix} S(C)=C \\ S(E)=F \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} CE=CF$

۱۰- دشوار

مسئله را در ۳ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت ۱) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** نباشد.



$\left.\begin{matrix} T(A)=A' \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} BB'$

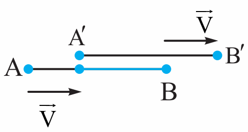
$\Rightarrow \square AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow AB=A'B'$

حالت ۲) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** و طول آن بلندتر از **AB** باشد.

$\left.\begin{matrix} T(A)=A' \Rightarrow AA'=\vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB'=\vec{V} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA'=BB'$

$AB=AA'-BA'=BB'-BA'=A'B' \Rightarrow AB=A'B'$

حالت ۳) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** و طول آن کوتاه‌تر از **AB** باشد.



$\left.\begin{matrix} T(A)=A' \Rightarrow AA'=\vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB'=\vec{V} \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA'=BB'$

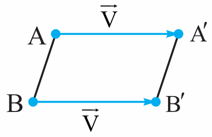
$AB=AA'+A'B=BB'+A'B=A'B' \Rightarrow AB=A'B'$

پس انتقال یک تبدیل طولپاست.

۱۱- متوسط

قضیه را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

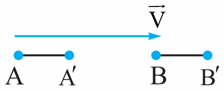
حالت ۱) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** نباشد.



$$\left.\begin{array}{l} T(A)=A' \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} BB'$$

$$\Rightarrow \square AA'B'B \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

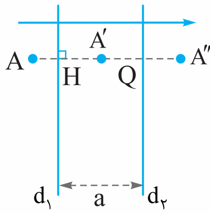
حالت ۲) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** باشد.



در این‌صورت نقاط **A** و **B** و A' و B' روی یک خط هستند پس $AB \parallel A'B'$ یعنی انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۱۲- متوسط

تبدیلی که مستقیماً **A** را به A'' تبدیل کند، انتقالی است که بردار آن AA'' است که هم بر محور d_1 و هم بر محور d_2 عمود است.



$$S_{d_1}(A)=A' \Rightarrow AH=HA'$$

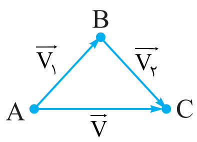
$$S_{d_2}(A')=A'' \Rightarrow A'Q=QA''$$

$$AA''=AA'+A'A''=AH+HA'+A'Q+QA''$$

$$=HA'+HA'+A'Q+A'Q=2(\underbrace{HA'+A'Q}_{a})=2a$$

۱۳- متوسط

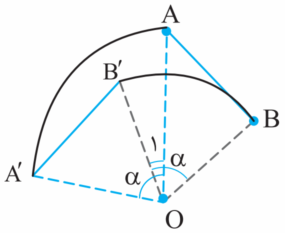
اگر نقطه **A** تحت انتقال با بردار $\vec{V}_1$ به نقطه **B** و نقطه **B** تحت انتقال با بردار $\vec{V}_2$ به نقطه **C** تبدیل شود با توجه به خواص بردارها می‌توان نقطه **A** را با بردار $\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$ مستقیم به **C** تبدیل کرد، بنابراین ترکیب دو انتقال با هم یک انتقال است، که بردار انتقال جمع برداری دو بردار است.



۱۴- دشوار

مسئله را در ۴ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت ۱) مرکز دوران در امتداد یا روی پاره‌خط **AB** نباشد و زاویه دوران بیشتر از $\widehat{AOB}$ باشد.



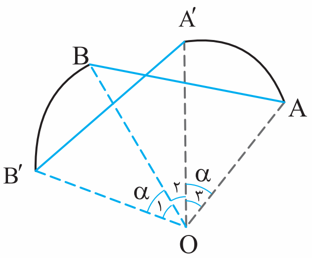
$$\widehat{AOA'}=\widehat{BOB'}=\alpha \Rightarrow \widehat{AOA'}-\hat{O}_1=\widehat{BOB'}-\hat{O}_1 \Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$\left.\begin{array}{l} OA=OA' \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'} \\ OB=OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OA'B'} \xrightarrow{\text{ا.م}} AB=A'B'$$

حالت ۲) مرکز دوران در امتداد یا روی پاره‌خط **AB** نباشد و زاویه دوران کمتر از $\widehat{AOB}$ باشد.



$$\widehat{AOA'}=\widehat{BOB'}=\alpha$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA'}+\hat{O}_3=\widehat{BOB'}+\hat{O}_3$$

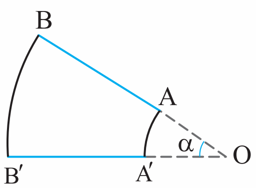
$$\Rightarrow \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$\left.\begin{array}{l} OA=OA' \\ \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'} \\ OB=OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OA'B'} \xrightarrow{\text{ا.م}} AB=A'B'$$

حالت ۳) مرکز دوران در امتداد **AB** باشد.

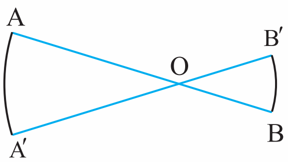


$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=OB-OA$$
$$=OB'-OA'=A'B'$$

حالت ۴) مرکز دوران روی پاره‌خط **AB** باشد.



$$R^{\alpha}(A)=A' \Rightarrow OA=OA'$$

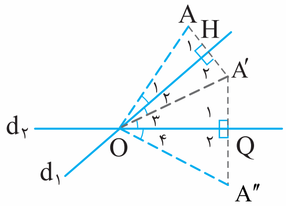
$$R^{\alpha}(B)=B' \Rightarrow OB=OB'$$

$$AB=AO+OB$$
$$=OA'+OB'=A'B'$$

دوران یک تبدیل طولپا است.

۱۵- دشوار

O را به A و A' و A'' وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \Rightarrow AH=HA' \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰ \\ OH=OH \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OHA'}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} OA=OA' & (۱) \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ & (۲) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A')=A'' \Rightarrow A'Q=QA'' \\ \hat{Q}_۱=\hat{Q}_۲=۹۰ \\ OQ=OQ \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} \overset{\Delta}{OA'Q} \cong \overset{\Delta}{OQA''}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}} \begin{cases} OA'=OA'' & (۳) \\ \hat{O}_۳=\hat{O}_۴ & (۴) \end{cases}$$

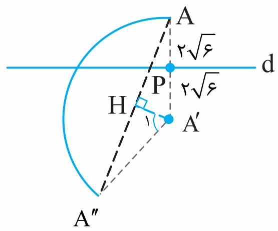
$$\left.\begin{array}{l} OA'=OA \\ OA''=OA' \end{array}\right\} \Rightarrow OA''=OA \Rightarrow$$ A و A'' روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA هستند.

زاویه دوران $=\widehat{AOA''}=\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۴$

$$\xrightarrow[\text{زاویه دوران}=\alpha]{\hat{O}_۱=\hat{O}_۲,\ \hat{O}_۳=\hat{O}_۴} \alpha=\hat{O}_۲+\hat{O}_۲+\hat{O}_۳+\hat{O}_۳$$

$$=۲(\hat{O}_۲+\hat{O}_۳) \Rightarrow \alpha=۲\widehat{HOQ}$$

۱۶- متوسط



$$S(A)=A' \Rightarrow AP=A'P=۲\sqrt{۶} \Rightarrow AA'=۴\sqrt{۶}$$

$$R_{A'}^{۱۲۰}(A)=A'' \Rightarrow \begin{cases} AA''=A'A=۴\sqrt{۶} \\ \widehat{AA'A''}=۱۲۰ \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{AA'A''}: A'A=A'A'' \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}}$$

ارتفاع **AH** هم میانه و هم نیمساز است.

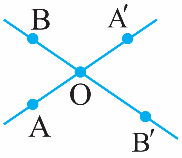
پس $\hat{A}'_۱=۶۰$ و $A''H=AH=\frac{۱}{۲}AA''$.

$$\overset{\Delta}{A'HA''}: \sin\hat{A}'_۱=\frac{A''H}{A'A''} \xrightarrow{\hat{A}'_۱=۶۰} \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}AA''}{۴\sqrt{۶}}$$

$$\Rightarrow AA''=۴\sqrt{۱۸} \Rightarrow AA''=۱۲\sqrt{۲}$$

۱۷- متوسط

R را دوران به مرکز **O** و زاویه ۱۸۰° تعریف می‌کنیم.

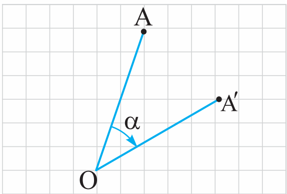


$$\left.\begin{array}{l} R(A)=A' \\ R(O)=O \\ R(B)=B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خواص دوران}} \widehat{AOB}=\widehat{A'OB'}$$

۱۸- آسان

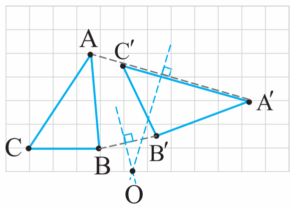
آ)

O روی عمودمنصف AA' $\xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}}$ $OA=OA'$: خواص دوران



ب)

عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های AA' و BB' را رسم می‌کنیم، محل برخورد این خطوط (نقطه **O**) مرکز دوران است.



۱۹- آسان

آ) درست
ب) درست
پ) نادرست
ت) نادرست
ث) درست
ج) نادرست

۲۰- آسان

آ) طولپا (ایزومتری)
ب) طولپا
پ) بی‌شمار
ت) انتقال
ث) یک
ج) دوران
چ) مضرب π

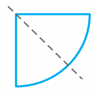
پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینه «۲» آسان

مثلث متساوی‌الاضلاع ۳ خط تقارن (هر سه ارتفاع) دارد و متوازی‌الاضلاع در حالتی که مستطیل و لوزی و مربع نباشد محور تقارن ندارد و لوزی ۲ محور تقارن دارد (قطرهای لوزی).

ربع دایره فقط یک محور تقارن دارد.



۲- گزینه «۴» آسان

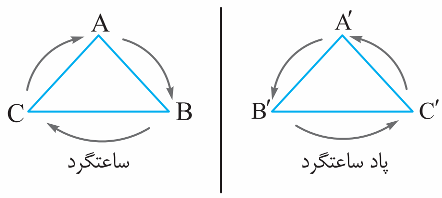
بازتاب تنها در ۲ حالت شیب خط را حفظ می‌کند، حالت اول اینکه محور بازتاب موازی خط باشد و حالت دوم اینکه محور بازتاب عمود بر خط باشد.

۳- گزینه «۳» آسان

هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند و جهت شکل را می‌تواند تغییر دهد.

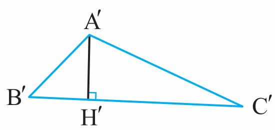
۴- گزینه «۱» آسان

در بازتاب جهت شکل حفظ نمی‌شود.



۵- گزینه «۱» دشوار

می‌دانیم تبدیل طولپا، اندازه زاویه و طول ضلع را حفظ می‌کند.



$$\hat{A}=\frac{۶}{۵}\hat{B}=۶\hat{C}=۶x \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'=۶x\\ \hat{B}=\hat{B}'=۵x\\ \hat{C}=\hat{C}'=x\end{cases}$$

$$\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=۱۸۰ \Rightarrow ۶x+۵x+x=۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۱۲x=۱۸۰ \Rightarrow x=۱۵^\circ$$

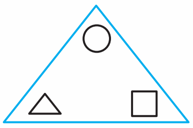
پس $\hat{C}'=۱۵^\circ$ و $\hat{B}'=۷۵^\circ$ و $\hat{A}'=۹۰^\circ$ است و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه چنانچه اندازه زوایا حاده ۱۵° و ۷۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

$$A'H'=\frac{۱}{۴}B'C'=\frac{۱}{۴}(۲۰) \Rightarrow A'H'=۵$$

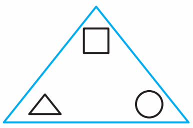
$$S=\frac{۱}{۲}A'H'\times B'C'=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۲۰=۵۰$$

۶- گزینه «۱» متوسط

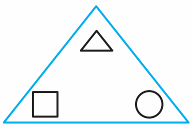
در بازتاب نسبت به خط $L_۱$ جای مثلث و مربع عوض می‌شود.



در بازتاب نسبت به خط $L_۲$ جای مربع و دایره عوض می‌شود.

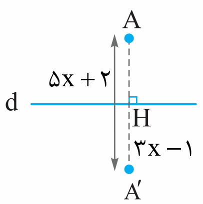


در بازتاب نسبت به خط $L_۳$ جای مثلث و مربع عوض می‌شود.



۷- گزینه «۳» آسان

می‌دانیم محور بازتاب عمودمنصف پاره‌خط AA' است. پس داریم:



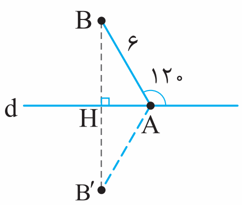
$$AA'=۲A'H \Rightarrow ۵x+۲=۲(۳x-۱)$$

$$\Rightarrow ۵x+۲=۶x-۲ \Rightarrow x=۴$$

$$AH=A'H=۳x-۱=۳(۴)-۱=۱۱$$

۸- گزینه «۳» دشوار

اگر S بازتاب نسبت به خط **d** باشد داریم:



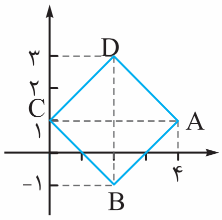
$$\left.\begin{matrix}S(B)=B'\\ S(A)=A\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AB=AB'=۶$$

می‌دانیم در بازتاب اندازه زاویه حفظ می‌شود پس:

$(\widehat{BAH}=\widehat{B'AH}=۱۸۰-۱۲۰=۶۰)$ پس در مثلث ABB' اندازه زاویه **A** برابر $(۲\times ۶۰=۱۲۰)$ است.

$$S_{\underset{ABB'}{\triangle}}=\frac{۱}{۲}AB\times AB'\times \sin A=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۶\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۹\sqrt{۳}$$

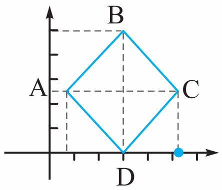
۹- گزینه «۱» دشوار



چون نقطه **C**، نقطه ثابت بازتاب با محور **y**ها است پس نقطه **C** روی محور **y**ها است پس $A(۴,۱)$ و $C(۰,۱)$ است پس محور بازتاب یعنی پاره‌خط **AC**، خط $y=۱$ است و اندازه قطر مربع $AC=۴$ است و چون قطرهای مربع عمودمنصف‌های هم هستند پس $BD=۴$ و **B** و **D** روی خط $x=۲$ قرار دارند که $D(۲,۳)$ و $B(۲,-۱)$ است.

$$OB=\sqrt{(x_B-x_O)^۲+(y_B-y_O)^۲}=\sqrt{(۲-۰)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۵}$$

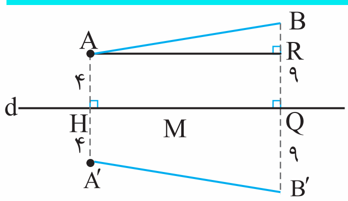
۱۰- گزینه «۲» دشوار



چون نقطه **D**، نقطه ثابت بازتاب نسبت به محور **x** است، پس **D** روی محور **x**ها قرار دارد است پس $D(۳,۰)$ و $B(۳,۵)$ می‌باشد که اندازه قطر مربع $BD=۵$ است و معادله **BD**، خط $x=۳$ است و چون قطرهای مربع هم اندازه و عمودمنصف هستند $AC=۵$ و معادله خط آن $y=۲/۵$ است پس $C(۵/۵,۲/۵)$ و نقطه **A** که بازتاب نقطه **C** نسبت به قطر **BD** است به‌صورت $A(۵/۵-۵,۲/۵)$ است.

$$AO=\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}=\sqrt{(۰/۵-۰)^۲+(۲/۵-۰)^۲}$$
$$=\sqrt{۰/۲۵+۶/۲۵}\Rightarrow OA=\sqrt{۶/۵}$$

۱۱- گزینه «۲» دشوار



$$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۴ \Rightarrow AA'=۸$$
$$S(B)=B' \Rightarrow BQ=QB'=۹ \Rightarrow BB'=۱۸$$

چون بازتاب طولپا است پس $AB=A'B'$ است و چون چهارضلعی $ABB'A'$ محیطی است، مجموع دو ضلع مقابل این چهارضلعی با هم برابر است.

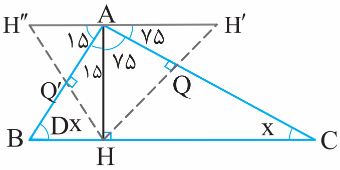
$$AA'+BB'=AB+A'B' \Rightarrow ۸+۱۸=۲AB \Rightarrow AB=۱۳$$

از **A** به BB' عمود می‌کنیم.

$$AH=QR=۴ \Rightarrow BR-RQ=۹-۴ \Rightarrow BR=۵$$
$$\overset{\Delta}{ABR}: AB^۲=AR^۲+RB^۲ \Rightarrow ۱۶۹=AR^۲+۲۵ \Rightarrow AR^۲=۱۴۴ \Rightarrow AR=۱۲$$
$$S=\frac{AA'+BB'}{۲}\times AR \Rightarrow S=\frac{(۸+۱۸)}{۲}\times ۱۲=۱۳\times ۱۲ \Rightarrow S=۱۵۶$$

۱۲- گزینه «۲» دشوار

طبق فرض مسئله $\hat{A}=۶x$ و $\hat{B}=۵x$ و $\hat{C}=x$ است.



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow ۶x+۵x+x=۱۸۰ \Rightarrow ۱۲x=۱۸۰ \Rightarrow x=۱۵$$
$$\hat{A}=۶(۱۵)=۹۰ \ , \ \hat{B}=۵(۱۵)=۷۵ \ , \ \hat{C}=۱۵$$

در مثلث **AHC**، $\hat{H}=۹۰$ و $\hat{C}=۱۵$ است پس $\widehat{CAH}=۷۵^\circ$ است پس $\widehat{BAH}=۱۵^\circ$ است و چون بازتاب اندازه زاویه را حفظ می‌کند $\widehat{H'AQ}=۷۵$ و $\widehat{H''AQ'}=۱۵$ است پس $\widehat{H''AH'}=۱۸۰^\circ$ است که یعنی H' و **A** و H'' روی یک خط هستند.

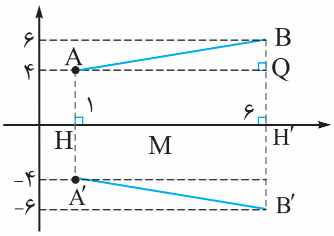
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}S_{AB}(A)=A\\ A_{AB}(H)=H''\end{array}\right\}\Rightarrow AH=AH''\\ \left.\begin{array}{l}S_{AC}(A)=A\\ A_{AC}(H)=H'\end{array}\right\}\Rightarrow AH=AH'\end{array}\right\}\xrightarrow{+} ۲AH=AH''+AH'$$

$$\Rightarrow ۲AH=H'H'' \Rightarrow ۲AH=۴ \Rightarrow AH=۲$$

می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه زاویه‌های حاده ۱۵ و ۷۵ باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ وتر است، پس داریم:

$$AH=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow ۲=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow BC=۸$$
$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۸ \Rightarrow S=۸$$

۱۳- گزینه «۱» متوسط

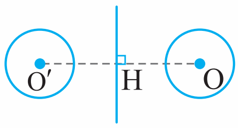


چهارضلعی حاصل یک ذوزنقه خواهر بود زیرا $AA'\parallel BB'$ است.

$$HH'=AQ=۶-۱=۵$$
$$AH=HA'=۴ \Rightarrow AA'=۸$$
$$BH'=H'B'=۶ \Rightarrow BB'=۱۲$$
$$S=\frac{(AA'+BB')}{۲}\times AQ=\frac{(۸+۱۲)}{۲}\times ۵=۵۰$$

۱۴- گزینه «۱» **متوسط**

چون بازتاب یک تبدیل طولپا است پس شعاع دو دایره C و C' با هم برابر است:

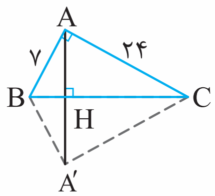


$$۴a+۱=۶a-۱ \Rightarrow ۲a=۲ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow R=R'=۵$$

$$OO'=۲OH=۲(۳a+۷)=۲(۳+۷)=۲۰$$

$$TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R+R')^{۲}}=\sqrt{۲۰^{۲}-(۵+۵)^{۲}}=\sqrt{۳۰۰}=۱۰\sqrt{۳}$$

۱۵- گزینه «۴» **متوسط**



$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۴۹+۵۷۶=۶۲۵ \Rightarrow BC=۲۵$$

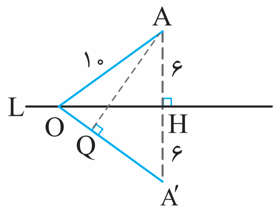
$$S=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{AH\times BC}{۲} \Rightarrow AB\times AC=AH\times BC$$

$$\Rightarrow ۷\times ۲۴=AH\times ۲۵ \Rightarrow AH=۶/۷۲$$

$$S(A)=A' \Rightarrow AA'=۲AH=۲(۶/۷۲)=۱۳/۴۴$$

۱۶- گزینه «۲» **دشوار**

اگر S را بازتاب نسبت به خط L درنظر بگیریم:



$$S(A)=A' \Rightarrow AH=HA'=\frac{AA'}{۲}=۶$$

$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲} \Rightarrow ۱۰۰=OH^{۲}+۳۶$$

$$\Rightarrow OH^{۲}=۶۴ \Rightarrow OH=۸$$

چون بازتاب طولپا است $OA=OA'=۱۰$.

می‌دانیم در هر مثلث نسبت ارتفاع‌ها برابر عکس نسبت اضلاع است.

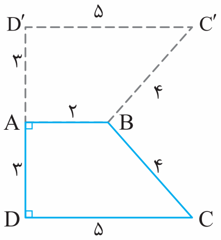
$$\frac{AQ}{OH}=\frac{AA'}{OA'} \Rightarrow \frac{AQ}{۸}=\frac{۱۲}{۱۰} \Rightarrow AQ=۹/۶$$

۱۷- گزینه «۳» **آسان**

دو خط متقاطع نسبت به نیمسازهای دو زاویه مجانب خود بازتاب یکدیگرند، پس به ۲ طریق می‌توانند بازتاب یکدیگر باشند.

۱۸- گزینه «۳» **متوسط**

اگر ذوزنقه را نسبت به کوچک‌ترین ضلع (**AB**) بازتاب کنیم، شکل حاصل با خود ذوزنقه یک چهارضلعی با بیش‌ترین محیط را دارد که چون بازتاب طولپا است، $AD=AD'$ و $DC=D'C'$ و $BC'=BC$ است.



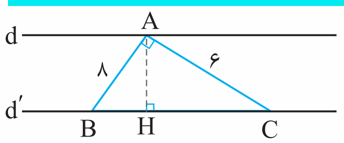
$$\text{محیط}_{DD'C'BC}=DD'+D'C'+C'B+BC+DC$$

$$=۶+۵+۴+۴+۵=۲۴$$

۱۹- گزینه «۴» **آسان**

بازتاب تنها در حالتی که خط با محور موازی یا منطبق و یا بر هم عمود باشند، شیب خط را حفظ می‌کند.

۲۰- گزینه «۴» **متوسط**



$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=۶۴+۳۶=۱۰۰ \Rightarrow BC=۱۰$$

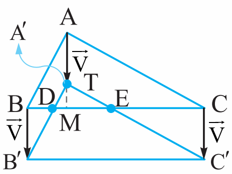
$$S=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{AH\times BC}{۲} \Rightarrow AB\times AC=AH\times BC$$

$$\Rightarrow ۶\times ۸=AH\times ۱۰ \Rightarrow AH=۴/۸$$

پس کوتاه‌ترین برداری که به کمک آن بتوان خط **d** را به خط d' انتقال داد دارای طول ۴/۸ است.

۲۱- گزینه «۳» **دشوار**

در انتقال شیب خط حفظ می‌شود، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \,,\, \text{مورب } BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}=\hat{D} \\ AC \parallel A'C' \,,\, \text{مورب } BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{C}=\hat{E} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{A'DE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

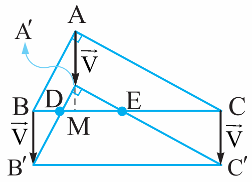
می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌ها برابر نسبت تشابه است و همواره فاصله محل همرسی میانه‌ها از یک ضلع $\frac{۱}{۳}$ طول میانه است پس $k=\frac{A'M}{AM}=\frac{۱}{۳}$.

در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع است.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{A'DE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=k^{۲} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{A'DE}}}{۷۲}=\frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{A'DE}}=۸$$

۲۲- گزینه «۱» — دشوار

در انتقال شیب خط حفظ می‌شود، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel TB' \text{ ، مورب } BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{B}=\hat{D} \\ AC \parallel TC' \text{ ، مورب } BC \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \hat{C}=\hat{E} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{TDE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مربع نسبت اضلاع است پس داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{TDE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=k^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}=k^۲ \Rightarrow k=\frac{۱}{۴}$$

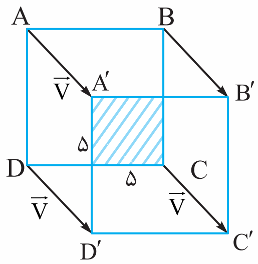
در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است $AM=\frac{BC}{۲}=۴$ و نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه برابر نسبت اضلاع است.

$$\frac{TM}{AM}=k \Rightarrow \frac{TM}{۴}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow TM=۱$$

$$AT=AM-TM=۴-۱ \Rightarrow AT=۳$$

۲۳- گزینه «۴» — آسان

ناحیه مشترک بین این دو مربع، یک مربع به ضلع ۵ است.



$$S_{\text{رنگی}}=۵\times۵=۲۵$$

۲۴- گزینه «۳» — آسان

هر دایره‌ای را به اندازه قطرش در هر جهتی انتقال دهیم، تصویر آن با خودش مماس برون می‌شود پس اندازه بردار انتقال برابر قطر دایره $(۲R=۲(۶)=۱۲)$ است.

۲۵- گزینه «۴» — متوسط

انتقال یک تبدیل طولپا است پس شعاع دایره با شعاع تصویر آن برابر است.

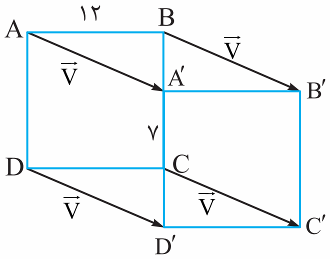
$$۳a-۲=a+۲ \Rightarrow ۲a=۴ \Rightarrow a=۲$$

$$R=۳(۲)-۲=۴ \Rightarrow R=R'=۴$$

$$TT'=\sqrt{OO'^۲-(R+R')^۲} \Rightarrow ۶=\sqrt{OO'^۲-(۴+۴)^۲}$$

$$\Rightarrow ۳۶=OO'^۲-۶۴ \Rightarrow OO'^۲=۱۰۰ \Rightarrow OO'=۱۰$$

۲۶- گزینه «۳» — متوسط

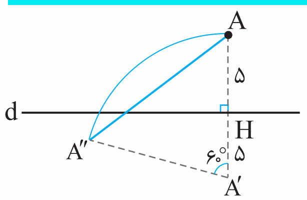


$$A'B=BC-A'C=۱۲-۷=۵$$

$$\overset{\Delta}{ABA'}: AA'^۲=AB^۲+BA'^۲=۱۴۴+۲۵=۱۶۹ \Rightarrow AA'=۱۳$$

$$|\vec{V}|=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=۱۳$$

۲۷- گزینه «۴» — متوسط



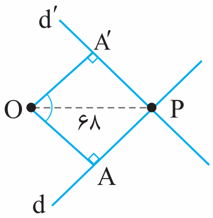
$$S_d(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۵ \Rightarrow AA'=۱۰$$

اگر به مرکز A' و زاویه ۶۰° نقطه **A** را دوران دهیم تا A'' به دست آید اولاً $\widehat{A''A'A}=۶۰^\circ$ و ثانیاً $A'A''=A'A=۱۰$.

در مثلث $AA'A''$ چون $A'A=A'A''$ است پس $\hat{A}=\hat{A}''$ است و چون $\hat{A}'=۶۰^\circ$ است پس $\hat{A}=\hat{A}'=\hat{A}''=۶۰$ یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع است و $AA''=۱۰$.

۲۸- گزینه «۲» — متوسط

از نقطه **O** به دو خط **d** و d' عمود می‌کنیم، چون نقطه **O** روی نیمساز **OP** قرار می‌گیرد پس **OA** و OA' با هم برابر است و یعنی A' تصویر نقطه **A** در دوران به مرکز **O** و زاویه ۶۸ است و در چهارضلعی $OA'PA$ داریم:



$$\hat{O}+\hat{A}'+\hat{P}+\hat{A}=۳۶۰ \Rightarrow ۶۸+۹۰+\hat{P}+۹۰=۳۶۰ \Rightarrow \hat{P}=۱۱۲$$

OP نیمساز زاویه **P** است پس:

$$\widehat{OPA}=\frac{۱۱۲}{۲}=۵۶$$

۲۹- گزینه «۲» — آسان

دوران تنها با اندازه زاویه‌ی $k\pi$، شیب خط را حفظ می‌کند.

۳۰- گزینه «۱» **دشوار**

ضابطهٔ دوران حول مبدأ مختصات و زاویهٔ α درجه نقطهٔ (x,y) را به نقطهٔ $(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ به‌دست می‌آید که $\alpha = ۲۷۰^\circ$ و $x=-۲$ و $y=۳$ است.

$$O(-۲,۳) \xrightarrow{\text{دوران به مرکز مبدأ}, \alpha = ۲۷۰} O'(۳,۲)$$

$$OO' = \sqrt{(-۲-۳)^۲ + (۳-۲)^۲} = \sqrt{۲۵+۱} = \sqrt{۲۶}$$

دوران طولپا است پس $R = R' = \frac{۵}{۲}$.

$$TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R+R')^۲} = \sqrt{۲۶-۲۵} = ۱$$

۱- **آسان**

آ) نادرست ب) نادرست
پ) نادرست د) درست

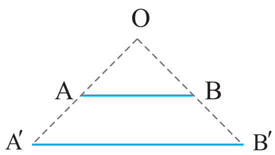
۲- **آسان**

آ) مرکز تجانس ب) ۹
پ) $\frac{۲}{۵}$ ت) $k<۰$ (تجانس معکوس)
ث) طول بردار انتقال صفر باشد. ج) $k=۱$

۳- **دشوار**

مسئله را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

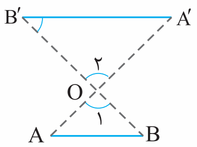
حالت ۱) $k>۰$



$$\text{ویژگی تجانس } \frac{OB'}{OB} = k \quad , \quad \text{ویژگی تجانس } \frac{OA'}{OA} = k$$

$$\overset{\triangle}{OA'B'} : \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{۱}{k} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AB \parallel A'B'$$

حالت ۲) $k<۰$



$$\left.\begin{array}{l} \text{ویژگی تجانس}: \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |k| \\ \text{متقابل به راس}: \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{array}\right| \xrightarrow{\text{ض زض}} \overset{\triangle}{OA'B'} \sim \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \hat{B'} = \hat{B}$$

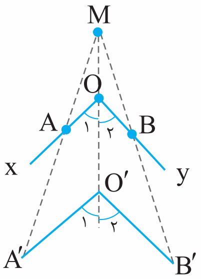
$$\hat{B'} = \hat{B} \ , \ BB' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{عکس قضیه خطوط موازی}} A'B' \parallel AB$$

۴- **دشوار**

مسئله را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

حالت ۱) $k>۰$

نقطه **A** و **B** را روی اضلاع **Ox** و **Oy** به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اگر A' و B' مجانس نقاط **A** و **B** به مرکز **M** و نسبت **k** باشد چون تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، داریم:

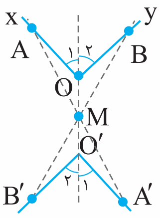


$$\left.\begin{array}{l} OA \parallel O'A' \ , \ OO' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_۱ = \hat{O}'_۱ \\ OB \parallel O'B' \ , \ OO' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_۲ = \hat{O}'_۲ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \hat{O}'_۱ + \hat{O}'_۲ \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}'$$

حالت ۲) $k<۰$

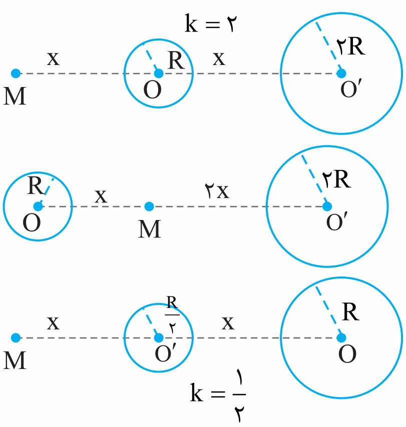
نقطه **A** و **B** را روی اضلاع **Ox** و **Oy** به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اگر A' و B' مجانس نقاط **A** و **B** به مرکز **M** و نسبت **k** باشد چون تجانس شیب خط را حفظ می‌کند، داریم:



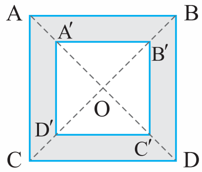
$$\left.\begin{array}{l} OA \parallel O'A' \ , \ OO' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_۱ = \hat{O}'_۱ \\ OB \parallel O'B' \ , \ OO' \text{ مورب} \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \hat{O}_۲ = \hat{O}'_۲ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \hat{O}'_۱ + \hat{O}'_۲ \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}'$$

۵- **آسان**



۶- متوسط

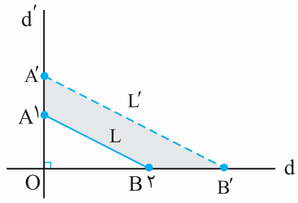


$$\frac{A'B'}{AB}=|k| \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases}A'B'=2x\\ AB=3x\end{cases}$$

$$S_{\text{رنگی}}=(AB)^2-(A'B')^2 \Rightarrow 5=9x^2-4x^2 \Rightarrow 5x^2=5 \xrightarrow{x>0} x=1$$

$$ABCD_{\text{محیط}}=4(AB)=4(3x)=12x=12(1)=12$$

۷- متوسط



$$OA'=|k|\,OA \Rightarrow OA'=\frac{7}{4}\times 1=\frac{7}{4}$$

$$OB'=|k|\,OB \Rightarrow OB'=\frac{7}{4}\times 2=\frac{7}{2}$$

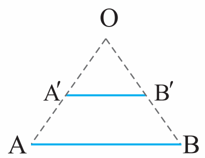
$$S_{\overset{\triangle}{OA'B'}}=\frac{1}{2}OA'\times OB'=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{2}=\frac{49}{16}$$

$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$$

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\overset{\triangle}{OA'B'}}-S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{49}{16}-1 \Rightarrow S_{\text{رنگی}}=\frac{33}{16}$$

۸- دشوار

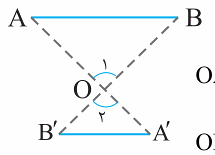
اگر **k** مثبت باشد، طبق خواص تجانس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} OA'=k.OA \Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=k \\ OB'=k.OB \Rightarrow \dfrac{OB'}{OB}=k \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k \xrightarrow{\text{عکس تالس}} A'B' \parallel AB$$

$$\overset{\triangle}{ABO}: A'B' \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=K$$

اگر $k<0$ باشد، طبق خواص تجانس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} OA'=|k|\,OA \Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=|k| \\ OB'=|k|\,OB \Rightarrow \dfrac{OB'}{OA}=|k| \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=|k| \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \ \text{متقابل به رأس} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OA'B'} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=|k|$$

۹- متوسط

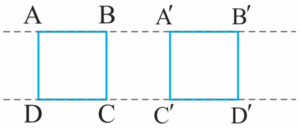
می‌دانیم اگر $A'_1A'_2$ مجانس A_1A_2 در تجانس به مرکز **O** و نسبت **k** باشد رابطه $\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}=|k|$ برقرار است. بنابراین داریم:

$$\frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}=\frac{A'_2A'_3}{A_2A_3}=\cdots=\frac{A'_nA'_1}{A_nA_1}=|k|$$

$$\Rightarrow A_1A_2A_3\ldots A_n \sim A'_1A'_2A'_3\ldots A'_n$$

۱۰- متوسط

می‌دانیم هر دو مربع با هم متشابه هستند. حال اگر دو مربع هم‌اندازه بـه ضـلع واحد را مطابق شکل در نظر بگیریم خطی که از **A** و A' می‌گذرد و خطی کـه از **C** و C' می‌گذرد با هم موازی‌انـد و مـی‌دانـیم در تجانـس هـر خطی کـه مجانس نقطه را به خود نقطه وصل می‌کند از مرکز تجانس می‌گذرد پس نتیجه می‌گیریم دو مربع مجانس هم نیستند.



۱- گزینه «۴» آسان

تبدیلات دوران، بازتاب و انتقال طولپا هستند، اما تجانس فقط زمانی طولپاست که $k=1$ یا $k=-1$ باشد.

۲- گزینه «۳» آسان

تجانس زمانی طولپاست که $k=1$ یا $k=-1$ باشد.

$$t^2+6t+8=1 \Rightarrow t^2+6t+7=0$$

$$\Delta=36-4(1)(7)=8$$

$$t=\frac{6\pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t=-3-\sqrt{2} \\ t=-3+\sqrt{2}\end{cases}$$

$$t^2+6t+8=-1 \Rightarrow t^2+6t+9=0$$

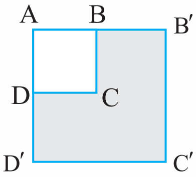
$$\Rightarrow (t+3)^2=0 \Rightarrow t=-3$$

بنابراین به ازای ۳ مقدار متمایز **t**، تجانس با نسبت t^2+6t+8 طولپا است.

۳- گزینه «۲» متوسط

اگر اندازه هر ضلع مربع اولیه را ۲x فرض کنیم اندازه هر ضلع تصویر آن برابر است با:

$AB' = |k|AB \Rightarrow AB' = \frac{۵}{۲}\times ۲x \Rightarrow AB' = ۵x$



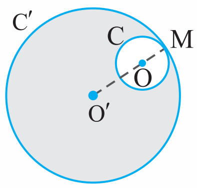
$S_{رنگی} = (۵x)^۲ - (۲x)^۲ \Rightarrow ۸۴ = ۲۵x^۲ - ۴x^۲ \Rightarrow ۸۴ = ۲۱x^۲$

$\Rightarrow x^۲ = ۴ \xrightarrow{x>۰} x = ۲$

$محیط\ ABCD = ۴(۲x) = ۸x = ۸(۲) = ۱۶$

۴- گزینه «۲» دشوار

چون دو دایره دارای یک مماس مشترک هستند، پس مماس خارج هستند و چنانچه نقطه تماس دو دایره را **M** بنامیم، چون **M** تصویر خودش شده است پس نقطه **M** مرکز تجانس است و در تجانس می‌دانیم:



$|k| = \frac{O'M}{OM} \Rightarrow ۵ = \frac{OO'+OM}{OM} \Rightarrow ۵OM = ۱۶ + OM$

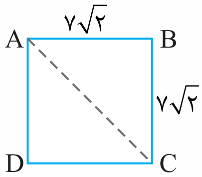
$\Rightarrow ۴OM = ۱۶ \Rightarrow OM = ۴ \Rightarrow R = ۴$

$O'M = OO' + OM = ۱۶+۴ \Rightarrow O'M = R' = ۲۰$

$S_{رنگی} = \pi R'^۲ - \pi R^۲ = \pi(۲۰)^۲ - \pi(۴)^۲ = ۴۰۰\pi - ۱۶\pi \Rightarrow S_{رنگی} = ۳۸۴\pi$

۵- گزینه «۱» دشوار

می‌دانیم اگر اندازه ضلع مربعی برابر **x** باشد، اندازه قطر آن $x\sqrt{۲}$ است.



پس قطر مربع **ABCD** برابر ۱۴ است و قطر مربع تصویر آن در تجانس به مرکز **O** و نسبت **k** برابر ۲۸ شده است، بنابراین داریم:

$|k| = \frac{A'C'}{AC} = \frac{۲۸}{۱۴} \Rightarrow |k| = ۲$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است. پس داریم:

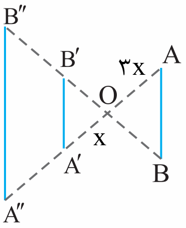
$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۵)^۲ = \frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}$

در تجانس به نسبت **k**، نسبت مساحت تصویر به مساحت شکل اولیه برابر $k^۲$ است.

$\frac{S'}{S} = k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}} = ۴ \Rightarrow S' = ۲۵\sqrt{۳}$

۶- گزینه «۴» دشوار

طبق خواص تجانس داریم:



$\frac{OA'}{OA} = |k| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases} OA' = x \\ OA = ۳x \end{cases}$

$AA'' = ۴AA' \Rightarrow A''A' + A'O + OA = ۴(OA + OA')$

$\Rightarrow A''A' + x + ۳x = ۴(۳x + x) \Rightarrow A''A' = ۱۲x$

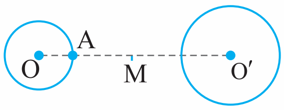
می‌دانیم تجانس شیب خط را حفظ می‌کند پس در تجانس اول $A'B' \parallel AB$ و در تجانس دوم $A''B'' \parallel AB$ است، در نتیجه $A'B' \parallel A''B''$.

$\overset{\triangle}{OA''B''}: A'B' \parallel A''B'' \xrightarrow{تالس} \frac{OA'}{OA''} = \frac{A'B'}{A''B''}$

$\Rightarrow \frac{x}{x+۱۲x} = \frac{A'B'}{A''B''} \Rightarrow \frac{A''B''}{A'B'} = ۱۳$

۷- گزینه «۲» متوسط

اگر **M** مرکز تجانس باشد:



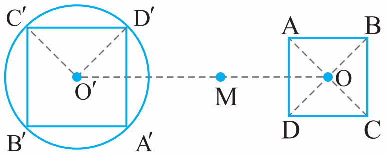
$\frac{R'}{R} = |k| \Rightarrow \frac{۷}{۳} = |k|$

$\frac{O'M}{OM} = |k| \Rightarrow \frac{O'M}{OM} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow \frac{O'M+OM}{OM} = \frac{۷+۳}{۳}$

$\Rightarrow \frac{OO'}{OM} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow \frac{۳۰}{OM} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow OM = ۹$

$C_{کمترین\ فاصله\ M\ تا\ دایره} = OM = MO - R = ۹ - ۳ \Rightarrow OM = ۶$

۸- گزینه «۳» دشوار



$S_{دایره} = \pi r^۲ \Rightarrow ۸\pi = \pi r^۲ \Rightarrow r = ۲\sqrt{۲}$

$\overset{\triangle}{O'C'D'}: C'D'^۲ = O'C'^۲ + O'D'^۲ = ۸+۸ = ۱۶ \Rightarrow C'D' = ۴$

طبق خواص تجانس می‌دانیم: $|k| = \frac{C'D'}{CD} \Rightarrow |k| = \frac{۴}{۱} = ۴$

چون تجانس معکوس است، نقطه **M** بین O' و **O** است.

$|k| = \frac{O'M}{OM} \Rightarrow ۴ = \frac{O'M}{OM} \Rightarrow O'M = ۴OM$

$OO' = OM + O'M \Rightarrow ۲۰ = OM + ۴OM \Rightarrow OM = ۴ \Rightarrow O'M = ۱۶$

۹- گزینه «۳» متوسط

می‌دانیم در تجانس به نسبت **k** نسبت اندازه اضلاع $|k|$ و نسبت مساحت‌ها $k^۲$ است.

$$\frac{S'}{S}=k^۲ \Rightarrow \frac{۵۰}{۱۶۲}=k^۲ \Rightarrow k^۲=\frac{۲۵}{۸۱} \Rightarrow k=\frac{۵}{۹}$$

$$k=\frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{۵}{۹}=\frac{A'B'}{۱۳/۵} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{A'B'}{۳} \Rightarrow A'B'=۷/۵$$

۱۰- گزینه «۱» دشوار

اگر $A(۵,۳)$ و $B(۷,۱)$ و $C(۱,-۱)$ باشد داریم:

$$AB=\sqrt{(۷-۵)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$AC=\sqrt{(۱-۵)^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

$$BC=\sqrt{(۱-۷)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۳۶+۴}=۲\sqrt{۱۰}$$

چون $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ است پس رأس **A** قائمه است.

$$S=\frac{۱}{۲}AB.AC=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۲}\times ۴\sqrt{۲} \Rightarrow S=۸$$

طبق خواص تجانس داریم:

$$\frac{S'}{S}=k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{۸}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S'=۲$$

۱۱- گزینه «۳» متوسط

چون $k>۰$ است **O**، خارج فاصله **M** و M' است و طبق خواص تجانس داریم:

$$|k|=\frac{OM'}{OM} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{OM'}{OM} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{OM'}{OM'+MM'}$$

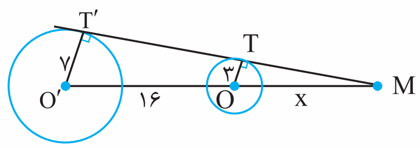
$$\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{OM'}{OM'+۶} \Rightarrow ۵OM'=۲OM'+۱۲$$

$$\Rightarrow ۳OM'=۱۲ \Rightarrow OM'=۴ \Rightarrow OM=۱۰$$

$$OM^۲+OM'^۲=(۱۰)^۲+(۴)^۲=۱۰۰+۱۶=۱۱۶$$

۱۲- گزینه «۱» متوسط

مرکز تجانس مستقیم دو دایره محل تلاقی مماس مشترک خارجی با خط‌المرکزین است.

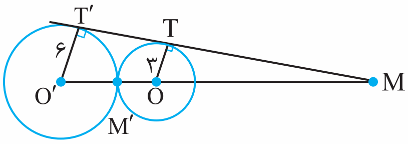


$$\left.\begin{matrix}OT\perp T'M\\ O'T'\perp T'M\end{matrix}\right\} \Rightarrow OT\parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO}{MO'}=\frac{OT}{O'T}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+۱۶}=\frac{۳}{۷} \Rightarrow ۷x=۳x+۴۸ \Rightarrow ۴x=۴۸ \Rightarrow x=۱۲$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

محل برخورد ۲ دایره (که محل تلاقی خط‌المرکزین با مماس مشترک داخلی دو دایره است) نقطه M' یعنی مرکز تجانس معکوس است و محل تلاقی خط‌المرکزین با مماس مشترک خارجی دو دایره نقطه **M** یعنی مرکز تجانس مستقیم دو دایره است و چون دو دایره مماس خارج هستند $(OO'=R+R'=۹)$ است.



$$\left.\begin{matrix}OT\perp T'M\\ O'T'\perp T'M\end{matrix}\right\} \Rightarrow OT\parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO}{MO'}=\frac{OT}{O'T'}$$

$$\Rightarrow \frac{MO}{MO+OO'}=\frac{۳}{۶} \Rightarrow \frac{MO}{MO+۹}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲OM=MO+۹ \Rightarrow MO=۹$$

$$MM'=MO+OM'=۹+۳ \Rightarrow MM'=۱۲$$

۱۴- گزینه «۴» آسان

تجانس فقط زمانی که $k=۱$ باشد تبدیل همانی است و انتقال زمانی همانی است که طول بردار انتقال صفر باشد، بازتاب هیچ وقت تبدیل همانی نیست و دوران با زاویه $۲k\pi$ یک تبدیل همانی است.

۱۵- گزینه «۳» آسان

در تبدیل همانی، چون هر نقطه تصویر خودش است، پس بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل داریم و همواره طولپا است.

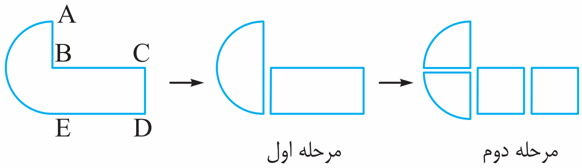
تجانس تنها هنگامی که $k=۱$ باشد تبدیل همانی است و $k=-۱$ تبدیل همانی نمی‌باشد.

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۳

۱- آسان



۲- آسان

آ) اضلاع **BC** و **CD** را نسبت به **BD** بازتاب می‌کنیم در این‌صورت:

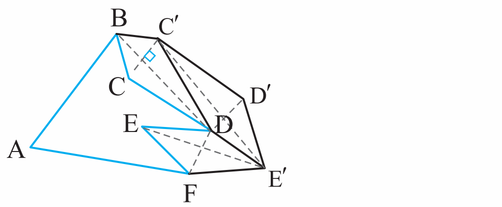
$S(B)=B \quad S(C)=C' \quad S(D)=D$

اضلاع **DE** و **EF** را نسبت به **DF** بازتاب می‌کنیم:

$S(D)=D \quad S(E)=E' \quad S(F)=F$

اضلاع DC' و DE' را نسبت به $C'E'$ بازتاب می‌کنیم:

$S(C')=C' \quad S(D)=D' \quad S(E')=E'$

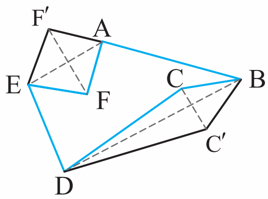


ب) اضلاع **EF** و **AF** را نسبت به **AE** بازتاب می‌کنیم:

$S(E)=E \quad S(F)=F' \quad S(A)=A$

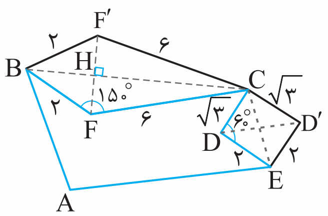
اضلاع **DC** و **BC** را نسبت به **BD** بازتاب می‌کنیم:

$S(D)=D \quad S(C)=C' \quad S(B)=B$



۳- متوسط

آ) اضلاع **BF** و **FC** را نسبت به **BC** بازتاب می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} S(B)=B \\ S(F)=F' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} BF=BF'=۲$$

$$\left.\begin{array}{l} S(F)=F' \\ S(C)=C \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} FC=F'C=۶$$

می‌دانیم در تبدیل طولپا اندازه زاویه حفظ می‌شود یعنی $\hat{F}=\hat{F}'$.

$$\left.\begin{array}{l} BF=BF' \\ \hat{F}=\hat{F}' \\ FC=F'C \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{BFC} \cong \overset{\triangle}{BF'C}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BF'C}}=S_{\overset{\triangle}{BFC}}=\frac{۱}{۲}BF\times FC\times \sin F=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\times \frac{۱}{۲}=۳$$

اضلاع **CD** و **DE** را نسبت به **CE** بازتاب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} S(D)=D' \\ S(C)=C \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} DC=D'C=\sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} S(D)=D' \\ S(E)=E \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} DE=D'E=۲$$

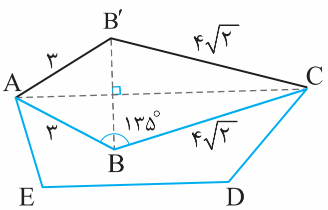
می‌دانیم در تبدیل طولپا اندازه زاویه حفظ می‌شود پس $\hat{D}=\hat{D}'$.

$$\left.\begin{array}{l} DC=D'C \\ \hat{D}=\hat{D}' \\ DE=D'E \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{DCE} \cong \overset{\triangle}{CD'E}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{DCE}}=S_{\overset{\triangle}{CD'E}}=\frac{۱}{۲}DC\times DE\times \sin D=\frac{۱}{۲}\times ۲\times \sqrt{۳}\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{افزایش } S=۲(S_{\overset{\triangle}{BFC}}+S_{\overset{\triangle}{DCE}})=۲(۳+\frac{۳}{۲})=۶+۳=۹$$

ب) اضلاع **AB** و **BC** را نسبت به **AC** بازتاب می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A \\ S(B)=B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AB=AB'=۳$$

$$\left.\begin{array}{l} S(C)=C \\ S(B)=B' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} BC=B'C=۴\sqrt{۲}$$

در تبدیل طولپا اندازه زاویه حفظ می‌شود پس $\hat{B}=\hat{B}'$.

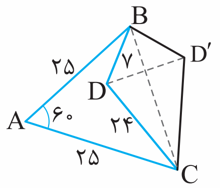
$$\left.\begin{array}{l} AB=AB' \\ \hat{B}=\hat{B}' \\ BC=B'C \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{AB'C}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=\frac{۱}{۲}AB'\times B'C\times \sin \hat{B}'=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴\sqrt{۲}\times \frac{\sqrt{۲}}{۲}=۶$$

$$\text{افزایش مساحت } S=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=۶+۶=۱۲$$

۴- دشوار

اضلاع **BD** و **DC** را نسبت به پاره‌خط **BC** بازتاب می‌کنیم:



$S(B)=B \quad S(C)=C \qquad S(D)=D'$

$$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC=۲۵ \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \left.\begin{matrix}\widehat{ABC}=\widehat{ACB}\\ \hat{A}=۶۰\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{ACB}=\widehat{ABC}=\hat{A}=۶۰$$

بنابراین مثلث **ABC** متساوی‌الاضلاع است و $BC=۲۵$ است و چون در مثلث **BDC** رابطه $BC^۲=BD^۲+DC^۲$ برقرار است پس این مثلث در رأس **D** قائم‌الزاویه است.

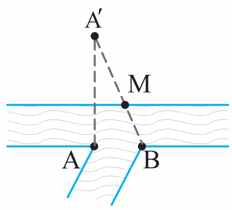
$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}S(B)=B\\S(D)=D'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} BD=BD'\\ \left.\begin{matrix}S(C)=C\\S(D)=D'\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} CD=CD'\\ \text{مشترک}\ BC=BC\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{BCD}\cong\overset{\Delta}{BD'C}$$

میزان افزایش مساحت دو برابر مساحت مثلث **BCD** است.

$$\text{افزایش مساحت}=۲S_{\overset{\Delta}{BCD}}=۲(\frac{۱}{۲}DC\times BD)=۷\times۲۴=۱۶۸$$

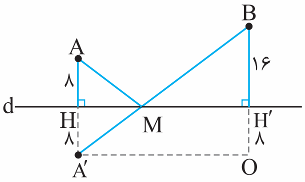
۵- آسان

بازتاب نقطه **A** را نسبت به خطی که لبه دیگر رودخانه دارد به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. سپس A' را به **B** وصل می‌کنیم، هر کجا این پاره‌خط لبه ساحل را قطع کند، نقطه **M** و جواب مسئله است.



۶- متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را A' می‌نامیم.



$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۸$

A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند، مسیر **AMB** جواب مسئله است.

$$\left.\begin{matrix}S(A)=A'\\S(M)=M\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A'M$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر}=AM+MB=A'M+MB=A'B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B$ وتر آن باشد.

$BO=۱۶+۸=۲۴$

$A'O=HH'=۱۰$

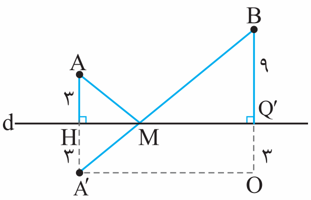
$\overset{\Delta}{A'OB}: A'B^۲=BO^۲+A'O^۲=۵۷۶+۱۰۰=۶۷۶$

$\Rightarrow A'B=۲۶ \Rightarrow AM+MB=۲۶$

۷- متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم.

A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. مسیر **AMB** جواب مسئله است.



$$\left.\begin{matrix}S(A)=A'\\S(M)=M\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A'M$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر}=AM+MB=A'M+MB=A'B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B$ می‌سازیم.

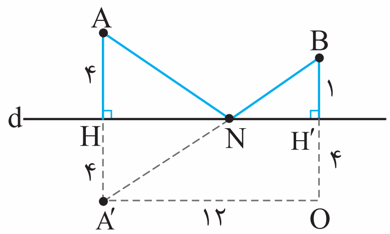
$OA'=HQ=۹$

$OB=۳+۹=۱۲$

$A'B^۲=A'O^۲+OB^۲=۹^۲+۱۲^۲=۸۱+۱۴۴=۲۲۵ \Rightarrow A'B=۱۵$

۸- دشوار

نقطه **A** را نسبت به خط d' را A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط d' را در **N** قطع کند، $AN+NB$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد.



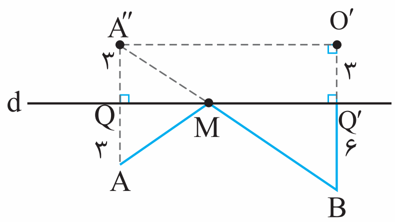
$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(N)=N \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AN=A'N$$

$$AN+NB=A'N+NB=A'B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B$ می‌سازیم. $A'O=HH'=۱۲$ و $BO=OH'+H'B=۵$ است.

$$A'B^{۲}=BO^{۲}+A'O^{۲}=۲۵+۱۴۴=۱۶۹ \Rightarrow A'B=۱۳$$

نقطه **A** را نسبت به خط **d** بازتاب می‌کنیم و آن را A'' می‌نامیم و A'' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند، $AM+MB$ کم‌ترین مقدار ممکن را دارد.



$$\left.\begin{matrix} S(A)=A'' \\ S(M)=M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A''M$$

$$AM+MB=A''M+MB=A''B$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که وتر آن $A''B$ باشد.

$$BO'=BQ'+Q'O'=۶+۳=۹$$

$$A''O'=QQ'=۱۲$$

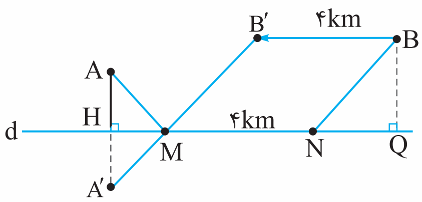
$$A''B^{۲}=BO'^{۲}+A''O'^{۲}=۹^{۲}+۱۲^{۲}=۸۱+۱۴۴=۲۲۵ \Rightarrow A''B=۱۵$$

$$\text{کم‌ترین محیط } AMBN = AM+MB+BN+NA$$

$$=A'B+A''B=۱۳+۱۵=۲۸$$

۹- متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به **d** را A' می‌نامیم و نقطه **B** را با برداری موازی **d** به طول ۴ به سمت **A** انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به‌دست آید، سپس A' را به B' وصل می‌کنیم تا **d** را در نقطه **M** قطع کند. از **M** به طول ۴ واحد به سمت **B** روی خط **d** حرکت می‌کنیم تا به نقطه **N** برسیم مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



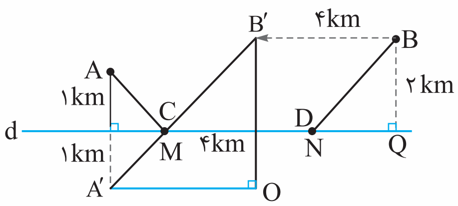
$$MN \overset{\parallel}{=} BB' \Rightarrow \square_{MNBB'} \text{ متوازی‌الاضلاع} \Rightarrow MB'=NB$$

$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا}} AM=A'M$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر} = AM+MN+NB=A'M+۴+MB'=A'B'+۴$$

۱۰- متوسط

بازتاب **A** نسبت لبه رودخانه (خط **d**) را A' می‌نامیم و سپس نقطه **B** را به اندازه ۴ km موازی لبه رودخانه به سمت **A** انتقال می‌دهیم. سپس A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. سپس از **M** روی خط به اندازه ۴ km به طرف **Q** می‌رویم و آن را N می‌نامیم. مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



$$\left.\begin{matrix} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{بازتاب طولپا}} AM=A'M$$

$$MN \parallel BB' \ , \ MN=BB'=۴ \Rightarrow \square_{BB'MN} \text{ متوازی‌الاضلاع}$$
$$\Rightarrow B'M=BN$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر} = AM+MN+NB=A'M+۴+B'M=A'B'+۴$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B'$ وتر آن باشد.

$$A'O=۸-۴=۴$$

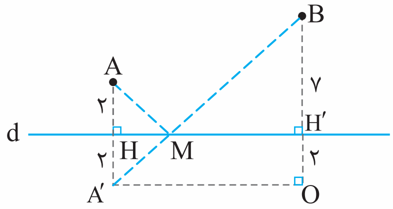
$$B'O=۲+۱=۳$$

$$\overset{\triangle}{A'OB'}: A'B'^{۲}=A'O^{۲}+B'O^{۲}=۱۶+۹=۲۵ \Rightarrow A'B'=۵$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین مسیر} = A'B'+۴=۵+۴=۹\text{ km}$$

۱۱- دشوار

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. مسیر **AMN** کوتاه‌ترین مسیر است.



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AM=A'M$$

کوتاه‌ترین مسیر $= AM+MB = A'M+MB = A'B = ۱۵$

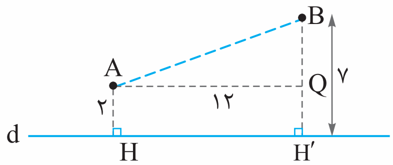
مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B$ می‌سازیم. $BO = BH' + H'O = ۹$

$$A'B^۲ = OB^۲ + A'O^۲ \Rightarrow ۲۲۵ = ۸۱ + A'O^۲$$

$$\Rightarrow A'O^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow A'O = ۱۲ \Rightarrow HH' = ۱۲$$

حال می‌خواهیم فاصله **A** تا **B** را بدست آوریم از **A** بر BH' عمود **AQ** را رسم می‌کنیم.

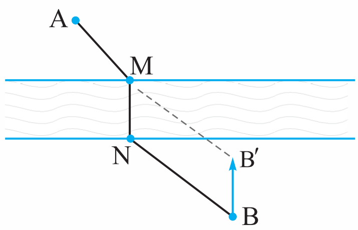
در این‌صورت $AQ = HH' = ۱۲$ و $BQ = BH' - QH' = ۷ - ۲ = ۵$.



$$\overset{\Delta}{ABQ}: AB^۲ = AQ^۲ + QB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۴۴ + ۲۵ = ۱۶۹$$
$$\Rightarrow AB = ۱۳$$

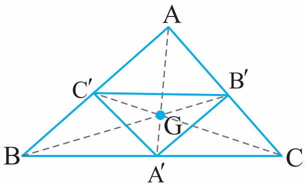
۱۲- آسان

نقطه **B** را با برداری موازی و هم‌اندازه عرض رودخانه (**MN**) انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به‌دست آید. **A** را به B' وصل می‌کنیم تا لبه رودخانه را در نقطه **M** قطع کند، پس از **M** به لبه دیگر رودخانه عمود می‌کنیم نقطه **N** به‌دست آید، مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



۱۳- دشوار

آ) از خواص میانه‌ها می‌دانیم:



$$\frac{GA'}{AG} = \frac{GB'}{BG} = \frac{GC'}{GC} = \frac{۱}{۲}$$

مجانس نقطه **A** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ نقطه A' می‌شود.

مجانس نقطه **B** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ نقطه B' می‌شود.

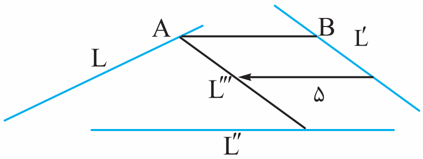
مجانس نقطه **C** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ نقطه C' می‌شود.

ب) پس مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث **ABC** به مرکز **G** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ است و می‌دانیم در تجانس نسبت مساحت‌ها برابر $k^۲$ است.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^۲ = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

۱۴- آسان

خط L' را با برداری به طول ۵ موازی L'' انتقال می‌دهیم تا L''' به وجود آید، L'''، **L** را در نقطه **A** قطع می‌کند. از **A** موازی L'' رسم می‌کنیم تا L' را در **B** قطع کند، طول پاره‌خط **AB** برابر ۵ است و موازی L'' است و یک سر آن روی **L** و سر دیگر روی L' است.



۱۵- متوسط

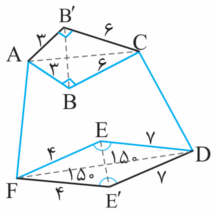
خط **d** را به مرکز **A** و با زاویه ۶۰° دوران می‌دهیم تا خط d' را در نقطه **B** قطع کند، پس نقطه **B** را به مرکز **A** و زاویه $(-۶۰)^\circ$ دوران می‌دهیم تا نقطه **C** به‌دست آید. نقطه **C** حتماً روی خط **d** است. حال مثلث **ABC** جواب مسئله است.

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۳

۱- گزینه «۲» — آسان

دو ضلع **AB** و **BC** را نسبت به پاره‌خط **AC** و دو ضلع **EF** و **ED** را نسبت به پاره‌خط **FD** بازتاب می‌کنیم. طبق خواص بازتاب دو مثلث **ABC** و $AB'C$ با هم و دو مثلث **EFD** و $FE'D$ با هم همنهشت هستند.



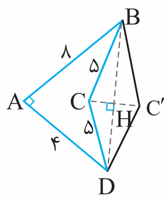
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=\frac{۱}{۲}AB.BC=\frac{۱}{۲}\times۳\times۶=۹$$

$$S_{\overset{\triangle}{EFD}}=S_{\overset{\triangle}{E'FD}}=\frac{۱}{۲}EF\times ED\times\sin۱۵۰=\frac{۱}{۲}\times۴\times۷\times\frac{۱}{۲}=۷$$

$$S_{AB'CDE'F}=S_{ABCDEF}+۲S_{\overset{\triangle}{ABC}}+۲S_{\overset{\triangle}{EFD}}$$
$$=۴۰+۲(۹)+۲(۷)=۴۰+۱۸+۱۴=۷۲$$

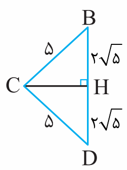
۲- گزینه «۴» — متوسط

اضلاع **BC** و **CD** را نسبت با پاره‌خط **BD** بازتاب می‌کنیم. طبق خواص بازتاب دو مثلث **BCD** و $BC'D$ همنهشت هستند.



$$\overset{\triangle}{ABD}: BD^۲=AB^۲+AD^۲=۶۴+۱۶=۸۰\Rightarrow BD=۴\sqrt{۵}$$

چون مثلث **CBD** متساوی‌الساقین است، ارتفاع وارد بر قاعده میانه هم می‌باشد. $BH=HD=۲\sqrt{۵}$

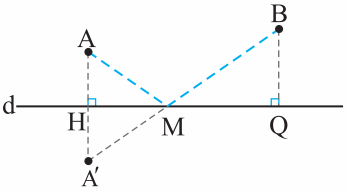


$$\overset{\triangle}{BCH}: BC^۲=CH^۲+BH^۲\Rightarrow ۲۵=CH^۲+۲۰\Rightarrow CH^۲=۵\Rightarrow CH=\sqrt{۵}$$

$$S_{\text{زمین}}=S_{\overset{\triangle}{ABD}}+S_{\overset{\triangle}{BC'D}}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۴+\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵}\times۴\sqrt{۵}=۱۶+۱۰=۲۶$$

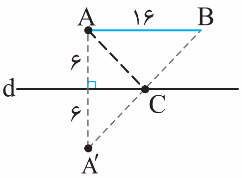
۳- گزینه «۱» — آسان

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** (نقطه A') را به‌دست می‌آوریم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در نقطه **M** قطع کند. مسیر **AMB** کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.



۴- گزینه «۳» — متوسط

روش ۱) $S=\frac{۱}{۲}AB\times h\Rightarrow ۴۸=\frac{۱}{۲}\times۱۶\times h\Rightarrow h=۶$



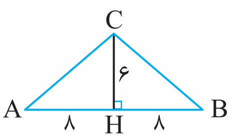
به فاصله ۶ واحد از پاره‌خط **AB**، خط **d** را موازی **AB** رسم می‌کنیم. سپس بازتاب نقطه **A** را نسبت به خط **d**، A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در نقطه **C** قطع کند، مثلث **ABC** جواب مسئله است. چون بازتاب طولپا است $AC=A'C$.

$$AC+BC=A'C+BC=A'C$$

$$\overset{\triangle}{AA'B}: A'B^۲=A'A^۲+AB^۲=(۱۲)^۲+(۱۶)^۲=۱۴۴+۲۵۶=۴۰۰$$
$$\Rightarrow A'C=۲۰$$

$$\text{محیط مثلث }ABC=\underbrace{AC+CB}_{A'B}+AB=A'B+AB=۲۰+۱۶=۳۶$$

روش ۲) برای اینکه مثلث **ABC** کم‌ترین محیط را داشته باشد، این مثلث حتماً باید متساوی‌الساقین باشد ($AC=BC$) پس ارتفاع **CH** میانه هم می‌باشد.



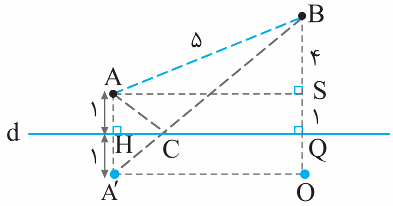
$$S=\frac{۱}{۲}CH\times AB\Rightarrow ۴۸=\frac{۱}{۲}\times CH\times۱۶\Rightarrow CH=۶$$

$$\overset{\triangle}{AHC}: AC^۲=AH^۲+CH^۲=۶۴+۳۶=۱۰۰\Rightarrow AC=BC=۱۰$$

$$\text{محیط }ABC=AC+BC+AB=۱۰+۱۰+۱۶=۳۶$$

۵- گزینه «۳» متوسط

از **A** به **BQ** عمود **AS** را رسم می‌کنیم $AH = SQ = ۱$ و $BS = ۴$ است.



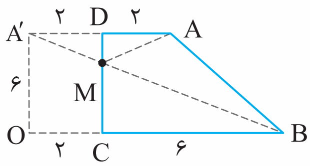
$$\overset{\Delta}{ASB}: AB^۲ = AS^۲ + BS^۲ \Rightarrow ۲۵ = AS^۲ + ۱۶$$
$$\Rightarrow AS^۲ = ۹ \Rightarrow AS = ۳$$

بازتاب نقطه **A** نسبت به **d** (نقطه A') را پیدا می‌کنیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا خط **d** را در نقطه **C** قطع کند، $AC + CB$ کوتاه‌ترین فاصله را دارد که برابر $A'B$ است. حال مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که وتر آن $A'B$ باشد. $A'O = AS = ۳$ و $BO = BQ + HA' = ۶$.

$$A'B^۲ = A'O^۲ + OB^۲ = ۹ + ۳۶ = ۴۵ = ۹ \times ۵$$
$$\Rightarrow A'B = ۳\sqrt{۵} \Rightarrow AC + CB = ۳\sqrt{۵}$$

۶- گزینه «۱» متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به ضلع **BC** نقطه A' است ($A'D = DA = ۲$) که A' را به **B** وصل می‌کنیم تا ضلع **DC** را در **M** قطع کند، $AM + MB$ در این حالت کمترین مقدار را دارد که برابر $A'B$ است.

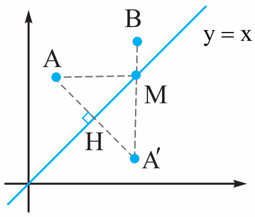


مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B$ وتر آن باشد در این‌صورت $OB = OC + CB = ۸$ و $A'O = DC = ۶$ است.

$$A'B^۲ = A'O^۲ + OB^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰ \Rightarrow A'B = ۱۰$$

۷- گزینه «۲» متوسط

همواره بازتاب نقطه $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به صورت (y,x) است.

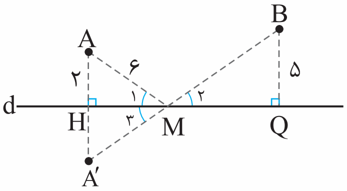


بازتاب **A** نسبت به خط $y = x$ را A' می‌نامیم پس $A'(۷,۲)$ است. اگر A' را به **B** وصل کنیم تا خط $y = x$ را در **M** قطع کند. مسیر **AMB** جواب مسئله است که $AM + MB = A'B$ است.

$$A'B = \sqrt{(x_{A'} - x_B)^۲ + (y_{A'} - y_B)^۲} = \sqrt{(۷-۳)^۲ + (۲-۵)^۲}$$
$$= \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۸- گزینه «۴» متوسط

ابتدا نقطه **A** را نسبت به خط **d** بازتاب داده و نقطه حاصل را A' می‌نامیم، محل تلاقی $A'B$ با خط **d** نقطه **M** است که طبق خواص بازتاب $\hat{M}_1 = \hat{M}_3$ و چون $\hat{M}_3$ و $\hat{M}_2$ متقابل به رأس هستند پس با هم برابر هستند بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ است یعنی **M** همان نقطه **N** است.



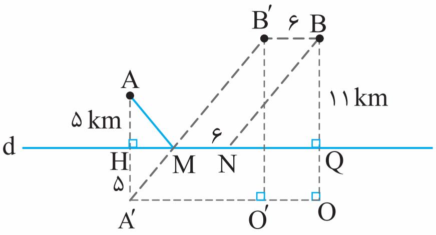
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_1 = \hat{M}_3 \\ \hat{H} = \hat{Q} = ۹۰\end{array}\right\} \xrightarrow{زز} \overset{\Delta}{AMH} \sim \overset{\Delta}{MBQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{BQ} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۶}{BM} \Rightarrow BM = ۱۵$$

$$MA + MB = ۶ + ۱۵ = ۲۱$$

۹- گزینه «۲» متوسط

بازتاب نقطه **A** را نسبت به خط **d** بدست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم و نقطه **B** را با برداری به طول ۶ موازی ساحل انتقال می‌دهیم تا به B' برسیم و A' را به B' وصل می‌کنیم تا ساحل را در **M** قطع کند، از **M** به اندازه ۶ km روی ساحل حرکت می‌کنیم تا به **N** برسیم. مسیر **AMNB** جواب مسئله است که $AM + NB$ برابر $A'B'$ است و $MN = ۶$ است، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B'$ وتر آن باشد.



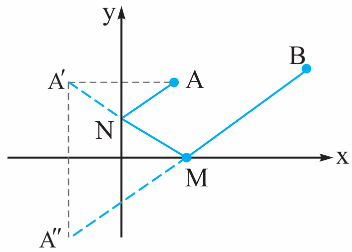
$$A'O' = HQ - MN = ۱۲ \text{ و } B'O' = BO = BQ + QO = ۱۱ + ۵ = ۱۶$$

$$\overset{\Delta}{A'O'B'}: A'B'^۲ = A'O'^۲ + O'B'^۲ = ۱۲^۲ + ۱۶^۲ = ۱۴۴ + ۲۵۶ = ۴۰۰$$
$$\Rightarrow A'B' = ۲۰$$

$$\text{کوتاه‌ترین مسیر} = AM + MN + NB = (AM + NB) + ۶$$
$$= A'B' + ۶ = ۲۰ + ۶ = ۲۶$$

۱۰- گزینه «۳» — دشوار

روش اول) بازتاب **A** را نسبت به محور **y**، A' می‌نامیم و بازتاب A' را نسبت به محور **x**، A'' می‌نامیم. A'' را به **B** وصل می‌کنیم تا محور **x** را در **M** قطع کند، A' را به **M** وصل می‌کنیم تا محور **y** را در **N** قطع کند، مسیر **ANMB** جواب مسئله است، چون بازتاب طولپا است $AN = A'N$ و $A'M = A''M$ است.



کوتاه‌ترین مسیر $= AN + NM + MB = A'N + NM + MB$

$= A'M + MB = A'B$

$A(۳,۵) \xrightarrow{\text{بازتاب محور } y} A'(-۳,۵) \xrightarrow{\text{بازتاب نسبت به محور } x} A''(-۳,-۵)$

$A''B = \sqrt{(x_{A''} - x_B)^۲ + (y_{A''} - y_B)^۲} = \sqrt{(-۳-۹)^۲ + (-۵-۱۱)^۲}$

$= \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶} = ۲۰$

روش دوم) اگر از نقطه **A** به محور **y** و سپس به محور **x** و بعد از آن به نقطه **B** بخواهیم برویم تا طول مسیر کوتاه‌ترین مقدار ممکن باشد، طول کوتاه‌ترین مسیر از دستور $\sqrt{(x_A + x_B)^۲ + (y_A + y_B)^۲}$ به دست می‌آید.

کوتاه‌ترین مسیر $= \sqrt{(۳+۹)^۲ + (۵+۱۱)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$

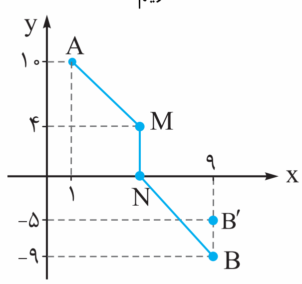
۱۱- گزینه «۴» — آسان

بنا به نکته تست قبلی، کم‌ترین طول مسیر برابر $\sqrt{(x_A + x_B)^۲ + (y_A + y_B)^۲}$ می‌باشد.

طول کوتاه‌ترین مسیر $= \sqrt{(۱+۵)^۲ + (۵+۳)^۲} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

۱۲- گزینه «۱» — دشوار

چون $MN = ۴$ است، **B** را با برداری به طول ۴ و موازی محور **y**ها به طرف بالا انتقال می‌دهیم تا نقطه B' به‌دست آید که $B'(۹,-۵)$ می‌شود، از B' به **A** وصل می‌کنیم. محل برخورد آن با محور **x**ها نقطه **N** خواهد بود. کوتاه‌ترین مسیر **AMNB** برابر $AB' + MN$ است که داریم:



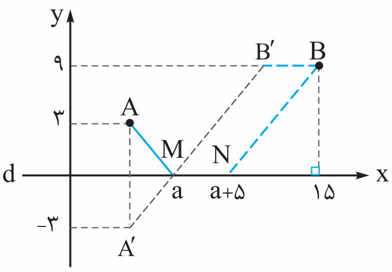
$AB' = \sqrt{(x_A - x_{B'})^۲ + (y_A - y_{B'})^۲} = \sqrt{(۱-۹)^۲ + (۱۰-(-۵))^۲}$

$= \sqrt{۶۴ + ۲۲۵} = \sqrt{۲۸۹} \Rightarrow AB' = ۱۷$

کوتاه‌ترین مسیر $= AB' + MN = ۱۷ + ۴ = ۲۱$

۱۳- گزینه «۳» — دشوار

نقطه **B** را با برداری بـه طـول ۵ مـوازی محـور **x** انتقال مـی‌دهیم تـا نقطه $B'(۱۰,۹)$ به‌دست آید و بازتـاب نقطـه **A** نسبت بـه محـور **x** را بـه‌دست می‌آوریم تا نقطه $A'(۱,-۳)$ به‌دست آید. می‌دانیم طول کوتاه‌ترین مسیر برابر $A'B' + BB'$ است که $BB' = ۵$:



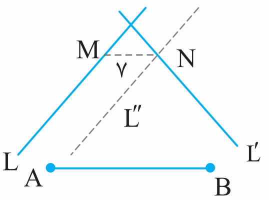
$A'B' = \sqrt{(x_{A'} - x_{B'})^۲ + (y_{A'} - y_{B'})^۲} = \sqrt{(۱-۱۰)^۲ + (-۳-۹)^۲}$

$= \sqrt{۸۱ + ۱۴۴} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$

طول کوتاه‌ترین مسیر $= A'B' + BB' = ۱۵ + ۵ = ۲۰$

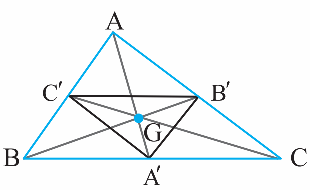
۱۴- گزینه «۲» — دشوار

خط **L** را با برداری موازی **AB** و طول ۷ انتقال مـی‌دهیم تـا خـط L' را در نقطه **N** قطع کند. از **N** خطی موازی **AB** رسم مـی‌کنیم تـا خـط **L** را در **M** قطع کند **NM** جواب مسئله است. حال می‌توانیم به جای خـط **L**، خـط L' را انتقال دهیم تا **L** را قطع کند و از آن نقطه موازی **AB** رسم مـی‌کنیم تـا خـط L' را قطع کند، پس مسئله ۲ جواب دارد.



۱۵- گزینه «۱» — آسان

چون **G** (مرکز ثقل) بین **A** و A' و همین‌طور بین **B** و B' و بین **C** و C' است پس $k < ۰$ است و داریم:



$\frac{A'G}{AG} = \frac{B'G}{BG} = \frac{C'G}{CG} = \frac{۱}{۲} = |k| \xrightarrow{k<۰} k = -\frac{۱}{۲}$

پس با یک تجانس به مرکز، مرکز ثقل مثلث **ABC** و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$، مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث **ABC** است.

۱- آسان

آ) نادرست   ب) نادرست

پ) درست   ت) نادرست

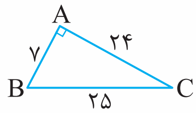
۲- آسان

آ) خط   ب) ندارد

پ) دوران   ت) حفظ می‌کند

۳- متوسط

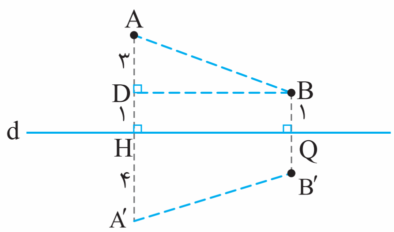
چون $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$ است پس $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است و چون تبدیل **T** طولپا است پس مساحت دو مثلث **ABC** و $A'B'C'$ با هم برابر هستند.



$$S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۲۴ = ۸۴$$

۴- دشوار

اگر بازتاب نسبت به خط **d** را **S** فرض کنیم داریم:



$$S(A) = A' \Rightarrow AH = HA' = ۴ \Rightarrow AA' = ۸$$

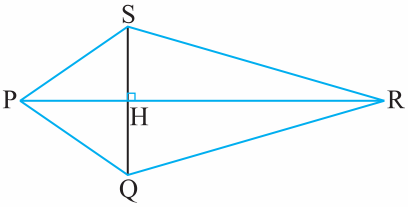
$$S(B) = B' \Rightarrow BQ = QB' = ۱ \Rightarrow BB' = ۲$$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')}{۲} \times BD \Rightarrow ۲۰ = \frac{(۸ + ۲)}{۲} \times BD \Rightarrow BD = ۴$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : AB^۲ = AD^۲ + BD^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵$$

۵- آسان

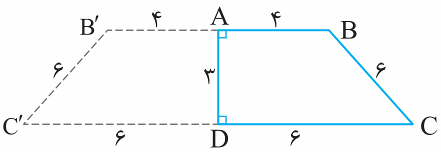
بازتاب **Q** نسبت به پاره‌خط **PR** را **S** می‌نامیم.



$$\left.\begin{array}{l} S(S) = Q \\ S(P) = P \\ S(R) = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خواص بازتاب}} \widehat{SPR} = \widehat{QPR}$$

۶- متوسط

برای اینکه شکل حاصل از ذوزنقه و تصویرش با هم بیش‌ترین محیط را داشته باشد، آن را نسبت به ضلع **AD** بازتاب می‌دهیم کـه **A** و **D** نقـاط ثابـت ایـن تبدیل هستند.



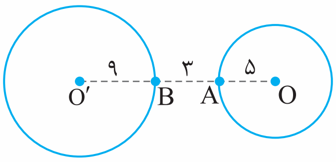
$$S(B) = B' \Rightarrow AB = AB' = ۴ \Rightarrow BB' = ۸$$

$$S(C) = C' \Rightarrow CD = DC' = ۶ \Rightarrow CC' = ۱۲$$

چون بازتاب طولپا است $BC = B'C' = ۶$.

$$\text{محیط}_{B'BCC'} = BB' + BC + CC' + B'C' = ۸ + ۶ + ۱۲ + ۶ = ۳۲$$

۷- آسان

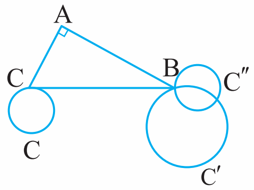


$$OO' = O'B + BA + AO = ۹ + ۳ + ۵ \Rightarrow OO' = ۱۷$$

طول بردار انتقالی که دو دایره را به دو دایره هم مرکـز تبـدیل مـی‌کنـد برابـر $OO' = ۱۷$ است.

۸- دشوار

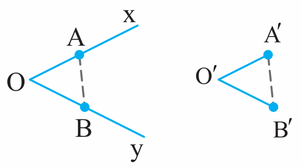
دایره C را به مرکز A و زاویه ۹۰° دوران می‌دهیم تا دایره C'' به‌دست آید. محل تقاطع دایره C'' و دایره C' یک رأس مثلث (مثلاً B) است. حال نقطه B را به مرکز A و زاویه (-۹۰°) دوران می‌دهیم تا نقطه C که حتماً روی دایره C است به‌دست آید که مثلث ABC جواب مسئله است، چون بنا به خاصیت دوران $AB=AC$ و $\widehat{BAC}$ برابر زاویه دوران یعنی ۹۰° است.



چون دایره C'' می‌تواند با دایره C' متقاطع یا مماس باشد و یا اصلاً همدیگر را قطع نکنند، مسئله می‌تواند ۲ جواب یا ۱ جواب داشته باشد و یا اینکه اصلاً جواب نداشته باشد.

۹- متوسط

نقطه A را روی Ox و نقطه B را روی Oy انتخاب می‌کنیم اگر $T(O)=O'$ و $T(A)=A'$ و $T(B)=B'$ باشد.

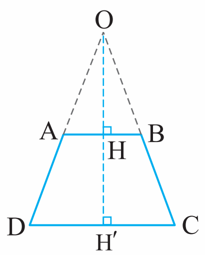


$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}T(O)=O'\\T(A)=A'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}}OA=O'A'\\\left.\begin{array}{l}T(O)=O'\\T(B)=B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}}OB=O'B'\\\left.\begin{array}{l}T(A)=A'\\T(B)=B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا}}AB=A'B'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}\overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{O'A'B'}$$

$$\xrightarrow{\text{ا.م}}\hat{O}=\hat{O}'$$

۱۰- دشوار

چون $k>۰$ است پس نقطه O خارج از فاصله AD قرار می‌گیرد و داریم:



$$\frac{OD}{OA}=k\Rightarrow\frac{OD}{OA}=۳\Rightarrow\frac{OA}{OD}=\frac{۱}{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ODH'}:AH\parallel DH'\Rightarrow\frac{OA}{OD}=\frac{OH}{OH'}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{OH'}\Rightarrow OH'=۶$$

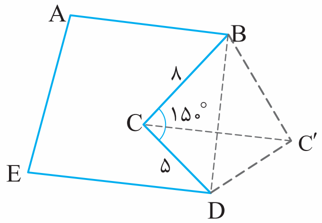
$$\Rightarrow OH+HH'=۶\Rightarrow ۲+HH'=۶\Rightarrow HH'=۴$$

از خواص تجانس می‌دانیم: $\frac{DC}{AB}=k\Rightarrow\frac{DC}{۵}=۳\Rightarrow DC=۱۵$

$$S=\frac{(AB+DC)}{۲}\times HH'\Rightarrow S=\frac{(۵+۱۵)}{۲}\times۴\Rightarrow S=۴۰$$

۱۱- متوسط

اضلاع BC و CD را نسبت به پاره‌خط BD بازتاب می‌کنیم.



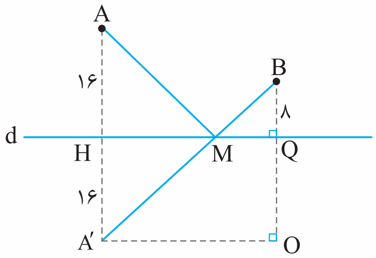
$$\left.\begin{array}{l}S(B)=B\\S(C)=C'\\S(D)=D\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{خواص بازتاب}}\overset{\Delta}{BCD}\cong\overset{\Delta}{BC'D}$$

$$S_{\text{افزایش}}=S_{\overset{\Delta}{BCD}}+S_{\overset{\Delta}{BC'D}}=۲S_{\overset{\Delta}{BCD}}=۲\times\frac{۱}{۲}\times BC\times CD\sin C$$

$$=۲\times\frac{۱}{۲}\times۸\times۵\times\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{\text{افزایش}}=۲۰$$

۱۲- دشوار

نقطه A'، بازتاب نقطه A نسبت به خط است، از A' به B وصل می‌کنیم تا خط d را در M قطع کند. مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیری است که از A به خط d و سپس به نقطه B برویم.



$$\left.\begin{array}{l}S(A)=A'\\S(M)=M\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}}AM=A'M$$

کوتاه‌ترین مسیر $=AM+MB=A'M+MB=A'B$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B$ وتر آن باشد.

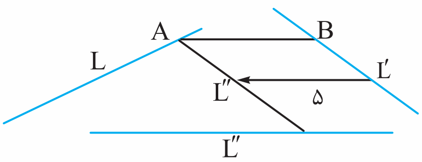
$A'O=HQ=۱۰$ و $BO=BQ+QO=۸+۱۶=۲۴$

$$\overset{\Delta}{A'OB}:A'B^۲=A'O^۲+OB^۲=(۱۰)^۲+(۲۴)^۲=۱۰۰+۵۷۶=۶۷۶$$

$$\Rightarrow A'B=۲۶$$

۱۳- متوسط

خط L' را با برداری به طول ۵ موازی L'' انتقال می‌دهیم تا L''' به‌وجود آید، L'''، L را در نقطه A قطع می‌کند، از A موازی L'' رسم می‌کنیم تا L' را در B قطع کند، طول پاره‌خط AB برابر ۵ است و موازی L'' است و یک سر آن روی L و سر دیگر روی L' است.



۱- آسان

آ) درست ب) درست

پ) نادرست ت) نادرست

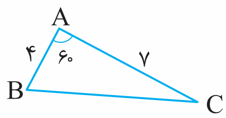
۲- آسان

آ) نقطه ثابت تبدیل ب) یک

پ) α یا $۱۸۰-\alpha$ ت) $k<۰$ (تجانس معکوس)

۳- آسان

چون تبدیل **T**، طولپا است پس مثلث $A'B'C'$ که تصویر مثلث **ABC** تحت این تبدیل است با مثلث **ABC** همنهشت است.

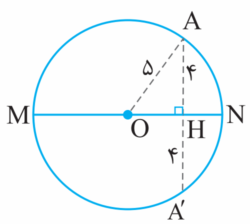


$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۷\times \sin ۶۰$$

$$=۱۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۷\sqrt{۳}$$

۴- دشوار

اگر دایره‌ای را نسبت به یک قطرش بازتاب کنیم، تصویر آن روی خودش قرار می‌گیرد و اگر این بازتاب را **S** بنامیم:

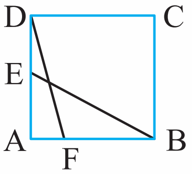


$$S(A)=A' \Rightarrow AH=A'H=۴$$

$$\overset{\Delta}{OAH}: OA^۲=AH^۲+OH^۲ \Rightarrow ۲۵=۱۶+OH^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲=۹ \Rightarrow OH=۳$$

۵- متوسط

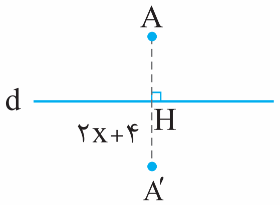


$$AE=AF \xrightarrow{\text{عکس قضیه عمودمنصف}} \text{A روی عمود منصف پاره‌خط EF}$$

بازتاب نسبت به قطر **AC** را **S** می‌نامیم و می‌دانیم قطرهای مربع عمودمنصف هم هستند.

$$\left.\begin{matrix}S(B)=D\\ S(E)=F\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} BE=DF$$

۶- آسان



$$S(A)=A' \Rightarrow AH=HA'=۲x+۴$$

$$AA'=۲A'H \Rightarrow ۷x+۲=۲(۲x+۴)$$

$$\Rightarrow ۷x+۲=۴x+۸ \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲$$

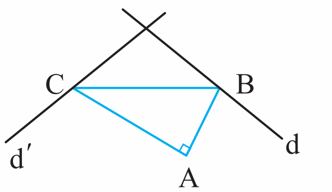
$$AH=۲x+۴=۲(۲)+۴ \Rightarrow AH=۸$$

۷- آسان

چون دو دایره بر هم منطبق شده‌اند پس طول بردار انتقال برابر OO' بوده است بنابراین $OO'=۱۴$ و چون $OO'=R+R'=۱۴$ بوده است پس دو دایره مماس خارج هستند.

۸- دشوار

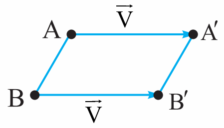
خط **d** را حول نقطه **A** با زاویه ۹۰° دوران می‌دهیم تا خط d' را در نقطه **C** قطع کند، حال نقطه **C** را به مرکز **A** و زاویه (-۹۰°) دوران می‌دهیم تا نقطه **B** که روی خط **d** است، به‌دست آید و طبق خواص دوران $AB=AC$ و زاویه **CAB** برابر زاویه دوران یعنی ۹۰° است.



۹- متوسط

قضیه را در ۲ حالت اثبات می‌کنیم.

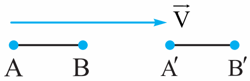
حالت ۱) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** نباشد.



$$\left.\begin{array}{l} T(A)=A' \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \\ T(B)=B' \Rightarrow BB' \overset{\parallel}{=} \vec{V} \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \overset{\parallel}{=} BB'$$

$\Rightarrow \square_{AA'B'B}$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow AB \parallel A'B'$

حالت ۲) بردار انتقال موازی پاره‌خط **AB** باشد.

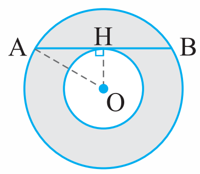


در اینصورت نقاط **A** و **B** و A' و B' روی یک خط هستند پس $AB \parallel A'B'$.

یعنی انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۱۰- دشوار

چون مرکز دایره ثابت مانده است پس مرکز دایره، مرکز تجانس بوده و $|k|=\frac{R'}{R}$ است.



$$\frac{R'}{R}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow \begin{cases} R'=۵k \\ R=۳k \end{cases}$$

اگر از **O** به نقطه تماس پاره‌خط **AB** با دایره **C** وصل کنیم، چون بر پاره‌خط **AB** عمود است پس آن را نصف می‌کند $AH=HB=۸$.

$$\overset{\triangle}{AOH}: OA^۲=OH^۲+AH^۲ \Rightarrow ۲۵k^۲=۹k^۲+۶۴$$

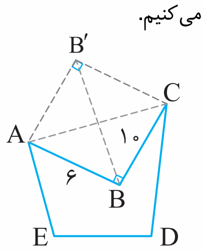
$$\Rightarrow ۱۶k^۲=۶۴ \Rightarrow k^۲=۴ \Rightarrow k=۲$$

پس $R=۶$ و $R'=۱۰$ است.

$S=\pi R'^۲-\pi R^۲=۱۰۰\pi-۳۶\pi=۶۴\pi$ رنگی

۱۱- متوسط

دو ضلع **AB** و **BC** را نسبت به پاره‌خط **AC** بازتاب می‌کنیم.

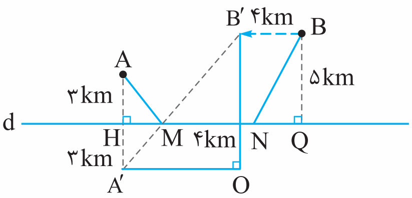


$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A \\ S(B)=B' \\ S(C)=C \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{AB'C}$$

$S_{\text{افزایش}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=۲S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۲\times\frac{۱}{۲}AB\times BC=۶\times۱۰=۶۰$

۱۲- دشوار

بازتاب **A** نسبت لبه رودخانه (خط **d**) را A' می‌نامیم و سپس نقطه **B** را به اندازه ۴ km موازی لبه رودخانه به سمت **A** انتقال می‌دهیم. سپس A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند. سپس از **M** روی خط به اندازه ۴ km به طرف **Q** می‌رویم و آن را N می‌نامیم. مسیر **AMNB** جواب مسئله است.



$$\left.\begin{array}{l} S(A)=A' \\ S(M)=M \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بازتاب طول‌ها}} AM=A'M$$

$MN \parallel BB'$, $MN=BB'=۴ \Rightarrow \square_{BB'MN}$ متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow B'M=BN$

کوتاه‌ترین مسیر $=AM+MN+NB=A'M+۴+B'M=A'B'+۴$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که $A'B'$ وتر آن باشد.

$A'O=۱۰-۴=۶$

$B'O=۵+۳=۸$

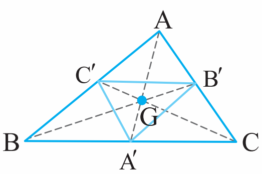
$\overset{\triangle}{A'OB'}: A'B'^۲=A'O^۲+B'O^۲ \Rightarrow A'B'^۲=۶^۲+۸^۲$

$=۳۶+۶۴=۱۰۰ \Rightarrow A'B'=۱۰$

طول کوتاه‌ترین مسیر $=A'B'+۴=۱۰+۴=۱۴$ km

۱۳- متوسط

از خواص میانه‌ها می‌دانیم:



$$\frac{GA'}{AG}=\frac{GB'}{BG}=\frac{GC'}{GC}=\frac{۱}{۲}$$

مجانس نقطه **A** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ نقطه A' می‌شود.

مجانس نقطه **B** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ نقطه B' می‌شود.

مجانس نقطه **C** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ نقطه C' می‌شود.

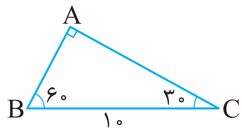
پس مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث **ABC** به مرکز **G** و نسبت $k=-\frac{۱}{۲}$ است و می‌دانیم در تجانس نسبت مساحت‌ها برابر $k^۲$ است.

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^۲=(-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

۱- گزینهٔ «۲» — آسان

تجانس طولپا نیست مگر $|k|=1$ و بازتاب و دوران الزاماً شیب را حفظ نمی‌کنند.

۲- گزینهٔ «۳» — متوسط



$$2\hat{A}=3\hat{B}=6\hat{C}=6x \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=3x\\ \hat{B}=2x\\ \hat{C}=x\end{cases}$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180 \Rightarrow 3x+2x+x=180 \Rightarrow 6x=180 \Rightarrow x=30$$

پس $\hat{A}=90^\circ$ و $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=30^\circ$ است. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° نصف وتر و ضلع روبه‌رو به زاویه 60°، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

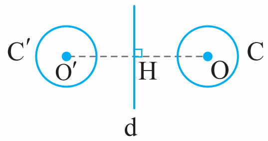
$$AB=\frac{1}{2}BC=5 \qquad AC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=5\sqrt{3}$$

چون تبدیل طولپا است پس دو مثلث **ABC** و $A'B'C'$ همنهشت هستند و مساحت برابر دارند.

$$S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}\times 5\times 5\sqrt{3}=\frac{25}{2}\sqrt{3}$$

۳- گزینهٔ «۱» — متوسط

می‌دانیم بازتاب تبدیل طولپا است پس $R=R'=6$.



$$S(O)=O' \Rightarrow OH=O'H=6/5 \Rightarrow OO'=13$$

حال طول مماس مشترک داخلی دو دایره را محاسبه می‌کنیم.

$$TT'=\sqrt{OO'^2-(R+R')^2}=\sqrt{13^2-(6+6)^2}$$
$$=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$$

۴- گزینهٔ «۳» — آسان

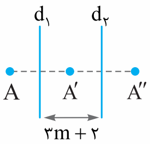
ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز دوران محل تلاقی محورها است و زاویه دوران دو برابر زاویه بین دو محور است.

۵- گزینهٔ «۲» — آسان

در واقع متوازی‌الاضلاع نسبت به دو محور متقاطع بازتاب شده است و می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است و در دوران تنها نقطه ثابت تبدیل مرکز دوران است که محل تقاطع دو قطر متوازی‌الاضلاع است.

۶- گزینهٔ «۴» — آسان

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است که بردار انتقال عمود بر دو محور بازتاب عمود است و طول آن دو برابر فاصله دو خط است.



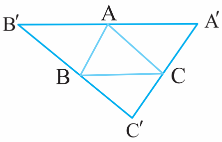
$$AA''=2(3m+2) \Rightarrow 9m-2=6m+4 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2$$

می‌دانیم در انتقال $AA''=BB''$ است.

$$BB''=AA''=9m-2=9(2)-2=16$$

۷- گزینهٔ «۲» — دشوار

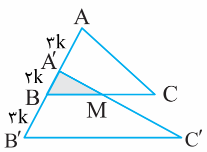
می‌دانیم انتقال شیب را حفظ می‌کند و همچنین انتقال طولپا است. پس دو چهارضلعی $BB'AC$ و $AA'CB$ متوازی‌الاضلاع هستند بنابراین $AA'=BC$ و $AB'=BC$ است پس $A'B'=2BC$ است، به همین ترتیب $B'C'=2AC$ و $A'C'=2AB$ می‌باشد پس چون $\frac{A'B'}{BC}=\frac{B'C'}{AC}=\frac{A'C'}{AB}=2$ است دو مثلث بنا به حالت سه ضلع متشابه هستند.



$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2=4$$

۸- گزینهٔ «۴» — دشوار

می‌دانیم در انتقال شیب حفظ می‌شود ($BC \parallel B'C'$) و انتقال طولپا است پس مساحت مثلث **ABC** با مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر است و $BB'=AA'$ است.



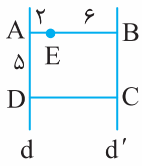
$$BM \parallel B'C' \xrightarrow{\text{اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{A'BM} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$

نسبت تشابه $k=\frac{A'B}{A'B'}=\frac{2k}{5k}=\frac{2}{5}$ است پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle A'B'C'}}=k^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{4}{25}$$

۹- گزینه «۴» آسان

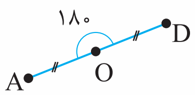
ترکیب دو بازتاب با محورهای موای یک انتقال است کـه طـول بـردار آن دو برابر فاصله بین دو محور است پس فاصله دو نقطه **E** و E' (بازتاب **E** نسبت به دو محور **d** و d') دو برابر فاصله **d** تا d' (**AB**) است.



$$EE' = ۲AB = ۲(۸) = ۱۶$$

۱۰- گزینه «۱» متوسط

ترکیب چند دوران با یک مرکز، خـود یـک دوران بـا همـان مرکـز و مجمـوع زوایای دوران‌ها مـی‌باشـد بنـابراین نقطـه **D** دوران نقطـه **A** بـه مرکـز مبـدأ مختصات و زاویه ($۴۰ + ۸۰ + ۶۰ = ۱۸۰^\circ$) است.

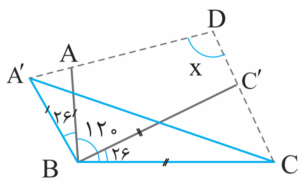


در دوران ۱۸۰° نقطه دوران دقیقاً وسط نقطه و تصویر آن است پس داریم:

$$AD = ۲AO = ۲\sqrt{(۴-۰)^۲ + (-۳-۰)^۲} = ۲\sqrt{۱۶+۹} = ۲\sqrt{۲۵} = ۱۰$$

۱۱- گزینه «۱» دشوار

روش ۱) طبـــــــق خـــــــواص دوران $BA = BA'$ و $BC = BC'$ و $\widehat{ABA'} = \widehat{CBC'} = ۲۶^\circ$ است.



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABA'}: BA = BA' \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} \widehat{BAA'} = \widehat{BA'A} \\ \widehat{ABA'} = ۲۶\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BA'A} = ۷۷^\circ$$

به همین ترتیب $\widehat{BCC'} = ۷۷^\circ$ است، در چهارضلعی $BA'DC$ داریم:

$$\widehat{CBA'} + \widehat{BA'D} + \hat{D} + \widehat{DCB} = ۳۶۰ \Rightarrow (۱۲۰ + ۲۶) + ۷۷ + x + ۷۷ = ۳۶۰$$

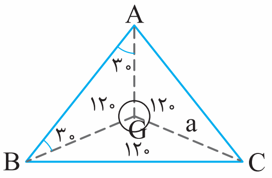
$$\Rightarrow ۳۰۰ + x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۶۰$$

روش ۲) همواره این زاویه مکمل زاویه **B** است یعنی:

$$\hat{B} + \hat{x} = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۲۰ + x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

۱۲- گزینه «۲» متوسط

در مثلث متساوی‌الاضلاع، نیمساز، عمودمنصف و میانه نظیر یک ضلـع بـر هـم منطبق هستند پس **G** محل تلاقی نیمسازها هم می‌باشد.



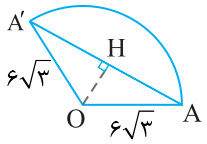
$$\widehat{GAB} = \widehat{GBA} = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{AGB}: \widehat{GAB} + \widehat{GBA} + \widehat{AGB} = ۱۸۰$$
$$\Rightarrow ۳۰ + ۳۰ + \widehat{AGB} = ۱۸۰ \Rightarrow \widehat{AGB} = ۱۲۰$$

به همین ترتیب $\widehat{BGC}$ و $\widehat{AGC}$ هم برابـر ۱۲۰° اسـت. پـس بـا دوران بـه مرکز **G** و زاویه ۱۲۰، مثلث **ABC** بر خودش منطبق می‌شود.

۱۳- گزینه «۳» متوسط

چون کمان $\widehat{AA'} = ۱۲۰^\circ$ است پس $AA' = R\sqrt{۳}$ است که



$$AA' = ۶\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۱۸$$

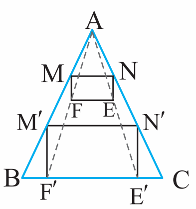
می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر از همان دایـره عمـود کنـیم، آن وتـر را نصف می‌کند پس $AH = A'H = \frac{۱۸}{۲} = ۹$.

$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = OH^۲ + ۹^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰۸ = OH^۲ + ۸۱ \Rightarrow OH^۲ = ۲۷ \Rightarrow OH = ۳\sqrt{۳}$$

۱۴- گزینه «۴» دشوار

پاره‌خط **MN** را موازی **BC** رسم می‌کنـیم، روی **MN** مربـع **MNEF** را بنـا می‌کنیم. از **A** به **E** و **F** وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا **BC** را در نقاط E' و F' قطع کنند. از نقاط E' و F' عمودهایی بر **BC** رسم مـی‌کنـیم تـا **AC** و **AB** را در N' و M' قطع کنند در این صورت $M'N'E'F'$ مجـانس مربـع **MNEF** به مرکز **A** خواهد بود.



۱۵- گزینه «۳» آسان

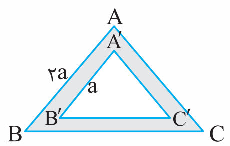
طبق تعریف تجانس اگر M' مجانس نقطه **M** به مرکز **O** و نسبت **k** باشد

$$OM' = KOM \Rightarrow OM = \frac{1}{k}OM' \qquad (k > 0)$$

یعنی **M** مجانس M' به مرکز **O** و نسبت $\frac{1}{k}$ است.

۱۶- گزینه «۱» دشوار

اگر فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث **ABC** برابر $2a$ است طبق خواص تجانس داریم:



$$\frac{A'B'}{AB} = |k| \Rightarrow \frac{A'B'}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'B' = a$$

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** از دستور $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به‌دست می‌آید.

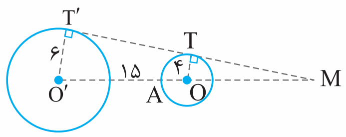
$$S_{\text{رنگی}} = S_{\overset{\triangle}{ABC}} - S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} \Rightarrow 12\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2a)^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\Rightarrow 12\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{محیط } ABC + \text{محیط } A'B'C' = 3(2a) + 3a = 9a = 9(4) = 36$$

۱۷- گزینه «۳» متوسط

مرکز تجانس دو دایره محل تلاقی مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین است.



می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس، در نقطه تماس به خط مماس عمود است، پس $OT \perp MT'$ و $O'T' \perp MT'$ است که یعنی $OT \parallel O'T'$.

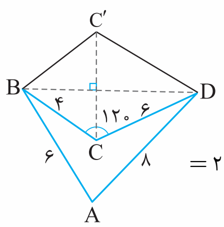
$$\overset{\triangle}{O'MT'} : OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MO}{MO'} = \frac{OT}{OT'}$$

$$\Rightarrow \frac{MO}{MO+15} = \frac{4}{6} \Rightarrow 3OM = 2OM + 30 \Rightarrow OM = 30$$

$$C \text{ تا دایره } M \text{ بیشترین فاصله} = MA = MO + OA = 30 + 4 = 34$$

۱۸- گزینه «۲» متوسط

اضلاع **BC** و **CD** را نسبت به پاره‌خط **BD** بازتاب می‌کنیم به دلیل خواص بازتاب دو مثلث **BCD** و $BC'D$ همنهشت هستند پس مساحت برابری دارند.

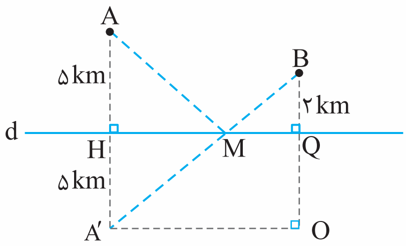


$$\text{افزایش مساحت } S = S_{\overset{\triangle}{BCD}} + S_{\overset{\triangle}{BC'D}} = 2S_{\overset{\triangle}{BCD}}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} BC \times CD \times \sin 120 = 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

۱۹- گزینه «۱» متوسط

بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را A' می‌نامیم و A' را به **B** وصل می‌کنیم تا **d** را در **M** قطع کند. مسیر **AMB** جواب مسئله است که کوتاه‌ترین مسیر $AM + MB$ است.



$$\left.\begin{matrix} S(A) = A' \\ S(M) = M \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM = A'M$$

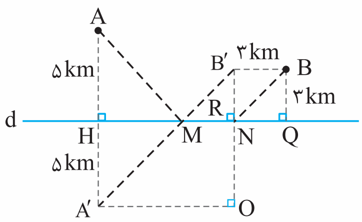
$$\text{کوتاه‌ترین فاصله} = AM + MB = A'M + MB = A'B$$

پس مثلث قائم‌الزاویه با وتر $A'B$ می‌سازیم که $BO = BQ + QO = 7$ و $A'O = HQ = 24$ است.

$$A'B^2 = A'O^2 + OB^2 = (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow A'B = 25$$

۲۰- گزینه «۴» دشوار

ابتدا بازتاب نقطه **A** نسبت به خط **d** را پیدا می‌کنیم و آن را A' می‌نامیم و سپس نقطه **B** را با برداری به طول ۳ موازی ساحل انتقال می‌دهیم تا به نقطه B' برسیم. A' را به B' وصل می‌کنیم تا خط **d** را در **M** قطع کند، سپس **M** را با برداری برابر $\overrightarrow{BB'}$ روی ساحل رودخانه انتقال می‌دهیم تا نقطه **N** به‌دست آید، مسیر **AMNB** کوتاه‌ترین مسیر است.



$$\left.\begin{matrix} S(A) = A' \\ S(M) = M \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} AM = A'M$$

چون $MN \overset{\parallel}{=} BB'$ پس $B'BNM$ متوازی‌الاضلاع است پس $MB' = NB$.

$$\text{کوتاه‌ترین فاصله} = AM + MN + NB = A'M + 3 + MB' = A'B' + 3$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر $A'B'$ می‌سازیم که $B'O = B'R + RO = 8$ و $A'O = HQ - MN = 6$ است.

$$(A'B')^2 = A'O^2 + OB'^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow A'B' = 10$$

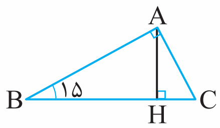
$$\text{کوتاه‌ترین طول مسیر} = A'B' + 3 = 10 + 3 = 13$$

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون پلاس

۱- گزینه «۳»

اگر m_a و m_b و m_c میانه‌های مثلث قائم‌الزاویه باشد (m_a میانه وارد بر وتر است) داریم:



$m_b^۲+m_c^۲=۵m_a^۲$

$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=۹۶\Rightarrow m_a^۲+۵m_a^۲=۹۶\Rightarrow ۶m_a^۲=۹۶\Rightarrow m_a^۲=۱۶$

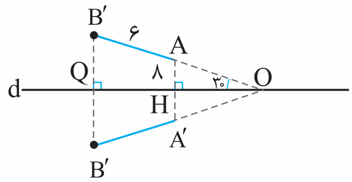
$\Rightarrow m_a=۴$

می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس $BC=a=۲m_a=۸$ و در مثلث قائم‌الزاویه، اگر اندازه یک زاویه حاده ۱۵ درجه باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است پس داریم: $AH=\frac{BC}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$.

هم بازتاب و هم دوران تبدیلات طولپا هستند، پس مساحت شکل حاصل با مساحت شکل اولیه برابر است پس داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۸=۸$$

۲- گزینه «۴»



$\overset{\triangle}{OAH}:\sin ۳۰=\frac{AH}{OA}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۸}{OA}\Rightarrow OA=۱۶$

$OB=OA+AB=۱۶+۶\Rightarrow OB=۲۲$

$\overset{\triangle}{OBQ}:\sin ۳۰=\frac{BQ}{OB}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{BQ}{۲۲}\Rightarrow BQ=۱۱$

$S(A)=A'\Rightarrow AH=HA'\Rightarrow AA'=۲AH=۲(۸)\Rightarrow AA'=۱۶$

$S(B)=B'\Rightarrow BQ=QB'\Rightarrow BB'=۲BQ=۲(۱۱)\Rightarrow BB'=۲۲$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{OAH}:\cos ۳۰=\frac{OH}{OA}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{OH}{۱۶}\Rightarrow OH=۸\sqrt{۳}\\ \overset{\triangle}{OBQ}:\cos ۳۰=\frac{OQ}{OB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{OQ}{۲۲}\Rightarrow OQ=۱۱\sqrt{۳}\end{array}\right\}$$

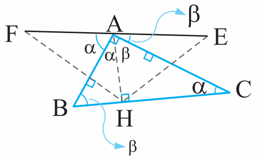
$\Rightarrow HQ=OQ-OH$

$=۱۱\sqrt{۳}-۸\sqrt{۳}\Rightarrow HQ=۳\sqrt{۳}$

$$S_{ABB'A'}=\frac{(AA'+BB')}{۲}\times HQ=\frac{(۱۶+۲۲)}{۲}\times ۳\sqrt{۳}\Rightarrow S=۵۷\sqrt{۳}$$

۳- گزینه «۱»

چون $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ است پس مثلث در رأس **A** قائمه است.



ارتفاع **AH** را رسم می‌کنیم و سپس بازتاب نقطه **H** را نسبت به اضلاع **AC** و **AB** به ترتیب **E** و **F** می‌نامیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه **AHB** و **AHC** داریم، $\widehat{HAB}=\alpha$ و $\widehat{HAC}=\beta$ است و چون $\alpha+\beta=۹۰$ است پس $\widehat{EAF}=۲\alpha+۲\beta=۱۸۰$ است یعنی **E** و **A** و **F** روی یک خط قرار دارند.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}S_{AC}(A)=A\\ S_{AC}(H)=E\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}}AH=AE\\ \left.\begin{array}{l}S_{AB}(A)=A\\ S_{AB}(H)=F\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}}AH=AF\end{array}\right\}\Rightarrow AE+AF=۲AH$$

$\Rightarrow EF=۲AH$

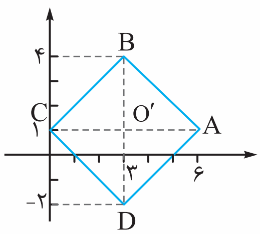
$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}AB\times AC\Rightarrow AH\times BC=AB\times AC$

$\Rightarrow ۵AH=\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۵}\Rightarrow AH=\sqrt{۶}$

پس $EF=۲AH=۲\sqrt{۶}$.

۴- گزینه «۴»

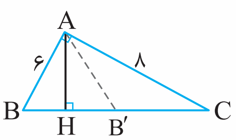
چون بازتاب نقطه **C** نسبت به محور **y**ها خودش است پس نقطه **C** نقطه ثابت تبدیل است و روی محور **y** قرار دارد یعنی $C(۰,۱)$ است و معادله قطر **AC** برابر $y=۱$ است و $AC=۶$ است و نقطه O' محل برخورد قطرهای مربع $O'(۳,۱)$ است پس قطر **BD** روی خط $x=۳$ قرار دارد بنابراین $B(۳,۴)$ است و بازتاب نقطه **D** نسبت به قطر **AC** نقطه **B** است.



$BO=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$

۵- گزینه «۳»

با توجه به اینکه $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ آنگاه $\hat{A}=۹۰^\circ$ است. طبق روابط مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$AB^۲=BH\times BC\Rightarrow ۳۶=BH\times ۱۰$

$\Rightarrow BH=۳/۶$

پس $CH=BC-BH=۱۰-۳/۶=۶/۴$.

$S(B)=B'\Rightarrow BH=HB'=۳/۶$

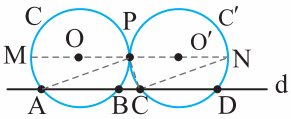
$B'C=HC-HB'=۶/۴-۳/۶\Rightarrow B'C=۲/۸$

$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}AB\times AC\Rightarrow AH\times ۱۰=۶\times ۸\Rightarrow AH=۴/۸$

$S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=\frac{۱}{۲}AH\times B'C=\frac{۱}{۲}\times ۴/۸\times ۲/۸\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AB'C}}=۶/۷۲$

۶- گزینه «۴»

چون دو دایره مساوی هستند، پس می‌توان گفت که دایره C'، انتقال یافته دایره **C** با بردار $OO'=۲R$ است و می‌دانیم، انتقال طولپا است چون **d** موازی OO' است پس نقطه **C** تصویر نقطه **A** و نقطه **D** تصویر نقطه **B** در این انتقال است، بنابراین $AC=BD=۲R$.



در چهارضلعی **APNC** چون $AC=PN=۲R$ و $AC \parallel PN$ است، پس متوازی‌الاضلاع است بنابراین $AP \parallel CN$ است.

$$AP\parallel CN \;,\; \text{مورب } CP \xrightarrow{\text{خطوط موازی}} \widehat{APC}=\widehat{PCN} \quad (۱)$$

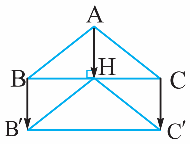
$$\widehat{PCN}=۹۰^\circ \;\text{ محاطی روبه قطر} \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\widehat{APC}=۹۰^\circ$ و به همین ترتیب $\widehat{BPD}=۹۰^\circ$ است.

$$\widehat{APC}+\widehat{BPD}=۹۰+۹۰=۱۸۰^\circ$$

۷- گزینه «۲»

می‌دانیم اگر قطر یک متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم دو مثلث هم‌مساحت به وجود می‌آید.



$$BB' \overset{\parallel}{=} AH \overset{\parallel}{=} \vec{V} \Rightarrow ABB'H \text{ متوازی‌الاضلاع} \xrightarrow{\text{قطر } BH} S_{\overset{\triangle}{ABH}} = S_{\overset{\triangle}{BB'H}}$$

$$CC' \overset{\parallel}{=} AH \overset{\parallel}{=} \vec{V} \Rightarrow ACC'H \text{ متوازی‌الاضلاع} \xrightarrow{\text{قطر } CH} S_{\overset{\triangle}{AHC}} = S_{\overset{\triangle}{HCC'}}$$

چون انتقال یک تبدیل طولپا است پس دو مثلث **ABC** و $A'B'C'$ همنهشت هستند و مساحت برابری دارند.

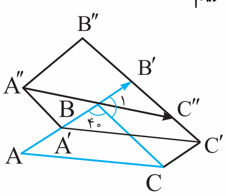
$$S_{ABB'C'C}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{BHB'}}+S_{\overset{\triangle}{HB'C'}}+S_{\overset{\triangle}{CC'H}}$$

$$=S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{ABH}}+S_{\overset{\triangle}{ABC}}+S_{\overset{\triangle}{AHC}}$$

$$\Rightarrow S_{ABB'C'C}=۲S_{\overset{\triangle}{ABC}}+(S_{\overset{\triangle}{ABH}}+S_{\overset{\triangle}{AHC}})=۳S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۳(۱۲)=۳۶$$

۸- گزینه «۱»

می‌دانیم، انتقال شیب خط را حفظ می‌کند بنابراین داریم:



$$\left.\begin{matrix} BB'\parallel CC'\parallel V \\ BC\parallel B'C'\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{چهارضلعی } BB'C'C \text{ متوازی‌الاضلاع}$$

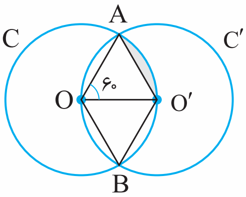
$$\hat{B}_1=۱۸۰-۴۰=۱۴۰$$

می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو برابر هستند پس:

$$\widehat{CC'C''}=\hat{B}_1=۱۴۰^\circ$$

۹- گزینه «۱»

مرکز دایره **C** را با بردار $\vec{v}=۶$ انتقال می‌دهیم تا نقطه O' بدست آید که چون $\vec{v}=R$ است پس O' روی دایره **C** است و چون انتقال طولپا است پس شعاع دایره C' هم برابر ۶ است و دایره C' هم از **O** می‌گذرد.



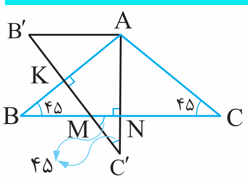
در مثلث $\overset{\triangle}{OAO'}$ و $\overset{\triangle}{OBO'}$ هر دو متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ هستند، حال می‌خواهیم مساحت قسمت رنگی که یک قطعه ۶۰° است را حساب کنیم.

$$S_{\text{رنگی}}=\frac{۶۰\pi R^۲}{۳۶۰}-S_{\overset{\triangle}{AOO'}}=\frac{\pi}{۶}\times(۶)^۲-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۶^۲=۶\pi-۹\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{ناحیه مشترک}}=S_{\overset{\triangle}{AOO'}}+S_{\overset{\triangle}{BOO'}}+۴S_{\text{رنگی}}=۹\sqrt{۳}+۹\sqrt{۳}+۴(۶\pi-۹\sqrt{۳})$$

$$=۱۸\sqrt{۳}+۲۴\pi-۳۶\sqrt{۳}=۲۴\pi-۱۸\sqrt{۳}$$

۱۰- گزینه «۴»



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۸+۸=۱۶ \Rightarrow BC=۴$$

مثلث **ABC** قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس $\hat{B}=\hat{C}=۴۵^\circ$ و چون $AB'C'$ دوران یافته مثلث **ABC** به مرکز **A** و زاویه ۴۵° است و دوران طولپا است و اندازه زاویه را حفظ می‌کند دو مثلث **ABC** و $AB'C'$ همنهشت هستند. پس داریم:

$$BC=B'C'=۴ \;\text{ و }\; AC'=AC=۲\sqrt{۲} \;\text{ و }\; AB'=AB=۲\sqrt{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AB'C'}}=\frac{۱}{۲}AK.B'C'=\frac{۱}{۲}AB'\times AC'$$

$$\Rightarrow AK\times B'C'=AB'\times AC' \Rightarrow AK\times ۴=۲\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲} \Rightarrow AK=۲$$

به طریق مشابه $AN=۲$

$$BK=AB-AK=۲\sqrt{۲}-۲$$

$$\overset{\triangle}{BKM}: \hat{B}=\hat{M}=۴۵^\circ \xrightarrow{\text{متساوی‌الساقین}} BM=KM=۲\sqrt{۲}-۲$$

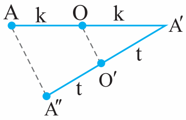
چون مثلث **ABC** متساوی‌الساقین است پس ارتفاع **AN** ضلع **BC** را نصف کرده است پس $BN=NC=۲$.

$$S_{\text{ناحیه مشترک}}=S_{\overset{\triangle}{ANB}}-S_{\overset{\triangle}{BMK}}=\frac{۱}{۲}AN\times NB-\frac{۱}{۲}KM.BK$$

$$=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲-\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲}-۲)(۲\sqrt{۲}-۲)$$

$$\Rightarrow S=۲-\frac{۱}{۲}(۸-۸\sqrt{۲}+۴)=۲-۶+۴\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}-۴$$

۱۱- گزینه «۳»



اگر A' دوران **A** به مرکز **O** و زاویه ۱۸۰ باشد: $OA=OA'=k$

اگر A'' دوران A' به مرکز O' و زاویه ۱۸۰ باشد: $O'A'=O'A''=t$

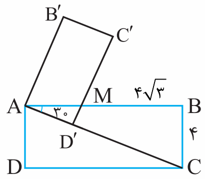
$$\overset{\triangle}{A'AA''}: \frac{OA'}{OA}=\frac{O'A'}{O'A''}=۱ \xrightarrow{\text{عکس تالس}} OO' \parallel AA''$$

$$\overset{\triangle}{A'AA''}: OO'\parallel AA'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA'}{A'A}=\frac{OO'}{AA''} \Rightarrow \frac{k}{۲k}=\frac{OO'}{AA''}$$

$$\Rightarrow AA''=۲OO'$$

پس انتقال **A** را می‌توان با یک انتقال موازی OO' و طول ۲ برابر آن بر A'' تصویر کرد.

۱۲- گزینه «۲»



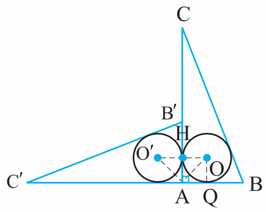
$$\overset{\triangle}{ABC}: \tan \widehat{BAC}=\frac{BC}{AB}=\frac{۴}{۴\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \widehat{BAC}=۳۰^\circ$$

دوران یک تبدیل طولپا است پس $AD'=AD=۴$

$$\overset{\triangle}{AD'M}: \tan ۳۰=\frac{MD'}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{MD'}{۴} \Rightarrow MD'=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AD'M}}=\frac{۱}{۲}AD'\times D'M=\frac{۱}{۲}\times ۴\times\frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AD'M}}=\frac{۸}{۳}\sqrt{۳}$$

۱۳- گزینه «۳»



$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۲۵+۱۴۴=۱۶۹ \Rightarrow BC=۱۳$$

می‌دانیم شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه $r=\frac{S}{P}$ به‌دست می‌آید.

$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۲ \Rightarrow S=۳۰$$

$$۲P=AB+AC+BC \Rightarrow ۲P=۵+۱۲+۱۳=۳۰ \Rightarrow P=۱۵$$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۳۰}{۱۵} \Rightarrow r=۲$$

$OH=AQ=r=۲$ است پس در مثلث قائم‌الزاویه OQA داریم: $OA^۲=OQ^۲+AQ^۲=۴+۴=۸ \Rightarrow OA=۲\sqrt{۲}$

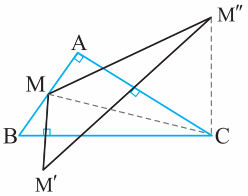
چون دوران یافته نقطه **O** به مرکز **A** و زاویه ۹۰° نقطه O' است پس $OA=O'A=۲\sqrt{۲}$ و $\widehat{OAO'}=۹۰^\circ$.

$$\overset{\triangle}{AOO'}: OO'^۲=OA^۲+O'A^۲=(۲\sqrt{۲})^۲+(۲\sqrt{۲})^۲=۸+۸=۱۶$$

$$\Rightarrow OO'=۴$$

۱۴- گزینه «۴»

چون $\hat{A}=۹۰^\circ$ است پس $BC^۲=AC^۲+AB^۲$ است.



$$\sin C=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{C}=۳۰$$

می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع یک دوران به مرکز تلاقی دو محور و زاویه دوران دو برابر زاویه تقاطع دو محور است. بنابراین داریم:

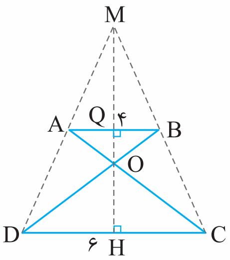
$$\left.\begin{array}{l} MC=M''C \\ \widehat{MCM''}=۲(۳۰)=۶۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MCM''}\ \text{متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow MM''=CM$$

در مثلث **ACM**، $\hat{A}=۹۰^\circ$ و $AM=\frac{AB}{۲}=\frac{۳}{۲}$ و $AC=۳\sqrt{۳}$ است.

$$CM^۲=AM^۲+AC^۲=\frac{۹}{۴}+۲۷=\frac{۱۱۷}{۴}\Rightarrow CM=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۲}\Rightarrow MM''=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۲}$$

۱۵- گزینه «۲»

مرکز تجانس معکوس نقطه **O** و مرکز تجانس مستقیم، محل برخورد امتدادهای **AD** و **BC** است (نقطه **M**).



می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع **a** اندازه هر ضلع ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است بنابراین $OQ=۲\sqrt{۳}$ و $OH=۳\sqrt{۳}$ است پس

$$HQ=۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$$

$$AB\parallel DC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{ABM}\sim\overset{\triangle}{DCM} \Rightarrow k=\frac{AB}{DC}\Rightarrow k=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها برابر نسبت اضلاع است.

$$\frac{MQ}{MH}=k \Rightarrow \frac{MQ}{MQ+QH}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{MQ}{MQ+۵\sqrt{۳}}=\frac{۲}{۳}$$

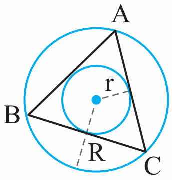
$$\Rightarrow ۳MQ=۲MQ+۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow MQ=۱۰\sqrt{۳}$$

حال فاصله **MO** را بدست می‌آوریم:

$$MO=MQ+QO=۱۰\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}$$

۱۶- گزینه «۱»

محل تلاقی نیمسازها مرکز دایره محاطی داخلی مثلث است و چون مرکز دایره محاطی داخلی و دایره محیطی دو مثلث یکسان است (نقطه ثابت تبدیل) پس مثلث متساوی‌الاضلاع است و اگر اندازه هر ضلع آن **a** باشد:



$\text{محیط} = ۳a \Rightarrow ۱۲ = ۳a \Rightarrow a = ۴$

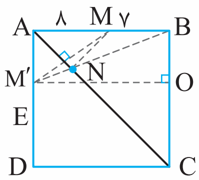
$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \Rightarrow S = ۴\sqrt{۳}$

در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره محیطی ۲ برابر شعاع دایره محاطی داخلی است پس $k = \frac{R}{r} = ۲$.

$\frac{S'}{S} = k^{۲} \Rightarrow \frac{S'}{۴\sqrt{۳}} = ۴ \Rightarrow S' = ۱۶\sqrt{۳}$

۱۷- گزینه «۱»

بازتاب نقطه **M** نسبت به خط **AC** را M' می‌نامیم و M' را به **B** وصل می‌کنیم تا **AC** را در **N** قطع کند، بنا به قضیه هرون مثلث **MNB** کمترین محیط ممکن را دارد.



$\left.\begin{array}{l} S(N) = N \\ S(M) = M' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طولپا بودن بازتاب}} NM = NM'$

$\text{محیط}_{MNB} = MN + NB + MB = M'N + NB + ۷ = M'B + ۷$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن $M'B$ باشد، می‌سازیم.

چون نقطه **A** روی عمودمنصف MM' است پس $AM = AM' = ۸$ و $BO = AM' = ۸$ است و $AB = M'O = ۱۵$.

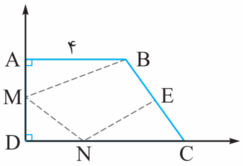
$\overset{\triangle}{OM'B}: M'B^{۲} = M'O^{۲} + OB^{۲} = ۱۵^{۲} + ۸^{۲}$

$= ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹ \Rightarrow M'B = ۱۷$

$\text{محیط}_{MNB} = M'B + ۷ = ۱۷ + ۷ = ۲۴$

۱۸- گزینه «۲»

فرض کنیم نقطه **D** روی مبدأ مختصات و اضلاع **DC** و **DA** به ترتیب روی محورهای **x** و **y** باشند در این‌صورت $A(۰,۶)$ و $C(۱۰,۰)$ و $B(۴,۶)$ است و چون **E** وسط **BE** است داریم:



$E(\frac{x_B + x_C}{۲}, \frac{y_B + y_C}{۲}) \Rightarrow E(۷,۳)$

می‌خواهیم از **B** به محور **y** و سپس به محور **x** و بعد از آن به نقطه **E** برویم به طوری که کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد که

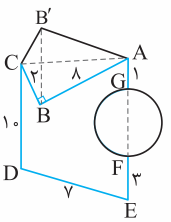
می‌دانیم از دستور $\sqrt{(x_B + x_E)^{۲} + (y_B + y_E)^{۲}}$ به‌دست می‌آید.

$BM + MN + NE = \sqrt{(۴+۷)^{۲} + (۶+۳)^{۲}}$ کمترین مقدار

$= \sqrt{۱۲۱ + ۸۱} = \sqrt{۲۰۲}$

۱۹- گزینه «۴»

نیم‌دایره را نسبت به قطر **GF** بازتاب می‌کنیم و مساحت زمین به اندازه مساحت دایره افزایش می‌یابد.



$S_{\text{دایره}} = \pi r^{۲} = \pi(۴)^{۲} = ۱۶\pi$

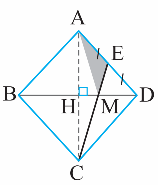
اضلاع **BC** و **AB** را نسبت به پاره‌خط **AC** بازتاب می‌کنیم چون بازتاب طولپا است پس ۲ مثلث **ABC** و $AB'C$ همنهشت هستند.

$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = \frac{۱}{۲}AB \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲ = ۸$

$S_{\text{افزایش مساحت}} = S_{\text{دایره}} + S_{\overset{\triangle}{ABC}} + S_{\overset{\triangle}{AB'C}} = ۱۶\pi + ۸ + ۸ = ۱۶(\pi + ۱)$

۲۰- گزینه «۳»

نقاط **A** و **E** در یک طرف **BD** قرار دارند. بازتاب نقطه **A** نسبت به محور **BD** که قطر لوزی است نقطه **C** می‌شود (زیرا در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند) نقطه تلاقی **CE** و قطر **BD** را **M** می‌نامیم، بنابر قضیه هرون $MA + ME$ کم‌ترین مقدار خود را دارد، پس محیط **MAE** کم‌ترین مقدار خود را دارد.



در مثلث **ACD**، **M** نقطه همرسی میانه‌ها است پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{MAE}} = \frac{۱}{۶}S_{\overset{\triangle}{ACD}} \\ S_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{۱}{۶}S_{ABCD} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MAE}} = \frac{۱}{۱۲}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = ۱۲S_{\overset{\triangle}{MAE}}$$