

+ ریاضی دهم

حسابان جامع

(دوازدهم)



مؤلف: سیروس نصیری



نام کتاب: حسابان جامع دوازدهم + ریاضی دهم
 مؤلف: سیروس نصیری
 ویراستاران: محدثه کارگرفرد- علی بهرمندیپور- رضا ماجدی- مجتبی رضائزاد- امیر محمدپور
 مدیریت پروژه و تولید: علی مجتهدین
 مسئول پروژه: طناز ملک‌لی
 صفحه‌آرایی: ساجده زائری - جواد محمودی
 طراح جلد: هانیه فراست
 ناشر: علوی فرهیخته
 لیتوگرافی: آریوفام
 چاپخانه و صحافی: کانون چاپ
 شمارگان: ۱۰۰۰ جلد
 شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۸۵۳۶-۲۳-۱



علوی

برای مشاهده قیمت
 رمزینه را اسکن کنید
 یا به سایت علوی
 مراجعه کنید.



سرشناسه: نصیری، سیروس، ۱۳۵۵

عنوان و نام پدیدآور: حسابان + ریاضی دهم جامع (دوازدهم) / مؤلف: سیروس نصیری

مشخصات نشر: تهران: علوی فرهیخته

مشخصات ظاهری: ۲۶۴ ص؛ ۲۲ × ۲۹ س م.

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۸۵۳۶-۲۳-۱

وضعیت فهرست‌نویسی: فیبا مختصر

شماره کتابشناسه ملی: ۱۰۱۱۶۲۴۲

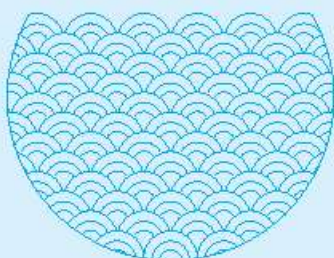
دفتر و فروشگاه مرکزی انتشارات علوی فرهیخته:

تلفن: ۲۲ ۸۹ ۲۵ ۵۰

ضلع شمال غربی پل سیدخندان - بین خیابان پیشداد و شقایق - پلاک ۱۹

کلیه حقوق این اثر متعلق به انتشارات علوی (فرهیخته) است و هرگونه نسخه‌برداری و برداشت به هر صورت و شیوه به موجب بند ۵ از ماده ۲ قانون حمایت از ناشران قابل پیگرد است.

مقدمه مؤلف



به نام خدا

خداوند متعال را شاکرم که به بنده توفیق مجدد داد تا کتاب شصت و هشتم خودم را تألیف کنم، این کتاب مجموعه‌ای از سؤالات کنکور رشته‌های ریاضی، تجربی و همچنین سؤالات آزمون و کنکورهای آزمایشی مؤسسه علوی است. طبقه‌بندی سؤالات با ظرافت و دقت انجام شده است. پاسخنامه کاملاً تشریحی از ویژگی‌های بارز این کتاب است. این کتاب به صورت مبحثی و در یازده فصل تنظیم شده است.

سؤالات موجود در این کتاب اغلب متوسط و دشوار است و سؤالات ساده کمتر دیده می‌شود دلیل این امر این است که مجموعه سؤالات مربوط به آزمون‌ها هست بنابراین با این کتاب می‌توانید به جمع‌بندی حرفه‌ای حسابان هم فکر کنید.

در پایان لازم می‌دانم از مسئولین محترم مؤسسه علوی تشکر ویژه داشته باشم که به بنده حقیر اعتماد کرده‌اند. همچنین از همه عزیزانی که در تألیف این کتاب یاری کردند، تشکر می‌کنم. لطفاً اگر اشکالی در کتاب مشاهده می‌کنید ما را از آن مطلع نمایید تا در چاپ‌های بعدی آن‌ها را اصلاح کنیم.

سیروس نصیری



راهنمای استفاده از کتاب



دانش‌آموزان پایه دوازدهم که در مسیر آمادگی برای کنکور هستند و نیاز به مروری جامع بر مفاهیم پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم دارند.

مخاطب این کتاب



این کتاب با رویکردی جامع، به منظور تحقق اهداف زیر تألیف شده است:

- ایجاد فرصت برای تمرین و تکرار مستمر
- آشنایی کامل با الگوها و ساختار سؤالات کنکور
- تسلط بر مفاهیم کلیدی دروس اختصاصی
- تقویت مهارت تست‌زنی و مدیریت زمان در آزمون

اهداف این کتاب



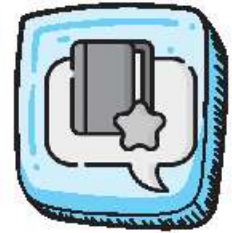
محتوای کتاب شامل دو بخش اصلی است:

- ۱) سؤالات منتخب کنکورهای سال‌های گذشته
 - جهت آشنایی با تیپ و سطح دشواری سؤالات واقعی کنکور
 - کمک به تحلیل دقیق نقاط قوت و ضعف دانش‌آموز
- ۲) سؤالات آزمون‌های مؤسسه علوی
 - طراحی شده مطابق با استانداردهای کنکور
 - هدفمند جهت افزایش تسلط و تمرکز بر مباحث مهم

محتوای کتاب



پیشنهاد



- نحوه استفاده پیشنهادی از کتاب:
- پس از تدریس هر فصل توسط دبیر مربوطه، مطالب را مرور کرده و سؤالات ارائه شده را به صورت مرحله به مرحله حل نمایید.
 - پاسخ‌های خود را با پاسخ‌نامه مقایسه کرده و دلایل انتخاب گزینه صحیح یا اشتباه را بررسی نمایید.
 - سؤالات دشوارتر یا نکته‌دار را علامت‌گذاری کنید تا در زمان مرورهای بعدی دسترسی سریع‌تری داشته باشید.
 - نکات مهم، اشتباهات رایج یا روش‌های حل جایگزین را یادداشت نمایید.
 - در پایان هر فصل، مروری کلی بر سؤالات علامت‌دار داشته باشید و روند پیشرفت خود را ارزیابی نمایید.

ارتباط با ما



در صورت مشاهده هرگونه اشکال، پیشنهاد یا ایراد محتوایی، می‌توانید از طریق کد QR درج شده با ما در ارتباط باشید.

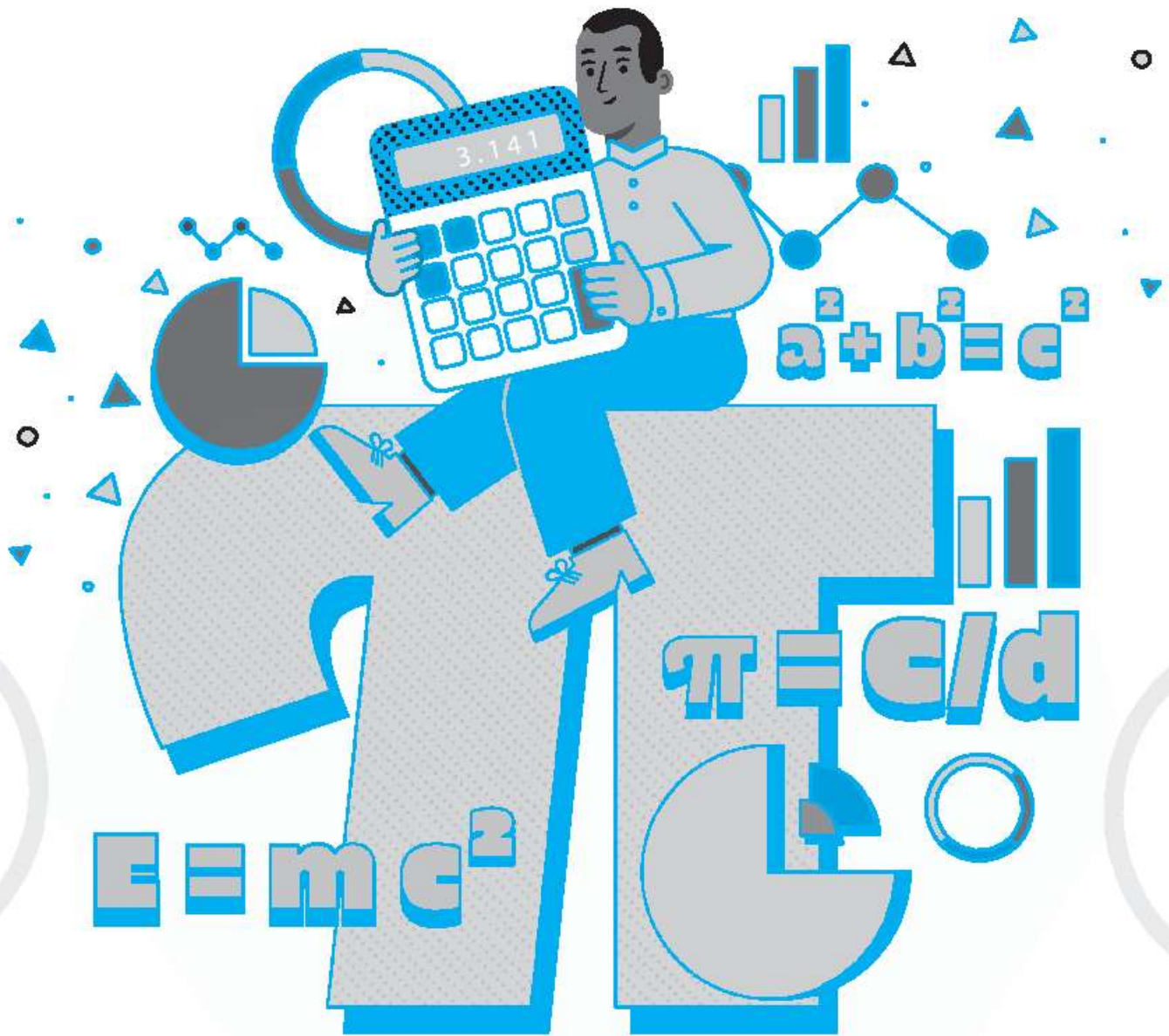


بازخورد شما، نقش مؤثری در بهبود نسخه‌های بعدی کتاب خواهد داشت.

فهرست

۸	معادلات، نامعادلات و سهمی	فصل اول
۱۸	قدر مطلق	فصل دوم
۲۰	ریشه، توان و عبارتهای جبری	فصل سوم
۲۳	الگو و دنباله	فصل چهارم
۲۸	تابع نمایی و لگاریتمی	فصل پنجم
۳۶	هندسه تحلیلی	فصل ششم
۴۰	تابع و مفاهیم آن	فصل هفتم
۶۱	مثلثات	فصل هشتم
۸۳	حد و پیوستگی	فصل نهم
۱۰۲	مشتق و آهنگ تغییرات	فصل دهم
۱۱۸	کاربرد مشتق	فصل یازدهم
۱۲۸	پاسخنامه تشریحی	

حسابان



فصل اول

معادلات، نامعادلات و سهمی

$$E] (1-u\beta - e\beta + u\beta e - \beta + e\beta + u\beta - e\beta) = \frac{(1-e)(1-u\beta)e}{(1-u\beta)e}$$

حل معادله درجه دوم



۱ اگر $m > 1$ باشد، ریشه بزرگ‌تر معادله $x^2 - m(m+1)x = -m^2$ کدام است؟

- ۱) m ۲) m^2 ۳) $2m$ ۴) $2m^2$

۲ اگر $4x^2 - 12x + 9 = 0$ و $(2x-2)y^2 + 6y + (2x+6) = 0$ باشد، مقدار y کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 6

۳ ریشه مضاعف معادله $\frac{x^2}{m} - \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ کدام است؟

- ۱) 1 ۲) 1 ۳) 4 ۴) 4

۴ اگر دو ریشه معادله $ax^2 - 3x - 1 = 0$ با هم برابر باشند، ریشه معادله کدام است؟

- ۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $-\frac{9}{4}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۵ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آنگاه حاصل ضرب پول‌های باقی‌مانده آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم، کدام است؟

- ۱) 9 ۲) 15 ۳) 85 ۴) 91

۶ اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب S و P باشند، حاصل عبارت $2P^2 - 2SP + 2S$ کدام است؟

- ۱) $59 - 7\sqrt{69}$ ۲) $7 + \sqrt{69}$ ۳) 50 ۴) $59 + 7\sqrt{69}$

روابط بین ریشه‌ها



۷ اگر α و β ریشه‌های معادله $(x-a)(x-b) + c = 0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $(\alpha\beta - c)x^2 + (\alpha + \beta)x + 1 = 0$ کدام است؟

(آزمون علوی) $(abc \neq 0)$

- ۱) $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ ۲) $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$ ۳) $\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$ ۴) $-\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$

۸ اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله $m^2x^2 - 3mx - 1 = 0$ باشد، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای m کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۹ اگر مجموع معکوسات ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 8 = 0$ برابر $\frac{1}{4}$ باشد، حاصل جمع دو ریشه چقدر است؟

- ۱) 2 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 4

(آزمون علوی)

۱۰ در صورتی که $\frac{1}{\beta}$ و $\frac{1}{\alpha}$ ریشه‌های معادله $x^2 - x = 3$ باشند، مجموع مکعبات ریشه‌های این معادله چقدر است؟

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

(آزمون علوی)

۱۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^4 + 12\beta$ کدام است؟

- ۲۷ (۱) ۳۰ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴)

(آزمون علوی)

۱۲ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند و $\alpha < 0 < \beta$ حاصل $\alpha^3 + \beta^3 + \beta$ کدام است؟

- ۲۲ - $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (۴) ۲۲ + $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (۳) ۳۳ - $\frac{1}{2}\sqrt{11}$ (۲) ۳۳ + $\frac{1}{2}\sqrt{11}$ (۱)

۱۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 2x + m = 0$ و $2\alpha + 2\beta = 6 - m$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، مقدار منفی m کدام است؟

(آزمون علوی)

- ۸ (۴) -۲ (۳) -۶ (۲) -۴ (۱)

۱۴ معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه

(کنکور تجربی - ۹۹)

برابر باشد، مقدار m کدام است؟

- $-\frac{5}{2}$ (۴) ۱ (۳) ۲ (۲) $\frac{7}{2}$ (۱)

۱۵ به‌ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟

(کنکور تجربی - ۰۱)

- ۱۸ (۱) ۹ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

۱۶ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

(کنکور تجربی - ۰۱)

- ۲ (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴)

۱۷ ریشه‌های معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (2a+1)x + b = 0$ دو عدد زوج متوالی

(کنکور تجربی - ۰۱)

است. اختلاف حاصل ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟

- ۲۳ (۱) ۲۱ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴)

۱۸ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چقدر است؟

(کنکور ریاضی - ۰۱)

- ۱ (۱) $\frac{12}{4}$ (۲) $\frac{21}{5}$ (۳) ۲ (۴)

۱۹ معادله‌های $x^2 + 6x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 2m = 0$ یک ریشه مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟

(کنکور ریاضی - ۰۲)

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴)

۲۰ اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $4\beta^3 + 2\alpha^3 - 2\alpha\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

(کنکور ریاضی - ۰۲)

- $\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (۴)

(کنکور ریاضی - ۰۲)

۲۱ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

- ۱ (۱) $1/75$ (۲) ۲ (۳) $2/25$ (۴)

۲۲ اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{3}\right]$ کدام است؟ (کنکور ریاضی - ۵۳)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳ برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه حقیقی معادله $2x^2 + 7x + m = 0$ بزرگ‌تر از -3 است؟ (کنکور ریاضی - ۵۳)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) صفر

۲۴ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 12x - a = 0$ و $2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha = 7$ باشد، مقدار a چند برابر ریشه بزرگ‌تر معادله است؟ (کنکور ریاضی - ۵۲)

- (۱) ۳ (۲) -2 (۳) ۹ (۴) -9

۲۵ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{4}{9}$ کدام است؟ (کنکور ریاضی - ۵۲)

- (۱) ۲ (۲) $2/5$ (۳) ۴ (۴) $4/5$

۲۶ برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه حقیقی معادله $-x^2 + 5x + m = 0$ کوچک‌تر از $\frac{9}{7}$ است؟ (کنکور ریاضی - ۵۳)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۷ اگر α و β ریشه‌های معادله $mx^2 + x - n = 0$ و $\alpha + 2\beta = 0$ ، $2\alpha + 5\beta = 1$ باشند، حاصل $m+n$ کدام است؟ (آزمون علوی)

- (۱) ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) ۲

ساختن معادله



۲۸ اگر $a^2 = 5a + 8$ و $b^2 = 5b + 8$ باشد، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌های آن $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ باشد، کدام است؟ (آزمون علوی)

- (۱) $6x^2 - 5x + 6 = 0$ (۲) $8x^2 - 41x + 8 = 0$ (۳) $9x^2 - 8x + 9 = 0$ (۴) $8x^2 + 41x + 8 = 0$

۲۹ ریشه‌های معادله $x^2 + x - 1 = 0$ برابر $2\alpha + \beta$ و $2\beta + \alpha$ است. ریشه‌های کدام معادله α^2 و β^2 خواهد بود؟ (آزمون علوی)

- (۱) $81x^2 - 207x + 121 = 0$ (۲) $81x^2 + 207x + 121 = 0$ (۳) $81x^2 - 121x - 207 = 0$ (۴) $81x^2 + 121x - 207 = 0$

۳۰ اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آنگاه ریشه‌های معادله $ax^2 - bx(x-1) + c(x-1)^2 = 0$ کدام است؟ (آزمون علوی)

- (۱) $\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\alpha}{1-\alpha}$ (۲) $\frac{1-\beta}{\beta}, \frac{1-\alpha}{\alpha}$ (۳) $\frac{\beta}{1+\beta}, \frac{\alpha}{1+\alpha}$ (۴) $\frac{1+\beta}{\beta}, \frac{1+\alpha}{\alpha}$

۳۱ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x = x^2 - 4$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_1^2 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^2 + \frac{1}{x_2}$ است؟ (کنکور تجربی - ۵۵)

- (۱) $4x^2 = 51x + 221$ (۲) $4x^2 + 51x = 221$ (۳) $4x^2 = 51x + 197$ (۴) $4x^2 + 51x = 197$

۳۲ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x = 5 - x^2$ باشند. ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (کنکور تجربی - ۵۵)

- (۱) $125x^2 + 16x = 1$ (۲) $125x^2 = 16x + 1$ (۳) $125x^2 = 12x + 1$ (۴) $125x^2 + 12x = 1$

۳۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ، $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ باشد، مقدار k چقدر است؟ (کنکور ریاضی - ۵۱)

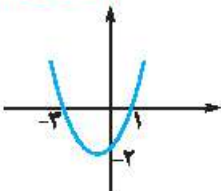
- (۱) $-\frac{27}{5}$ (۲) $\frac{27}{5}$ (۳) -3 (۴) ۳



۳۴ اگر مجموع مربعات صفرهای تابع $f(x) = mx^2 - 2x - 1$ برابر ۶ باشد، مختصات رأس سهمی کدام است؟ ($m > 0$)

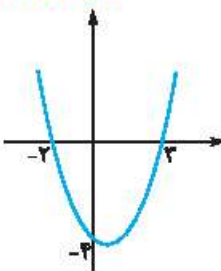
(۱) $(1, -2)$ (۲) $(2, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(2, 2)$

۳۵ با توجه به نمودار سهمی زیر، مقدار $f(-5)$ کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۶
(۴) ۸

۳۶ با توجه به نمودار سهمی زیر، $f(4)$ کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

۳۷ سنگی از بالای برجی به ارتفاع ۶۴ متر به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر پس از t ساعت، مسافت $S(t) = 48t - 16t^2$ (متر) طی کند،

بیشترین ارتفاع سنگ تا سطح زمین چند متر است؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۳۶ (۳) ۱۰۰ (۴) ۷۲

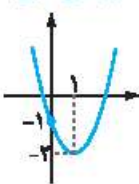
۳۸ رأس سهمی $y = x^2 - kx + k^2$ روی خط $y = x + 2$ قرار دارد. مقدار منفی k کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-\frac{2}{4}$ (۳) $-\frac{4}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۳۹ به‌ازای چند مقدار m سهمی به معادله $y = (1+m)x^2 + (4+m^2)x - 1$ در نقطه‌ای به طول $-\frac{5}{4}$ ماکزیمم دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۰ اگر سهمی زیر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، حاصل ضرب صفرهای تابع $g(x) = 2x - f(x)$ کدام است؟

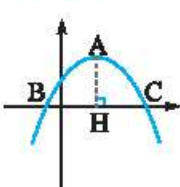


- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۱
(۴) ۱

۴۱ اگر $f(x) = 6x^2 - 8x + 1$ و α و β صفرهای تابع $g(x) = f(x) - 4$ باشند، $\alpha^4 + \beta^4$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{625}{81}$ (۲) $\frac{1169}{162}$ (۳) $\frac{1129}{81}$ (۴) $\frac{1249}{81}$

۴۲ اگر نمودار زیر مربوط به تابع $y = -x^2 + 2x + k$ و $|AH| = |BC|$ باشد، مقدار k کدام است؟



- (۱) $1/75$
(۲) ۲
(۳) $7/5$
(۴) $2/25$

پاسخنامه تشریحی



۵. گزینه (۳)

پول اکرم را x و پول علی را y در نظر می‌گیریم:
 $x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، پول علی $y - 10$ و پول اکرم $x + 10$ خواهد بود. اکنون حاصل ضرب پول هایشان را برابر ۴۷۵ قرار می‌دهیم:

$$(x+10)(y-10) = 475 \xrightarrow{y=100-x}$$

$$(x+10)(100-x-10) = 475 \Rightarrow (x+10)(90-x) = 475$$

حال پیشنهاد می‌کنیم که گزینه‌ها را امتحان کنیم، با امتحان کردن گزینه‌ها $x = 85$ در معادله صدق می‌کند.

$$x = 85 \Rightarrow (85+10)(90-85) = 475 \Rightarrow 95 \times 5 = 475$$

۶. گزینه (۴)

برای حل معادله درجه چهارم دو مجزوری به فرم $ax^2 + bx^2 + c = 0$ کافی است از تغییر متغیر $x^2 = t > 0$ استفاده کنیم، در این صورت معادله به فرم $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل می‌شود که مجموع ریشه‌های آن همواره برابر صفر است.

$$x^4 - 7x^2 - 5 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^2 - 7t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$t > 0 \rightarrow t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

$$P = x_1 x_2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow P^2 = \frac{7^2 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} = \frac{118 + 14\sqrt{69}}{4}$$

$$P^2 = \frac{2(59 + 7\sqrt{69})}{4} \Rightarrow 2P^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

$$S = x_1 + x_2 = 0$$

$$2P^2 - 2PS + 2S = 2P^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

۷. گزینه (۲)

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، اگر α و β ریشه‌های آن باشند در این صورت بدون حل معادله:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) + c = 0 \Rightarrow x^2 - (a+b)x + ab + c = 0$$

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{1} = a+b, \alpha\beta = ab+c$$

حال معادله $(\alpha\beta - c)x^2 + (\alpha + \beta)x + 1 = 0$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$abx^2 + (a+b)x + 1 = 0$$

طرفین را بر ab تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x + \frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{a}\right)\left(x + \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a} \\ x_2 = -\frac{1}{b} \end{cases}$$

۱. گزینه (۲)

برای حل معادلات درجه دوم روش‌های متعددی وجود دارد، یکی از این روش‌ها تجزیه است.

$$x^2 - m(m+1)x + m^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (m^2 + m)x + m^2 \cdot m = 0$$

این معادله را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$x^2 + (a+b)x + ab = 0$$

در این سؤال:

$$(x-m^2)(x-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = m^2 \\ x = m \end{cases}$$

چون $m > 1$ است، ریشه بزرگ‌تر m^2 خواهد بود.

۲. گزینه (۲)

$$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow (2x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

مقدار x را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$(2x-2)y^2 + 6y + (2x+6) = 0 \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (y+3)^2 = 0 \Rightarrow y = -3$$

توجه:

در این سؤال از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کردیم:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

۳. گزینه (۲)

شرط اینکه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه مضاعف بدهد این است که $\Delta = 0$ باشد، در این صورت $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ خواهد بود.

$$\frac{1}{m}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{m} = 0 \Rightarrow \frac{1}{m} = -\frac{1}{4} \Rightarrow m = -4$$

$$\text{معادله: } -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times(-4)} x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -1$$

۴. گزینه (۳)

دو ریشه معادله با هم برابرند، بنابراین ریشه مضاعف خواهیم داشت.

$$ax^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 + 4a = 0 \Rightarrow 4a = -9 \Rightarrow a = -\frac{9}{4}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2 \times (-\frac{9}{4})} = \frac{2}{-\frac{9}{2}} = \frac{-2 \times 2}{9} = -\frac{4}{9}$$

۱۳. گزینه (۱)

بین دو ریشه رابطهای داده شده است، ما هم از دو رابطه S و P استفاده می‌کنیم:

$$2\alpha + 2\beta = 6 - m \Rightarrow 2(\alpha + \beta) + \beta = 6 - m$$

$$\frac{\alpha + \beta = 2}{\Rightarrow 6 + \beta = 6 - m \Rightarrow \beta = -m}$$

β ریشه معادله است، بنابراین در آن صدق می‌کند.

$$(-m)^2 - 2(-m) + m = 0 \Rightarrow m^2 + 4m = 0$$

$$\Rightarrow m(m+4) = 0 \xrightarrow{m < 0} m = -4$$

۱۴. گزینه (۱)

اطلاعات مسئله را اعمال می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{1-2m}{2} = \frac{2}{2-m}$$

$$\Rightarrow (1-2m)(2-m) = 4 \Rightarrow 2-m-4m+2m^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{2}{2} \end{cases}$$

قرار است ریشه‌ها حقیقی باشند. $m = -1$ را امتحان می‌کنیم:

$$m = -1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

بنابراین $m = \frac{2}{2}$ درست است.

۱۵. گزینه (۳)

$$\alpha = 2\beta \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{4}{9}} \alpha\beta = 2\beta^2 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{4}{9}} 2\beta^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

β یکی از ریشه‌های معادله است و در معادله صدق می‌کند.

$$\beta = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \times \frac{4}{9} - \frac{2}{3}a + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 4 - 2a + 12 = 0 \Rightarrow a = 8$$

$$\beta = -\frac{2}{3} \Rightarrow 2 \times \frac{4}{9} + \frac{2}{3}a + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 4 + 2a + 12 = 0 \Rightarrow a = -8$$

اختلاف مقادیر مختلف a برابر ۱۶ است.

۱۶. گزینه (۲)

a و b ریشه‌های معادله است، پس:

$$\begin{cases} S = a + b = a^2 + b^2 - 12 \\ P = ab = a + b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = S^2 - 2P - 12 \\ P = S - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = S^2 - 2(S-1) - 12 \Rightarrow S^2 - 2S - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (S-5)(S+2) = 0 \xrightarrow{S > 0} S = 5$$

۸. گزینه (۲)

ریشه هر معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$x = 2 \Rightarrow fm^2 - 6m - 1 = 0 \quad (۱)$$

معادله (۱) دو ریشه حقیقی دارد زیرا $\frac{c}{a} < 0$ است، بنابراین:

۹. گزینه (۴)

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -2b \Rightarrow -8 = -2m \Rightarrow m = 4$$

مجموع دو ریشه برابر است با:

۱۰. گزینه (۴)

ریشه‌های این معادله $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است، بنابراین:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1, \quad \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 1, \quad \frac{1}{\alpha\beta} = -2 \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

مجموع مکعبات ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{-\frac{1}{8} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{8}} = \frac{-\frac{7}{8}}{-\frac{1}{8}} = 7 \end{aligned}$$

۱۱. گزینه (۳)

چون α ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2\alpha + 1$$

$$\Rightarrow \alpha^4 = 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 4(2\alpha + 1) + 4\alpha + 1 = 12\alpha + 5$$

$$\alpha^4 + 12\beta = 12\alpha + 12\beta + 5 = 12S + 5$$

$$= 12 \times 2 + 5 = 24 + 5 = 29$$

۱۲. گزینه (۲)

ریشه‌های معادله داده شده را حساب می‌کنیم:

$$2x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+2}}{2}$$

$$P < \alpha < \alpha \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \\ \beta = \frac{3 - \sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = 3, \quad P = \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \beta = S^3 - 3PS + \beta = 27 + \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

$$= 33 - \frac{1}{2}\sqrt{11}$$

گزینه ۲۱ (۳)

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{1-2x+x^2+x^2}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1-2(x-x^2)}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

با فرض $x - x^2 = t$ داریم:

$$\frac{1-2t}{t^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow 160t^2 = 9 - 18t \Rightarrow 160t^2 + 18t - 9 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 9^2 + 9 \times 160 = 9 \times 169$$

$$t = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-9 \pm 27}{160} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{16} \\ t = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

حال تهای به دست آمده را در معادله قرار می‌دهیم:

$$x - x^2 = \frac{2}{16} \Rightarrow x^2 - x + \frac{2}{16} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_1 + x_2 = 1$$

$$x - x^2 = -\frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_3 + x_4 = 1$$

بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

گزینه ۲۲ (۴)

$$|\alpha - \beta| = \frac{f}{r}k \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{f}{r}k \Rightarrow \frac{\sqrt{fk^2 - 20}}{1} = \frac{fk}{r}$$

$$\xrightarrow{\text{توان دو}} fk^2 - 20 = \frac{16}{9}k^2 \Rightarrow (f - \frac{16}{9})k^2 = 20$$

$$\Rightarrow \frac{20}{9}k^2 = 20 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \frac{k^2}{r} = \frac{9}{2} \Rightarrow \left[\frac{k^2}{r}\right] = 4$$

گزینه ۲۳ (۲)

اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \alpha > -2 \\ \beta > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2 > 0 \\ \beta + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha + 2)(\beta + 2) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 > 0 \Rightarrow \frac{m}{r} + 2\left(-\frac{v}{r}\right) + 4 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{r} > \frac{2v}{r} - \frac{18}{r} \Rightarrow \frac{m}{r} > \frac{2}{r} \Rightarrow m > 2 \quad (1)$$

اما باید ریشه‌ها حقیقی باشند، پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 49 - 8m > 0 \Rightarrow m < \frac{49}{8} \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با $(2, \frac{49}{8})$ که اعداد صحیح این بازه $\{4, 5, 6\}$ خواهد بود.

گزینه ۱۷ (۳)

ریشه‌های معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ دو عدد فرد طبیعی است، بنابراین تفاضل ریشه‌ها برابر ۲ است.

$$|\alpha - \beta| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{1} = 2 \Rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 - 4a = 4$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a+1)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

$a = -1$ قابل قبول نیست، زیرا در این صورت ریشه‌ها طبیعی نخواهد بود.

$a = 3$ قابل قبول است.

$$a = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

اکنون معادله بعد:

$$x^2 - (2a+1)x + b = 0 \xrightarrow{a=3} x^2 - 7x + b = 0$$

این معادله دو ریشه زوج متوالی دارد.

$$|x_1 - x_2| = 2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$\Rightarrow 49 - 4b = 4 \Rightarrow 25 - b = 1$$

$$\Rightarrow b = 24 \Rightarrow x^2 - 7x + 24 = 0 \Rightarrow x = 4, 6$$

اختلاف حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1 x_2 - \alpha\beta = 24 - 3 = 21$$

گزینه ۱۸ (۱)

در معادله داده شده ریشه کوچک‌تر و S و P را لازم داریم.

$$\alpha = \frac{-2 - \sqrt{9-a}}{1} = -2 - \sqrt{9-a}$$

$$S = \alpha + \beta = -6, \quad P = \alpha\beta = a$$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow \alpha^2 + 2(\alpha^2 + \beta^2) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$(-2 - \sqrt{9-a})^2 + 2(26 - 2a) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 9 + 6\sqrt{9-a} + 9 - a + 52 - 4a = 12\sqrt{2} + 85$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{9-a} + 90 - 5a = 12\sqrt{2} + 85 \Rightarrow a = 1$$

گزینه ۱۹ (۳)

ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + m = 0$ را α و β در نظر می‌گیریم و ریشه‌های

معادله $x^2 + 2x - 3m = 0$ را α و θ فرض می‌کنیم، بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -6 \\ \alpha + \theta = -2 \end{cases} \xrightarrow{-} \theta - \beta = 4$$

گزینه ۲۰ (۴)

$$4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta = 17 \Rightarrow 2(2\beta^2 + \alpha^2 - \beta) = 17$$

$$\Rightarrow (\beta^2 - \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{17}{2}$$

$$\xrightarrow{S=1, P=-\frac{b}{a}} \frac{b}{a} + 1 + 2\frac{b}{a} = \frac{17}{2}$$

$$\frac{\beta^2 - \beta + \alpha^2 + \beta^2}{a} \rightarrow \frac{b}{a} + 1 + 2\frac{b}{a} = \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow 3\frac{b}{a} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{1 - 4P} = \sqrt{1 + 4\frac{b}{a}} = \sqrt{1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$